# Løsningsforslag eksamen R1 høsten 2019

## Del 1

### Oppgave 1

a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{4x^3 - 2 + \frac{1}{x}}}$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x \Rightarrow g'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = \underline{\underline{x^6\left(7+x\right)e^x}}$

c)

$$h(x) = \frac{\ln(2x)}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot x^2 - \ln(2x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(2x)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{1-2\ln(2x)}{x^3}}}$$

### Oppgave 2

$$\begin{aligned} 4\ln\left(a \cdot b^3\right) - 3\ln\left(a \cdot b^2\right) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= 4\ln a + 4\ln\left(b^3\right) - \left(3\ln a + 3\ln\left(b^2\right)\right) - \left(\ln a - \ln b\right) \\ &= 4\ln a + 12\ln b - 3\ln a - 6\ln b - \ln a + \ln b \\ &= \underline{\underline{7\ln b}} \end{aligned}$$

### Oppgave 3

$P(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x - 30$

a) Dersom divisjonen $P(x):(x-2)$ skal gå opp, må vi ha $P(2) = 0$.

$P(2) = 0$

gir

$$\begin{aligned} 2^3 + 6 \cdot 2^2 + k \cdot 2 - 30 &= 0 \\ 8 + 24 + 2k - 30 &= 0 \\ 2k &= 30 - 24 - 8 \\ k &= \frac{-2}{2} \\ k &= -1 \end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>

b)

$$(x^3+6x^2-x-30):(x-2)=x^2+8x+15$$
$$\underline{x^3-2x^2}$$
$$8x^2-x-30$$
$$\underline{8x^2-16x}$$
$$15x-30$$
$$\underline{15x-30}$$
$$0$$

og "sum og produkt" gir

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$$

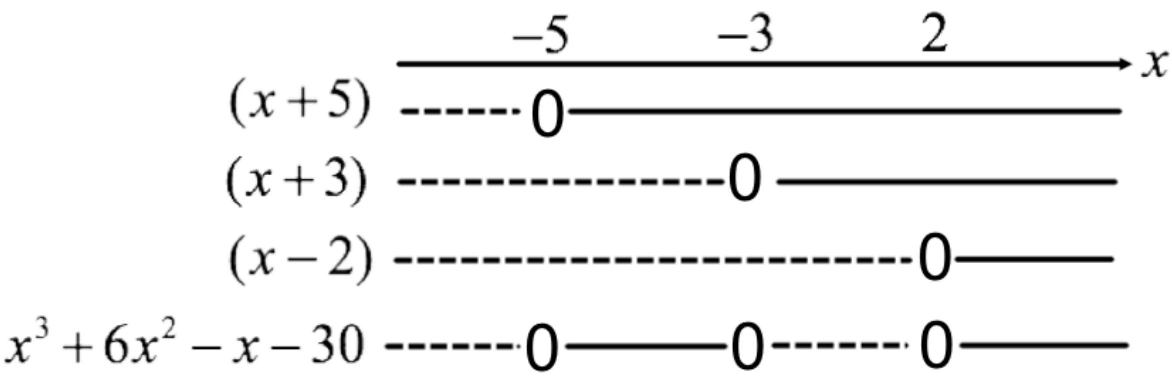
så

$$x^3+6x^2-x-30=\underline{\underline{(x-2)(x+3)(x+5)}}$$

c)

$$x^3+6x^2 \le x+30$$
$$x^3+6x^2-x-30 \le 0$$
$$(x-2)(x+3)(x+5) \le 0$$

Tegner fortegnslinjer:




$$\underline{\underline{x^3+6x^2 \le x+30 \text{ når } x \in \langle \leftarrow,-5] \cup [-3,2]}}$$

## Oppgave 4

a) $\overrightarrow{AB}=[2-(-2),-1-1]=\underline{\underline{[4,-2]}}$ og $\overrightarrow{BC}=[4-2,2-(-1)]=\underline{\underline{[2,3]}}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=[4,-2]\cdot[2,3]=4\cdot 2+(-2)\cdot 3=8-6=2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\neq 0$, så <u>vektorene er *ikke* ortogonale</u>.

c)

$\overrightarrow{AD} = [t-(-2), 3-1] = [t+2, 2]$

*og*

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = [4,-2] \cdot [t+2,2] = 4(t+2) + (-2) \cdot 2 = 4t + 8 - 4 = 4t + 4 = 4(t+1)$

*så*

$t = -1$ gir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\underline{\underline{\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ når } t = -1}}$

d) Firkanten *ABCD* er et trapes dersom $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ eller $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$.

*(Der som både* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$*, har vi et parallellogram, men alle parallellogrammer er også trapeser, så det er ikke noe problem).*

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ dersom det finnes et reelt tall *k*, slik at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CD} = [t-4, 3-2] = [t-4, 1]$ og $\overrightarrow{AB} = [4,-2] = -2[-2,1]$

Ser da at vi har $\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{CD}$ når $t = 2$

$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ dersom det finnes et reelt tall *s*, slik at $\overrightarrow{BC} = s \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = [t+2, 2]$ og $\overrightarrow{BC} = [2,3] = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{4}{3}, 2\right]$

Ser da at vi har $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$ når $t + 2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$

$$\underline{\underline{\text{Firkanten ABCD er trapes når } t = -\frac{2}{3} \vee t = 2}}$$

## Oppgave 5

a) $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 \cdot 10 = 350$

<u>Det er mulig å sette sammen 350 komiteer</u>

b) $P(\text{Både Anne og Jens blir med i komitten}) = P(\text{Anne blir med}) \cdot P(\text{Jens blir med}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{35}}}$

c)

$$P(\text{Kun én av dem bli med}) = 1 - P(\text{Begge blir med}) - P(\text{Ingen av dem blir med})$$

$$= 1 - \frac{6}{35} - \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{1}{0}}{\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}}$$

$$= 1 - \frac{6}{35} - \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot1\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot1}{350}$$

$$= 1 - \frac{6}{35} - \frac{20\cdot6}{350}$$

$$= 1 - \frac{6}{35} - \frac{12}{35}$$

$$= \frac{35-6-12}{35}$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{35}}}$$

## Oppgave 6

a) Areal av kvartsirkel: $\dfrac{\pi\cdot 2^2}{4} = \pi$

Sirkelen er gitt ved likningen $x^2 + y^2 = 2^2$. Dersom vi vil omforme denne slik at *y* er en funksjon av *x*, får vi

$$x^2 + y^2 = 2^2$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

Kvartsirkelen ligger kun over *x*-aksen, så bruker kun den positive verdien løsningen.
Siden punktet *B* ligger på sirkelperiferien til kvartsirkelen, er *y*-koordinaten til *B* gitt ved $y = \sqrt{4-x^2}$
Radius er 2 og kvartsirkelen ligger utelukkende i 1.kvadrant, så vi har også $0 \le x \le 2$

Rektangelet *OABC* har grunnlinje *x* og høyde $\sqrt{4-x^2}$, så arealet blir $x\cdot\sqrt{4-x^2}$.

Arealet *F* til det fargelagte området er lik differansen mellom arealet av kvartsirkelen og arealet av rektangelet *OABC*.

Da har vi $F(x) = \pi - x\sqrt{4-x^2}$ , $0 \le x \le 2$, <u>som skulle vises</u>

b)

$$F'(x) = 0 - \left(1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x)\right)$$

$$= -\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \sqrt{4-x^2}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{x^2 - 4 + x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2 - 4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$

Har da at $F'(x) = 0$ når $x = \pm\sqrt{2}$, men det er kun den positive løsningen som ligger innenfor definisjonsområdet til *F*. Vi kan også se av uttrykket for $F'(x)$ at den deriverte får fra å være negativ til å være positiv når *x* vokser og passerer $\sqrt{2}$. Punktet $\left(\sqrt{2}, F\left(\sqrt{2}\right)\right)$ er altså et *bunnpunkt* på grafen til *F*.

$$F\left(\sqrt{2}\right) = \pi - \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \pi - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \pi - 2$$

$$\underline{\underline{\text{Det minste arealet det fargelagte området kan ha er } \pi - 2}}$$

## Oppgave 7

a) Om vi trekker et linjestykke fra punktet *B* til punktet *D*, vil dette linjestykke være hypotenusen både i den rettvinklede trekanten *DBE* den rettvinklede trekanten *DCB.* Siden både korteste katet, som tilsvarer radius i halvsirkelen, og hypotenusen *DB* er lik i de to trekantene, må også den lengste kateten være lik. Det betyr at $BC = BE$, og vi kan si at $\Delta CEB$ er likebeint.

$BC = BE = a$ og $BA = c$, har vi $EA = BA - BE = c - a$, <u>som skulle vises</u>

b) $\Delta ABC$ og $\Delta ADE$ er begge rettvinklede og har i tillegg felles vinkel i *A*. Da må samsvarende vinkler være parvis like store i de to trekantene, som igjen betyr at $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Formlikheten gir at

$\frac{DE}{BC} = \frac{EA}{AC} \Leftrightarrow DE = \frac{EA}{AC} \cdot BC \Leftrightarrow r = \frac{(c-a)}{b} \cdot a = \frac{a \cdot (c-a)}{b}$, <u>som skulle vises</u>

c) Arealet av $\Delta BFA$ kan regnes ut ved å bruke være grunnlinje $BF$ og høyde $AC$.

Da er arealet av $\Delta BFA$ gitt ved $\frac{2a \cdot b}{2} = a \cdot b$

Arealet av $\Delta BFA$ kan også regnes ut ved å summere arealene til de trekantene den er delt inn i. Det er to trekanter med grunnlinje *c* og høyde *r* og én trekant med grunnlinje $2a$ og høyde *r*.

Da er arealet av $\Delta BFA$ gitt ved $2 \cdot \frac{c \cdot r}{2} + \frac{2a \cdot r}{2} = c \cdot r + a \cdot r = (a+c) \cdot r$

Vi ser at arealet av $\Delta BFA$ er kan uttrykkes både som $a \cdot b$ og som $(a+c) \cdot r$, altså har vi $a \cdot b = (a+c) \cdot r$, <u>som skulle vises</u>

d)

$$a \cdot b = (a+c) \cdot r$$

$$a \cdot b = (a+c) \cdot \frac{a \cdot (c-a)}{b}$$

$$a \cdot b = \frac{a \cdot (c-a)(c+a)}{b}$$

$$a \cdot b^2 = a \cdot \left(c^2 - a^2\right)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Har ved hjelp av resultatene fra b) og c) bevist Pythagoras´ setning.

# Del 2

## Oppgave 1

a) Bestemmer sannsynligheten for at en tilfeldig e-post *ikke inneholder noen ord* fra listen. Her bruker vi setningen om total sannsynlighet.

$$P\left(\text{Ingen ord fra listen}\right)=0,8\cdot 0,15+0,2\cdot 0,97=0,314$$

Da kan vi bestemme sannsynligheten for at en tilfeldig e-post inneholder minst ett ord fra listen.

$$P\left(\text{Ett eller flere ord fra listen}\right)=1-0,314=0,686=\underline{\underline{68,6\%}}$$

b) Bayes´ setning gir

$$\frac{0,8\cdot 0,85}{0,686}=0,991=99,1\%$$

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig e-post er søppelpost, når den inneholder ett eller flere ord fra listen, er 99,1%</u>

c) Bayes´ setning gir

$$\frac{0,8\cdot 0,15}{0,314}=0,382=38,2\%$$

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig e-post er søppelpost, selv om den ikke inneholder noen ord fra listen, er 38,2 %</u>

## Oppgave 2

a) For at grafen til *f* skal ha både et toppunkt og et bunnpunkt, må den deriverte av *f* ha to nullpunkter.

$$f'(x)=-3x^2+2x+k$$

Bestemmer nullpunktene til den deriverte.

$$f'(x)=0$$

$$-3x^2+2x+k=0$$

$$\text{gir}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12k}}{-6}$$

For at den deriverte skal ha to nullpunkter må vi ha

$$4+12k>0$$

$$12k>-4$$

$$k>-\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har både et toppunkt og et bunnpunkt når } k>-\frac{1}{3}}}$$

b)

$$f'(2)=0$$
$$-3\cdot 2^2+2\cdot 2+k=0$$
$$-12+4+k=0$$
$$k=12-4$$
$$k=8$$

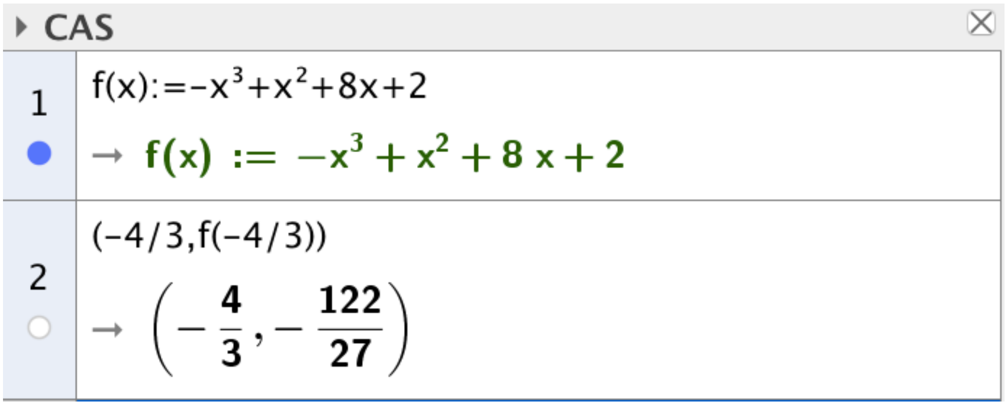
$f''(2)=-6\cdot 2+2=-10$ så $\left(2,f(2)\right)$ er toppunkt.

$k=8$ gir $f'(x)=-3x^2+2x+8$

$$f'(x)=0$$
$$-3x^2+2x+8=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{-6}=\frac{-2\pm 10}{-6}=\frac{1\mp 5}{3}$$

Vet allerede at $x=2$ er nullpunktet til den deriverte som gir toppunkt på grafen til *f*, så bunnpunktet har koordinater $\left(-\frac{4}{3},f\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

Bruker CAS til å bestemme koordinatene eksakt.




Grafen til $f$ har toppunkt i $\left(2,f(2)\right)$ når $k=8$. Bunnpunktet har da koordinater $\left(-\frac{4}{3},-\frac{122}{27}\right)$

c)

$$f''(x) = -6x + 2$$

$$så$$

$$f''(x) = 0$$

$$gir$$

$$-6x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | f(x):=-x^3+x^2+k*x+2<br>$\rightarrow\ \mathbf{f(x)\ :=\ -x^3 + k\,x + x^2 + 2}$ |
| 2 | (1/3,f(1/3))<br>$\rightarrow\ \left(\mathbf{\frac{1}{3}, \frac{9\,k + 56}{27}}\right)$ |

Linje 2 i bildet over viser koordinatene til vendepunktet.

Vi vet at den momentane vekstfarten er størst når $x = \frac{1}{3}$. Dersom vekstfarten da skal være 2, har vi $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2$.

| | |
|---|---|
| 3 | Løs(f'(1/3)=2, k)<br>$\rightarrow\ \left\{\mathbf{k = \frac{5}{3}}\right\}$ |

$$\underline{\underline{\text{Vendepunktet på grafen til } f,\ \text{uttrykt ved } k,\ \text{er } \left(\frac{1}{3}, \frac{9k+56}{27}\right).\ \text{Største momentane vekstfart er 2 når } k = \frac{5}{3}}}$$

## Oppgave 3

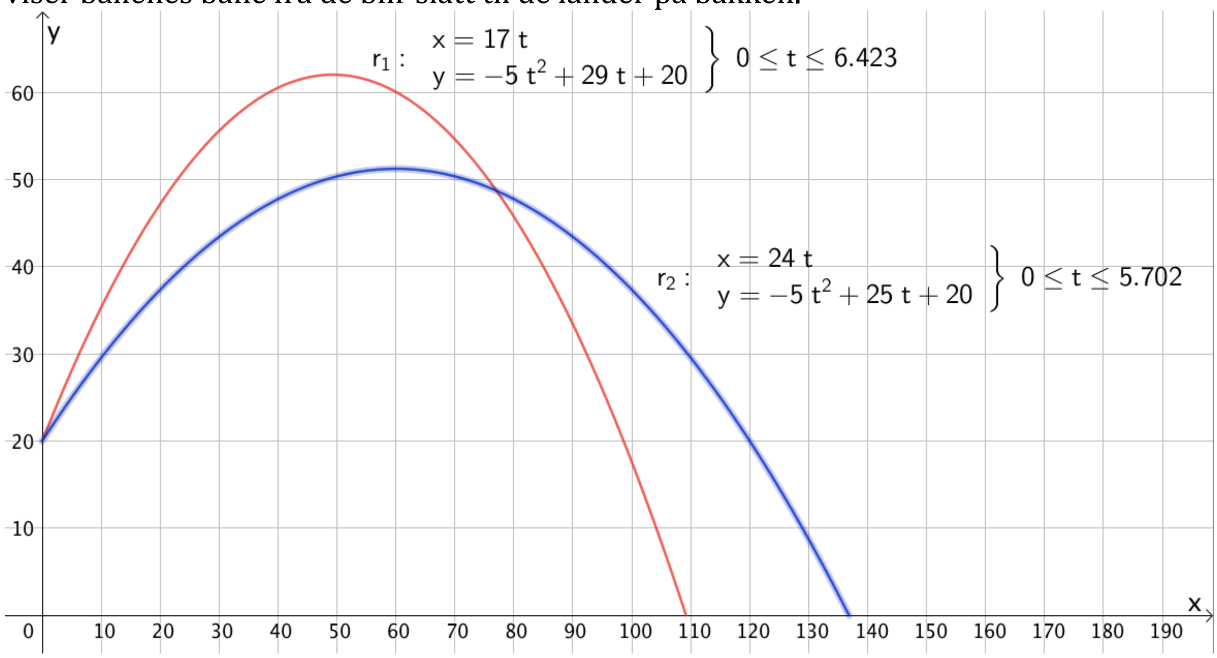
a) Når golfballene ligger på bakken, er $y$-komponenten til retningsvektoren 0.

| CAS | |
|---|---|
| 1 | r_1(t):=Vektor(17t,-5t²+29t+20) <br> $\rightarrow\ r_1(t) := \begin{pmatrix} 17\,t \\ -5\,t^2 + 29\,t + 20 \end{pmatrix}$ |
| 2 | y(r_1(t))=0 <br> Løs: $\left\{ t = \frac{-\sqrt{1241} + 29}{10}, t = \frac{\sqrt{1241} + 29}{10} \right\}$ |
| 3 | {t = (-sqrt(1241) + 29) / 10, t = (sqrt(1241) + 29) / 10} <br> $\approx\ \{t = -0.623, t = 6.423\}$ |
| 4 | r_2(t):=Vektor(24t,-5 t² + 25t + 20) <br> $\rightarrow\ r_2(t) := \begin{pmatrix} 24\,t \\ -5\,t^2 + 25\,t + 20 \end{pmatrix}$ |
| 5 | y(r_2(t))=0 <br> Løs: $\left\{ t = \frac{-\sqrt{41} + 5}{2}, t = \frac{\sqrt{41} + 5}{2} \right\}$ |
| 6 | {t = (-sqrt(41) + 5) / 2, t = (sqrt(41) + 5) / 2} <br> $\approx\ \{t = -0.702, t = 5.702\}$ |

De tre øverste radene omhandler ball 1, mens de tre neste omhandler ball 2.

<u>Ball 1 treffer bakken etter 6,4 sekunder og ball 2 treffer bakken etter 5,7 sekunder.</u>

b) Bruker kommandoen *" Kurve( <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt> )"* og tegner grafene i GeoGebra. Velger $t$-verdier slik at grafene viser ballenes bane fra de blir slått til de lander på bakken.



c)

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | r_1(t):=Vektor(17t,−5t²+29t+20)<br>$\rightarrow \mathbf{r_1(t)} := \begin{pmatrix} 17\,t \\ -5\,t^2 + 29\,t + 20 \end{pmatrix}$ |
| 2 | r_2(t):=Vektor(24t,−5t²+25t+20)<br>$\rightarrow \mathbf{r_2(t)} := \begin{pmatrix} 24\,t \\ -5\,t^2 + 25\,t + 20 \end{pmatrix}$ |
| 3 | abs(r_1'(0))<br>$\approx$ **33.6** |
| 4 | abs(r_2'(0))<br>$\approx$ **34.7** |

I linje 3 og 4 regner vi ut lengden til fartsvektorene til henholdsvis ball 1 og ball 2 når $t = 0$.

<u>Ball 1 har banefart på 33,6 m/s idet den forlater taket, mens ball 2 har en banefart på 34,7 m/s idet den forlater taket.</u>

d) Når golfballene har samme fartsretning, vil forholdet mellom *y*-komponenten og *x*-komponenten til fartsvektorene være likt.

| | |
|---|---|
| 3 | v_1(t):=r_1'(t)<br>$\rightarrow \mathbf{v_1(t)} := \begin{pmatrix} 17 \\ -10\,t + 29 \end{pmatrix}$ |
| 4 | v_2(t):=r_2'(t)<br>$\rightarrow \mathbf{v_2(t)} := \begin{pmatrix} 24 \\ -10\,t + 25 \end{pmatrix}$ |
| 5 | y(v_1)/x(v_1)=y(v_2)/x(v_2)<br>Løs: $\left\{ t = \frac{271}{70} \right\}$ |
| 6 | {t = 271 / 70}<br>$\approx$ $\{t = 3.9\}$ |

Golfballene har altså samme fartsretning 3,9 sekunder etter utslaget fra taket.

For å bestemme vinkelen fartsvektorene til golfballene danner med *x*-aksen på dette tidspunktet, setter jeg inn $\frac{271}{70}$ for $t$ i *y*-komponenten til $\vec{v_1}(t)$.

Forholdet mellom $y$-komponenten og $x$-komponenten vil da tilsvare $\tan u$, der $u$ er vinkelen mellom fartsvektoren til ball 1 og $x$-aksen ved det gitte tidspunktet.

| | |
|---|---|
| 6 | v_1(271/70)<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ -\frac{68}{7} \end{pmatrix}$ |
| 7 | arctan((-68/7)/17)/°<br>$\approx\ -29.7$ |

<u>Golfballene har samme fartsretning 3,9 sekunder etter utslaget. Fartsvektorene danner da vinkel på -29,7° med *x*-aksen.</u>

## Oppgave 4

a)

| CAS | |
|---|---|
| 1 | f(x):=x²/(4*p)<br>$\rightarrow\ f(x) := \frac{x^2}{4\,p}$ |
| 2 | Q:=(q,f(q))<br>$\rightarrow\ Q := \left(q, \frac{q^2}{4\,p}\right)$ |
| 3 | P:=(0,p)<br>$\rightarrow\ P := (0, p)$ |
| 4 | l:=Linje(P, Q)<br>$\rightarrow\ \ell:\ y = x\,\frac{-4\,p^2 + q^2}{4\,p\,q} + p$ |
| 5 | Skjæring(f, l)<br>$\rightarrow \left\{\left(q, \frac{q^2}{4\,p}\right), \left(-4\cdot\frac{p^2}{q}, 4\cdot\frac{p^3}{q^2}\right)\right\}$ |

Definerer funksjonen $f$ og punktene $P$ og $Q$ i CAS. Da kan jeg også definere $\ell$ som linja gjennom $P$ og $Q$.
I rad 5 i bildet over bestemmes skjæringspunktene mellom $\ell$ og grafen til $f$. Vi ser at det ene skjæringspunktet er punktet $Q$, så det andre må være punktet $R$.

$x$-koordinaten til punktet $R$ er $-\dfrac{4p^2}{q}$, <u>som skulle vises</u>

b)

| | |
|---|---|
| 6 | R:=(−4p²/q,4p³/q²) <br> $\rightarrow\ \mathbf{R} := \left(-4 \cdot \frac{p^2}{q}, 4 \cdot \frac{p^3}{q^2}\right)$ |
| 7 | Tangent(Q, f) <br> $\rightarrow\ y = \frac{-q^2 + 2\,q\,x}{4\,p}$ |
| 8 | Tangent(R, f) <br> $\rightarrow\ y = \frac{-4\,p^3 - 2\,p\,q\,x}{q^2}$ |

Ser at stigningstallet til tangenten i $Q$ er $\dfrac{q}{2p}$ og

stigningstallet til tangenten i $R$ er $\dfrac{-2p}{q}$.

Dersom produktet av stigningstallene til to linjer er lik -1, vet vi at linjene står normalt på hverandre.

| | |
|---|---|
| 9 | (q/(2*p))*((-2*p)/q) <br> $\rightarrow\ -1$ |

Tangentene i $Q$ og $R$ står normalt på hverandre, som skulle vises.

*Alternativ løsning (dersom en ikke kjenner sammenhengen mellom produkt av stigningstall og ortogonalitet):*

Stigningstallene til tangentene gir at $\vec{r} = \left[1, \dfrac{q}{2p}\right]$ er en retningsvektor for tangenten i $Q$ og $\vec{s} = \left[1, \dfrac{-2p}{q}\right]$ er en retningsvektor for tangenten i $R$.

$\vec{r} \perp \vec{s}$ dersom $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0$.

| | |
|---|---|
| 10 | r:=Vektor(1,q/(2p)) <br> $\rightarrow\ r := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q}{2p} \end{pmatrix}$ |
| 11 | s:=Vektor(1,-2p/q) <br> $\rightarrow\ s := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \cdot \frac{p}{q} \end{pmatrix}$ |
| 12 | r*s <br> $\rightarrow\ 0$ |

Som gir samme konklusjon som over.