# Løsningsforslag eksamen S2 våren 2020

## Del 1

### Oppgave 1

a) $f(x)=x^3+3e^x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{3x^2+3e^x}}$

b)

$$g(x)=\frac{\ln(2x)}{x^2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot x^2-\ln(2x)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x-2x\cdot\ln(2x)}{x^4}=\underline{\underline{\frac{1-2\ln(2x)}{x^3}}}$$

### Oppgave 2

$I.\quad 6x-y+3z=12$

$II.\quad 5x+3y+z=11$

$III.\quad 3x+2y+z=10$

Bruker eliminasjon.
Trekker likning *III* fra likning *II* én gang, og fra likning *I* tre ganger.
Da får jeg eliminert *z* og sitter igjen med følgende likningssett:

$IV.\quad 2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x$

$V.\quad -3x-7y=-18$

Setter *IV* inn i *V*:

$$V.\quad -3x-7(1-2x)=-18$$
$$-3x-7+14x=-18$$
$$11x=-11$$
$$x=-1$$

Dette gir $y=1-2(-1)=1+2=3$.

Setter $x=-1$ og $y=3$ inn i likning *III*:

$$3(-1)+2\cdot 3+z=10$$
$$-3+6+z=10$$
$$z=10+3-6$$
$$z=7$$
$$\underline{\underline{x=-1 \wedge y=3 \wedge z=7}}$$

## Oppgave 3

a) Vi har $a_1=-8$ og $d=5$. Bruker dette til å finne ut hvor mange ledd det er i rekka.

$$a_n=987$$
$$a_1+(n-1)d=987$$
$$-8+(n-1)5=987$$
$$-8+5n-5=987$$
$$5n=987+13$$
$$5n=1000$$
$$n=200$$

Det er altså 200 ledd i rekka.

$$S_{200}=\frac{-8+987}{2}\cdot 200=979\cdot 100=97900$$

<u>Summen av den aritmetiske rekka er 97 900</u>

b)

$$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-20}{80}=-\frac{1}{4}.$$

Vi har altså $-1<k<1$, så rekka konvergerer.

$$S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{80}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{80}{\frac{5}{4}}=\frac{320}{5}=64$$

<u>Summen av den uendelige, geometriske rekka er 64</u>

## Oppgave 4

$P(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

a) Dersom $P(1) = 0$ er $(x-1)$ faktor i $P(x)$.
$P(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 7 = 1 - 9 + 15 - 7 = 0$, så $P(x)$ er delelig med $(x-1)$, som skulle grunngis

b) Utfører divisjonen $P(x):(x-1)$:

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 9x^2 + 15x - 7 : (x-1) = x^2 - 8x + 7 \\
&\underline{x^3 - x^2} \\
&\quad -8x^2 + 15x - 7 \\
&\quad \underline{-8x^2 + 8x} \\
&\qquad\qquad 7x - 7 \\
&\qquad\qquad \underline{7x - 7} \\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

Da har vi $P(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 7) = (x-1)(x-1)(x-7) = (x-7)(x-1)^2$

Her brukte jeg "sum og produkt" for å faktorisere andregradspolynomet over, men man kan jo også bruke abc-formelen hvis man er mer komfortabel med det.

$(x-1)^2 \geq 0$ for alle $x$, mens $(x-7) \geq 0$ når $x \geq 7$.

Det betyr at $\underline{\underline{P(x) \geq 0 \text{ når } x = 1 \text{ eller } x \geq 7}}$

Her kan man alternativt tegne fortegnslinjer, som viser dette tydelig.

c) Her ser jeg at telleren er et fullstendig kvadrat og at nevneren tilsvarer $P(x)$. Da er det bare å faktorisere og forkorte.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 9x^2 + 15x - 7} = \frac{(x-1)^2}{(x-7)(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{x-7}}}$$

Hvis man ikke ser at telleren er fullstendig kvadrat, kan man for eksempel bruke abc-formelen når man faktoriserer den.

## Oppgave 5

$f(x)=(x-1)^2\cdot(x-7)$

a) Ser at $f(x)$ tilsvarer $P(x)$ fra oppgave 4, men er skrevet på faktorisert form. Det kan være enklere å derivere når funksjonsuttrykket ikke står på faktorisert form.

$$f(x)=(x-1)^2\cdot(x-7)=x^3-9x^2+15x-7$$

så

$$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x^2-6x+5)=3(x-5)(x-1)$$

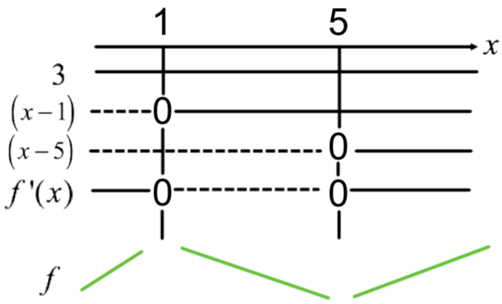
Nå kan vi tegne fortegnslinjen til den deriverte.

Siden det kanskje ikke er så lett å "kjenne" igjen uttrykket fra oppgave 4, eller at man ikke tenker over at man kan skrive uttrykket på ikke-faktorisert form for å gjøre derivasjonen enklere, viser jeg også derivasjonen av uttrykket slik det er oppgitt i oppgaveteksten. I en besvarelse vil det selvsagt være tilstrekkelig å gjøre én av delene.

$$f(x)=(x-1)^2\cdot(x-7)$$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2(x-1)(x-7)+(x-1)^2\cdot 1\\
&=2(x^2-7x-x+7)+x^2-2x+1\\
&=2x^2-16x+14+x^2-2x+1\\
&=3x^2-18x+15\\
&=3(x^2-6x+5)\\
&=3(x-5)(x-1)
\end{aligned}$$

Tegner fortegnslinjer:

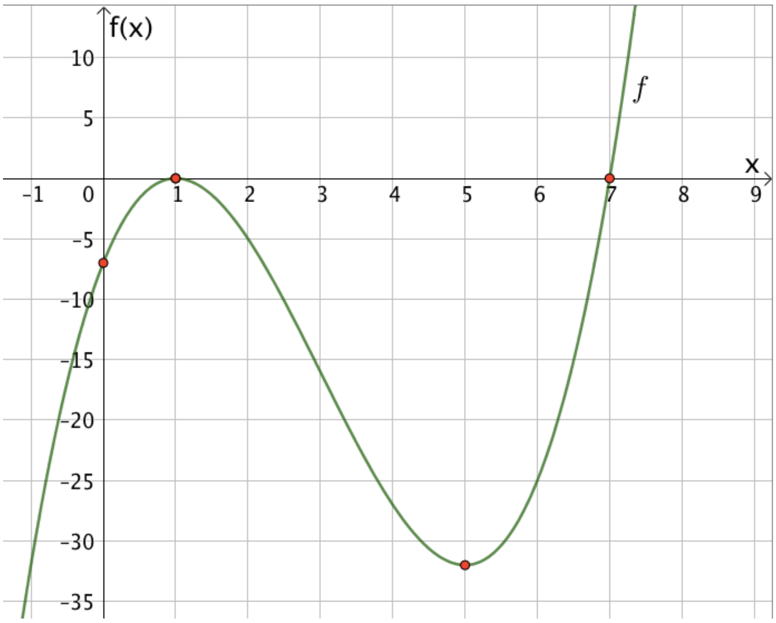



$f(5)=(5-1)^2(5-7)=4^2(-2)=16(-2)=-32$, så grafen til $f$ har et bunnpunkt i $(5,-32)$, <u>som skulle vises.</u>

I tillegg har grafen til $f$ et toppunkt i $(1, f(1))=(1,0)$.

b) Når jeg nå skal tegne skisse, markerer jeg topp- og bunnpunktene og nullpunktene i et koordinatsystem. I tillegg vet jeg at grafen krysser $y$-aksen i $(0,-7)$, siden konstantleddet er -7.

Når jeg har markert de aktuelle punktene, tegner jeg en jevn kurve gjennom disse:




c) $g(x) = -0{,}10 \cdot f(x)$

Den deriverte av $g(x)$ vil ha de samme nullpunktene som den deriverte av $f(x)$. Når vi multipliserer $f(x)$ med -0,10, som er en negativ faktor, vil også fortegnet til den deriverte endres. Det betyr at grafen til $g$ vil ha *toppunkt* i $(5, g(5)) = (5\ ,\ 3{,}2)$.

<u>Vannstanden var på sitt høyeste 5 dager etter at flommen startet. Da var vannstanden 3,2 meter.</u>

d) Vendepunktet på grafen til $g$ vil ha samme $x$-koordinat som vendepunktet på grafen til $f$, og ligger midt mellom ekstremalpunktene.
Det betyr at grafen til $g$ har vendepunkt i $(3, g(3))$.
For å finne hvor rask økningen er, må jeg bruke den deriverte.
$g'(3) = -0{,}10 \cdot f'(3) = -0{,}10 \cdot 3(3-1)(3-5) = -0{,}10 \cdot 3 \cdot 2(-2) = 1{,}2$

<u>Vannstanden økte raskest etter 3 dager. Da økte den med 1,2 meter per dag</u>

## Oppgave 6

a) $K'(100)$ tilsvarer stigningstallet til tangenten på figuren. Denne tangenten går gjennom punktene $(0,700)$ og $(20,800)$.

$$\frac{800-700}{20-0}=\frac{100}{20}=5 \text{ og } E(100)=\frac{K(100)}{100}=\frac{1200}{100}=12$$

$$\underline{\underline{K(100)=5 \text{ og } E(100)=12}}$$

b)

$$\begin{aligned}
E'(x)&=\frac{K'(x)\cdot x-K(x)\cdot 1}{x^2}\\
&=\frac{K'(x)\cdot x}{x^2}-\frac{K(x)}{x^2}\\
&=\frac{K'(x)}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{K(x)}{x}\\
&=\frac{K'(x)}{x}-\frac{1}{x}\cdot E(x)\\
&=\frac{K'(x)}{x}-\frac{E(x)}{x}\\
&=\frac{K'(x)-E(x)}{x}
\end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>

c) $$E'(100)=\frac{K'(100)-E(100)}{100}=\frac{5-12}{100}=\frac{-7}{100}=\underline{\underline{-0,07}}$$

Svaret forteller oss at enhetskostnaden synker med 0,07 kroner, altså 7 øre, når produksjonen øker fra 100 til 101 enheter.

## Oppgave 7

a) $$E\left(X\right)=n\cdot p=100\cdot 0,2=\underline{\underline{20}}$$

og

$$Var\left(X\right)=n\cdot p\cdot(1-p)=100\cdot 0,2\cdot 0,8=20\cdot 0,8=\underline{\underline{16}}$$ , <u>som skulle vises</u>

b)

$$\sigma=\sqrt{Var\left(X\right)}=\sqrt{16}=4$$

*så*

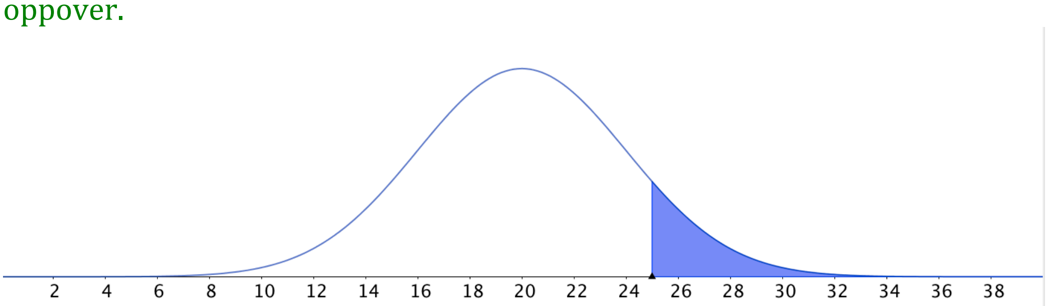
$$P\left(X\geq 25\right)=P\left(Z\geq\frac{25-20}{4}\right)=P\left(Z\geq 1,25\right)=P\left(Z\leq -1,25\right)$$

Bruker tabellen for standard normalfordeling, og finner at

$$P\left(X\geq 25\right)=P\left(Z\leq -1,25\right)=0,1056=10,56\%$$

<u>Sannsynligheten er 10,56 % for at det 25 eller flere gule drops i en pose</u>

c) Jeg tegner digitalt av praktiske årsaker, men her handler det om å tegne en normalfordelingskurve som er symmetrisk om forventningsverdien, og skravere det aktuelle området under denne kurven. I vårt tilfelle, skal vi skravere fra 25 og oppover.




d) Vi skal her "kutte" 5 % i begge ender, slik at vi sitter igjen med en sannsynlighet på 90 % for at antall gule drops ligger i intervallet $[20-a, 20+a]$.

Det betyr at vi må ha $P(X \leq 20-a) = 0,05$.

Vi finner den verdien som er nærmest 0,05 i tabellen over standard normalfordeling. Finner 0,0505 og 0,0495 som svarer til henholdsvis $P(Z \leq -1,64)$ og $P(Z \leq -1,65)$. Siden 0,05 ligger midt mellom 0,0505 og 0,0495, sier vi at vi må ha $P(Z \leq -1,645) = 0,05$, slik at

$$\frac{(20-a)-20}{4} = -1,645$$

$$-\frac{a}{4} = -1,645$$

$$\underline{\underline{a = 6,58}}$$

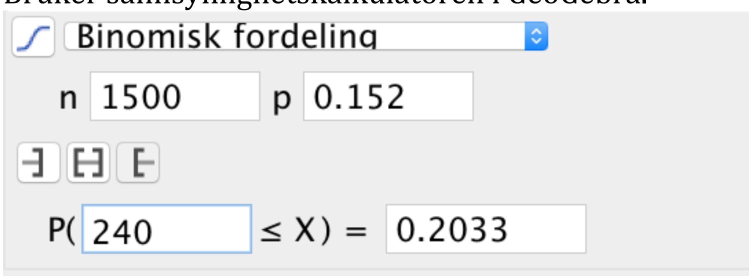
Dette gir $[20-a, 20+a] = [13,42 \;,\; 26,58]$, som i denne sammenhengen betyr at det er 90 % sannsynlig at en tilfeldig pose inneholder mellom 13,42 og 26,58 gule drops.

(Kunne rundet av til hele drops, men kan også se på det som et snitt over tid)

# Del 2

## Oppgave 1

a) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.




$$P(X \geq 240) = \underline{\underline{0,2033 = 20,33\%}}$$

b) Nullhypotese

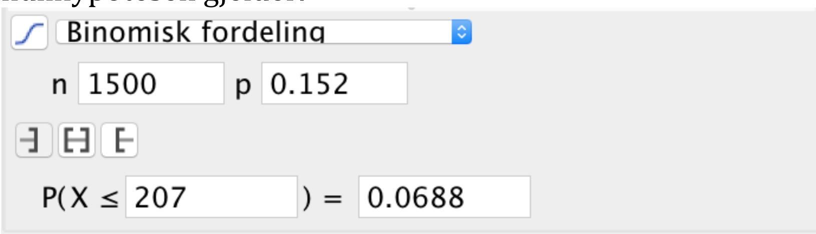
$H_0 : p = 0{,}152$

Alternativ hypotese

$H : p < 0{,}152$

c) $1500 \cdot 0{,}138 = 207$, så 207 av de spurte stemte FrP.

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å regne ut sannsynligheten for at maksimalt 207 personer av 1500 spurte stemte FrP, dersom vi antar at nullhypotesen gjelder.

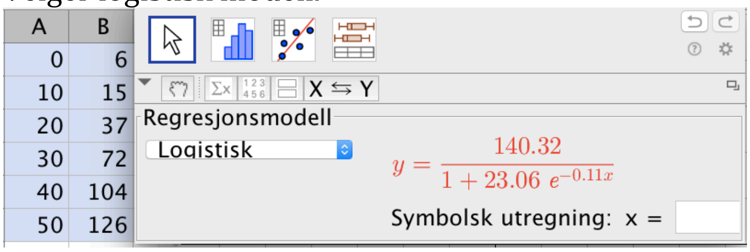



Vi ser at sannsynligheten er større enn 5 %, så vi kan ikke forkaste nullhypotesen.

Det er *ikke* grunnlag for å si at Fremskrittspartiet har fått mindre oppslutning.

## Oppgave 2

a) Legger verdiene inn i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonsanalyse. Velger logistisk modell.




$$g(t) = \frac{140}{1 + 23e^{-0{,}11t}}$$

er en modell for antall rotter i parken $t$ dager etter 31.mai 2019.

b) Vi ser at $f$ er en logistisk modell på formen $f(t) = \frac{C}{1 + a \cdot e^{-bt}}$.

Da vet vi at funksjonen har verdien $\frac{C}{2}$ i vendepunktet.

**CAS**

| | |
|---|---|
| 1 | f(t):=120/(1+19* $e$ ^(-0.12t)) <br> $\rightarrow$ $f(t) := \dfrac{120}{19\,e^{-\frac{3}{25}t}+1}$ |
| 2 | f=120/2 <br> Løs: $\left\{t = \dfrac{25}{3}\ln(19)\right\}$ |
| 3 | {t = 25 / 3 ln(19)} <br> $\approx$ $\{t = 24.54\}$ |
| 4 | f'(25 / 3 ln(19)) <br> $\approx$ $3.6$ |

I linje 2 og 3 finner jeg ut *når* rottebestanden vokste raskest, mens jeg i linje 4 avgjør hvor raskt den vokste på dette tidspunktet.

<u>Bestanden vokste raskest 24,5 dager etter 31.mai 2018, altså den 24.juni 2018. Da vokste bestanden med 3,6 individer per dag.</u>

c) Skal nå ha en modell *h* på formen $h(t) = \dfrac{C}{1 + a\cdot e^{-b\cdot t}}$.
Informasjonen i oppgaveteksten forteller at $C = 200$.
Videre vet vi at $h(0) = 20$. Finner verdien til *a* ved hjelp av CAS:

**CAS**

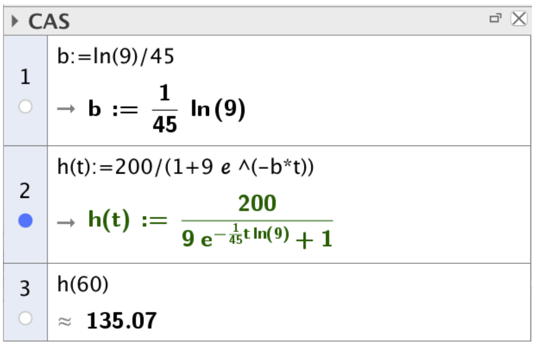
| | |
|---|---|
| 1 | 200/(1+a* $e$ ^0)=20 <br> $\checkmark$ $\dfrac{200}{1 + a\,e^{0}} = 20$ |
| 2 | 200 / (1 + a $e^0$) = 20 <br> Løs: $\{a = 9\}$ |

Da mangler jeg kun *b*, som jeg finner ved å løse $h''(45) = 0$
(15 juli er 45 dager etter 31.mai).

**CAS**

| | |
|---|---|
| 1 | h(t):=200/(1+9 $e$ ^(-b*t)) <br> $\rightarrow$ $h(t) := \dfrac{200}{9\,e^{-bt}+1}$ |
| 2 | h''(45)=0 <br> Løs: $\left\{b = 0, b = \dfrac{1}{45}\ln(9)\right\}$ |

Setter inn verdien for *b* i modellen min og regner ut $h(60)$, siden 30.juli er 60 dager etter 31.mai.

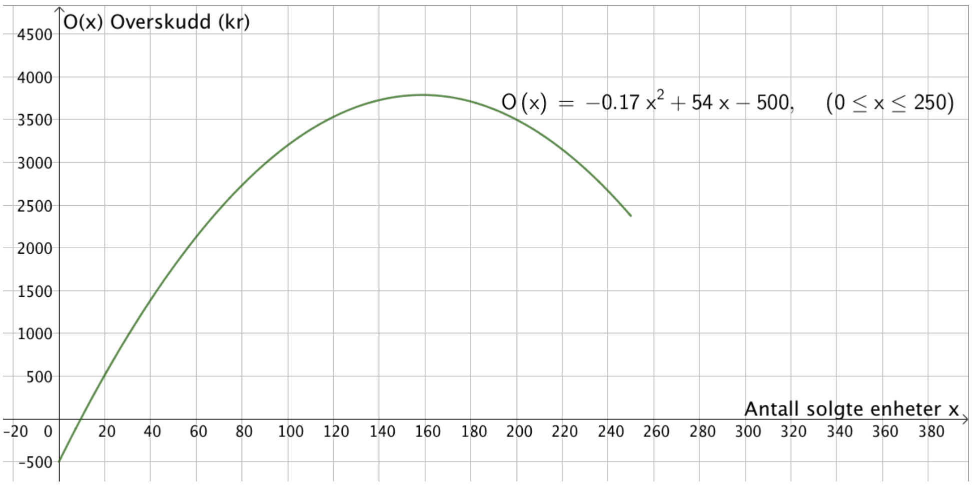



<u>I følge de gitte antagelsene, er det 135 rotter i den andre parken den 30.juli 2019</u>

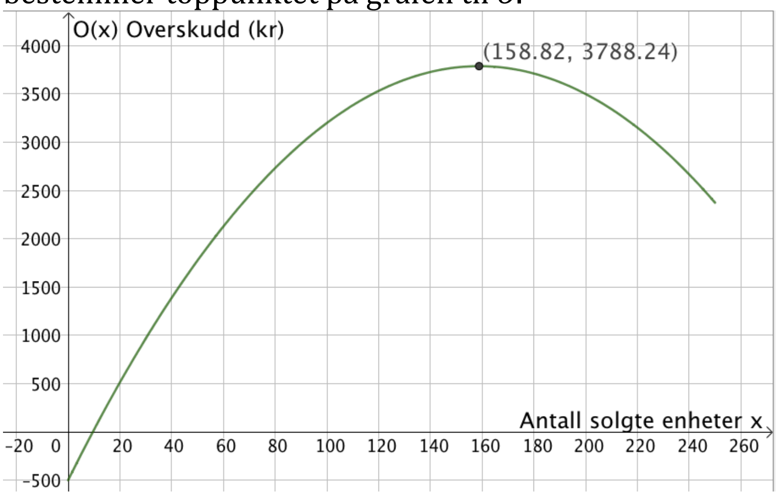
## Oppgave 3

a) $O(x) = I(x) - K(x) = -0{,}14x^2 + 74x - \left(0{,}03x^2 + 20x + 500\right) = -0{,}17x^2 + 54x - 500$

Tegner grafen til *O* for $0 \le x \le 250$




b) Bruker kommandoen *" Ekstremalpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt> )"* og bestemmer toppunktet på grafen til *O*.




Bedriften må produsere og selge 159 enheter per dag for å få størst mulig overskudd. Da vil overskuddet være på 3788 kroner.

c)

| CAS | |
|---|---|
| 1 | p(x):=a*x+b<br>→ $p(x) := a\,x + b$ |
| 2 | K(x):=0.03x²+20x+500<br>≈ $K(x) := 0.03\,x^2 + 20\,x + 500$ |
| 3 | I(x):=x*p<br>≈ $I(x) := a\,x^2 + b\,x$ |
| 4 | O(x):=I−K<br>≈ $O(x) := a\,x^2 + b\,x - 0.03\,x^2 - 20\,x - 500$ |
| 5 | O'(175)=0<br>≈ $350\,a + 1\,b - 30.5 = 0$ |
| 6 | O(175)=5625<br>≈ $30625\,a + 175\,b - 4918.75 = 5625$ |
| 7 | {$5, $6}<br>Løs: $\left\{\left\{a = -\frac{17}{100}, b = 90\right\}\right\}$ |

I de fire øverste linjene defineres de ulike funksjonene, mens linje 5 og 6 utgjør likningssettet som kan settes opp ut fra kriteriene i oppgaveteksten.
I linje 7 løses likningssettet.

$$\underline{\underline{a = -0{,}17 \text{ og } b = 90}}$$

Siden $a$ er negativ, vet vi at grafen til $O$ er en parabel som vender hul side ned, og dermed har toppunkt.
(Kan være verdt å nevne siden dette ikke vises eksplisitt i beregningen over).

## Oppgave 4

a) Bestemmer først det årlige terminbeløpet, før dette multipliseres med 30.

| CAS | |
|---|---|
| 1 | x/1.027*((1/1.027)³⁰−1)/((1/1.027)−1)=2500000<br>✓ $\frac{x}{1.027} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.027}\right)^{30} - 1}{\frac{1}{1.027} - 1} = 2500000$ |
| 2 | x / 1.027 ((1 / 1.027)³⁰ − 1) / (1 / 1.027 − 1) = 2500000<br>NLøs: $\{x = 122652.014\}$ |
| 3 | 30HøyreSide($2)<br>≈ $\{3679560.418\}$ |

<u>Caroline må betale 3 679 560 kroner til banken i løpet av hele låneperioden</u>

b) Bestemmer nåverdien av de 10 første innbetalte terminbeløpene.

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | 122652/1.027*((1/1.027)^10−1)/((1/1.027)−1) |
| | ✓ $\frac{122652}{1.027} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.027}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{1.027} - 1}$ |
| 2 | 122652 / 1.027 ((1 / 1.027)^10 − 1) / (1 / 1.027 − 1) |
| | ≈ **1062448.784** |

Det betyr at nåverdien av restlånet etter 10 terminer er på $2500000kr - 1062449kr = 1437551kr$.

Finner verdien til restlånet etter 10.terminer.

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | 1437551*1.027^10 |
| | ≈ **1876409.82** |

Dette beløpet skal fordeles på 20 like store avdrag.

| | |
|---|---|
| 2 | 1876409.819814/20 |
| | ≈ **93820.491** |

De årlige avdragene blir på 93 820 kroner, som skulle vises.

c) For et serielån beregnes rentene hver termin ut fra det til enhver tid gjeldende restlånet. Siden restlånet reduseres tilsvarende størrelsen på avdraget hver termin, vil rentene avta med 2,7 % av avdraget hver termin. Siden avdragene er like store hver termin, vil også rentene avta med en fast verdi hver termin. Summen av rentene de neste 20 terminene danner da en aritmetisk rekke med 20 ledd, der $a_1 = 1876410 \cdot 0,027$ og $d = -93820 \cdot 0,027$.

Bruker CAS til å bestemme $a_{20}$ , samt summen av rentene de 20 terminene.

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | a_1:=1876410*0.027 |
| | ≈ **$a_1$ := 50663.07** |
| 2 | d:=−93820*0.027 |
| | ≈ **d := −2533.14** |
| 3 | a20:=a_1+(20−1)*d |
| | ≈ **a20 := 2533.41** |
| 4 | (a_1 + a20) / 2 (20) |
| | ≈ **531964.8** |

Til slutt legger jeg rentene til summen av avdragene

| | |
|---|---|
| 5 | 20*93820+531964.8 |
| | ≈ **2408364.8** |

Summen av de 20 terminbeløpene er 2 408 365 kroner

Den siste deloppgaven kan alternativt løses enkelt og greit ved å bruke regneark. Her er en alternativ løsning hvor jeg bruker Excel:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Termin | Restlån | Avdrag | Renter | Terminbeløp |
| 2 | 1 | 1876410 | 93820 | 50663 | 144483 |
| 3 | 2 | 1782590 | 93820 | 48130 | 141950 |
| 4 | 3 | 1688770 | 93820 | 45597 | 139417 |
| 5 | 4 | 1594950 | 93820 | 43064 | 136884 |
| 6 | 5 | 1501130 | 93820 | 40531 | 134351 |
| 7 | 6 | 1407310 | 93820 | 37997 | 131817 |
| 8 | 7 | 1313490 | 93820 | 35464 | 129284 |
| 9 | 8 | 1219670 | 93820 | 32931 | 126751 |
| 10 | 9 | 1125850 | 93820 | 30398 | 124218 |
| 11 | 10 | 1032030 | 93820 | 27865 | 121685 |
| 12 | 11 | 938210 | 93820 | 25332 | 119152 |
| 13 | 12 | 844390 | 93820 | 22799 | 116619 |
| 14 | 13 | 750570 | 93820 | 20265 | 114085 |
| 15 | 14 | 656750 | 93820 | 17732 | 111552 |
| 16 | 15 | 562930 | 93820 | 15199 | 109019 |
| 17 | 16 | 469110 | 93820 | 12666 | 106486 |
| 18 | 17 | 375290 | 93820 | 10133 | 103953 |
| 19 | 18 | 281470 | 93820 | 7600 | 101420 |
| 20 | 19 | 187650 | 93820 | 5067 | 98887 |
| 21 | 20 | 93830 | 93820 | 2533 | 96353 |
| 22 | | | | **Sum terminbeløp:** | **2408365** |

Egentlig skal restlånet tilsvare avdraget siste terminen, men grunnet litt avrundinger tidligere i oppgaven, blir det en bagatellmessig differanse her.

Formler:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Termin | Restlån | Avdrag | Renter | Terminbeløp |
| 2 | 1 | 1876410 | 93820 | =0,027*B2 | =C2+D2 |
| 3 | 2 | =B2-C2 | 93820 | =0,027*B3 | =C3+D3 |
| 4 | 3 | =B3-C3 | 93820 | =0,027*B4 | =C4+D4 |
| 5 | 4 | =B4-C4 | 93820 | =0,027*B5 | =C5+D5 |
| 6 | 5 | =B5-C5 | 93820 | =0,027*B6 | =C6+D6 |
| 7 | 6 | =B6-C6 | 93820 | =0,027*B7 | =C7+D7 |
| 8 | 7 | =B7-C7 | 93820 | =0,027*B8 | =C8+D8 |
| 9 | 8 | =B8-C8 | 93820 | =0,027*B9 | =C9+D9 |
| 10 | 9 | =B9-C9 | 93820 | =0,027*B10 | =C10+D10 |
| 11 | 10 | =B10-C10 | 93820 | =0,027*B11 | =C11+D11 |
| 12 | 11 | =B11-C11 | 93820 | =0,027*B12 | =C12+D12 |
| 13 | 12 | =B12-C12 | 93820 | =0,027*B13 | =C13+D13 |
| 14 | 13 | =B13-C13 | 93820 | =0,027*B14 | =C14+D14 |
| 15 | 14 | =B14-C14 | 93820 | =0,027*B15 | =C15+D15 |
| 16 | 15 | =B15-C15 | 93820 | =0,027*B16 | =C16+D16 |
| 17 | 16 | =B16-C16 | 93820 | =0,027*B17 | =C17+D17 |
| 18 | 17 | =B17-C17 | 93820 | =0,027*B18 | =C18+D18 |
| 19 | 18 | =B18-C18 | 93820 | =0,027*B19 | =C19+D19 |
| 20 | 19 | =B19-C19 | 93820 | =0,027*B20 | =C20+D20 |
| 21 | 20 | =B20-C20 | 93820 | =0,027*B21 | =C21+D21 |
| 22 | | | | **Sum terminbeløp:** | **=SUMMER(E2:E21)** |
| 23 | | | | | |