Løsningsforslag eksamen 1T høsten 2020

Del 1

Oppgave 1
Skal ha en likning på formen $y = ax + b$, der *a* er stigningstallet og *b* er konstantleddet.
Ser at stigningstallet til linja er 2 og at linja krysser *y*-aksen i punktet (0, -1).

Likningen for den rette linja er $\underline{\underline{y = 2x - 1}}$

Oppgave 2
$$\frac{6{,}2\cdot 10^4\cdot 2{,}5\cdot 10^8}{0{,}0005} = \frac{6{,}2\cdot 10^4\cdot 25\cdot 10^7}{5\cdot 10^{-4}} = 6{,}2\cdot 5\cdot 10^{4+7-(-4)} = 31\cdot 10^{15} = \underline{\underline{3{,}1\cdot 10^{16}}}$$

Oppgave 3
$$I.\quad x + 2y = 16$$
$$II.\quad 3x - y = 6$$

Legger likning *II* til likning *I* to ganger og får
$$7x = 28$$
$$x = \frac{28}{7}$$
$$x = 4$$
Setter dette inn i likning *I*:
$$4 + 2y = 16$$
$$2y = 16 - 4$$
$$y = \frac{12}{2}$$
$$y = 6$$

$$\underline{\underline{x = 4 \wedge y = 6}}$$

Oppgave 4
$$\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x-y} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{x-y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2}{x-y} = \underline{\underline{x-y}}$$

Oppgave 5

Dersom $4x^2 + kx + \frac{1}{4}$ skal være et fullstendig kvadrat, må uttrykket kun ha ett nullpunkt.

$$4x^2 + kx + \frac{1}{4} = 0$$

gir

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{8}$$

Dersom denne likningen kun skal ha én løsning, må vi ha $k^2 - 4 = 0$.
Da har vi:

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm\sqrt{4}$$

$$k = \pm 2$$

$$\underline{\underline{4x^2 + kx + \frac{1}{4} \text{ blir et fullstendig kvadrat når } k = -2 \vee k = 2}}$$

Alternativ løsning:

$$4x^2 + kx + \frac{1}{4} = 4\left(x^2 + \frac{k}{4} + \frac{1}{16}\right)$$

$$\text{Må ha } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{4}\right)^2 = \frac{k^2}{64} \text{ og } \frac{1}{16} = \frac{4}{64}, \text{ så da må vi ha } k^2 = 4$$

og så regne videre og svare som over.

Oppgave 6

$$\frac{5^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{20} \cdot 3^0} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\sqrt{5 \cdot 4} \cdot 1} = \frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt[3]{8}\right)^2}{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2^2}{4 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 7

$$\frac{\lg 1000 \cdot \lg \frac{1}{10}}{\lg 0{,}01 \cdot \lg 10^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\lg 10^3 \left(\lg 1 - \lg 10\right)}{\lg 10^{-2} \cdot \lg 10^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3(0-1)}{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{0-3}{1} = \underline{\underline{-3}}$$

Oppgave 8

a)

$$\frac{2^{2+x}}{2^{1-2x}} = 64$$
$$2^{2+x-(1-2x)} = 2^6$$
$$2 + x - (1-2x) = 6$$
$$2 + x - 1 + 2x = 6$$
$$3x = 6 - 2 + 1$$
$$\underline{\underline{x = \frac{5}{3}}}$$

b)

$$\lg\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right) = -1$$
$$10^{\lg\left(\frac{1}{x^2-3x}\right)} = 10^{-1}$$
$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{1}{10}$$
$$x^2 - 3x = 10$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

"Sum og produkt" gir

$$(x+2)(x-5) = 0$$

så

$$\underline{\underline{x = -2 \vee x = 5}}$$

Oppgave 9

$2x - 4$ er likningen til ei rett linje som krysser y-aksen i $(0,-4)$ og har stigningstall 2.

Vi kan da se at denne linja vil skjære grafen til f først i $(0,-4)$ og så igjen i $(5,6)$, og at linja ligger høyere enn grafen til f i dette intervallet.

$$\underline{\underline{f(x) < 2x - 4 \text{ når } 0 < x < 5}}$$

Oppgave 10

Må løse likningen $f'(x)=-3$.

$f(x)=x^3+3x^2+3$ gir $f'(x)=3x^2+6x$

Da får vi

$$\begin{aligned}
f'(x)&=-3\\
3x^2+6x&=-3\\
3x^2+6x+3&=0\\
3\left(x^2+2x+1\right)&=0\\
3\left(x+1\right)^2&=0\\
x&=-1
\end{aligned}$$

Det betyr at grafen til *f* har én tangent med stigningstall -3. Denne tangerer grafen i punktet $\left(1,f(-1)\right)=\left(1,5\right)$.

Bestemmer likningen til tangenten ved hjelp av ettpunktsformelen.

$$\begin{aligned}
\left(y-5\right)&=-3\left(x-(-1)\right)\\
y&=-3\left(x+1\right)+5\\
y&=-3x-3+5\\
y&=-3x+2
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har én tangent med stigningstall -3. Likningen for denne er } y=-3x+2}}$$

Oppgave 11

a) Her er det 8 av 10 elever i gruppa som ikke er Charlotte eller Gunnar.

$$P\left(\text{Verken Charlotte eller Gunnar blir trukket ut}\right)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}=\underline{\underline{\frac{28}{45}}}$$

b) Det er 2 av 10 elever som er Charlotte eller Gunnar.

$$P\left(\text{ Charlotte og Gunnar blir trukket ut}\right)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{90}=\underline{\underline{\frac{1}{45}}}$$

Oppgave 12

a) ΔABC er en rettvinklet, likebeint trekant. Da vet vi at $\angle B=\angle C=45°$.

Lengden til hypotenusen *BC* er $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Tar utgangspunkt i $\angle B$ og bruker definisjonene av cosinus og sinus.

Definisjonen av cosinus gir: $\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Definisjonen av sinus gir: $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vi har da at $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, som skulle vises

b) Bestemmer arealet ved hjelp av arealsetningen.

$$A = \frac{8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 45°}{2} = 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 24 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 24$$

Arealet av trekanten *PQR* er 24

c) Bruker cosinussetningen til å bestemme lengden av *QR*.

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45°} \\ &= \sqrt{64 + 36 \cdot 2 - 96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{64 + 72 - 96} \\ &= \sqrt{40} \\ &= \sqrt{4 \cdot 10} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \\ &= \underline{\underline{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Oppgave 13

Ut fra informasjonen i oppgaven, kan vi si at $x + 2y = 1000$, slik at $y = 500 - \frac{1}{2}x$.

Arealet av området er gitt ved $A = x \cdot y$.
Siden vi har et uttrykk for *y* avhengig *x*, kan vi uttrykke arealet som en funksjon avhengig av *x*.

$$A(x) = x\left(500 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 500x.$$

Ser utfra funksjonsuttrykket til *A* at grafen er en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), slik at den har ett stasjonært punkt, som er et toppunkt. Finner ekstremalpunktet ved å løse likningen $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -x + 500 &= 0 \\ x &= 500 \end{aligned}$$

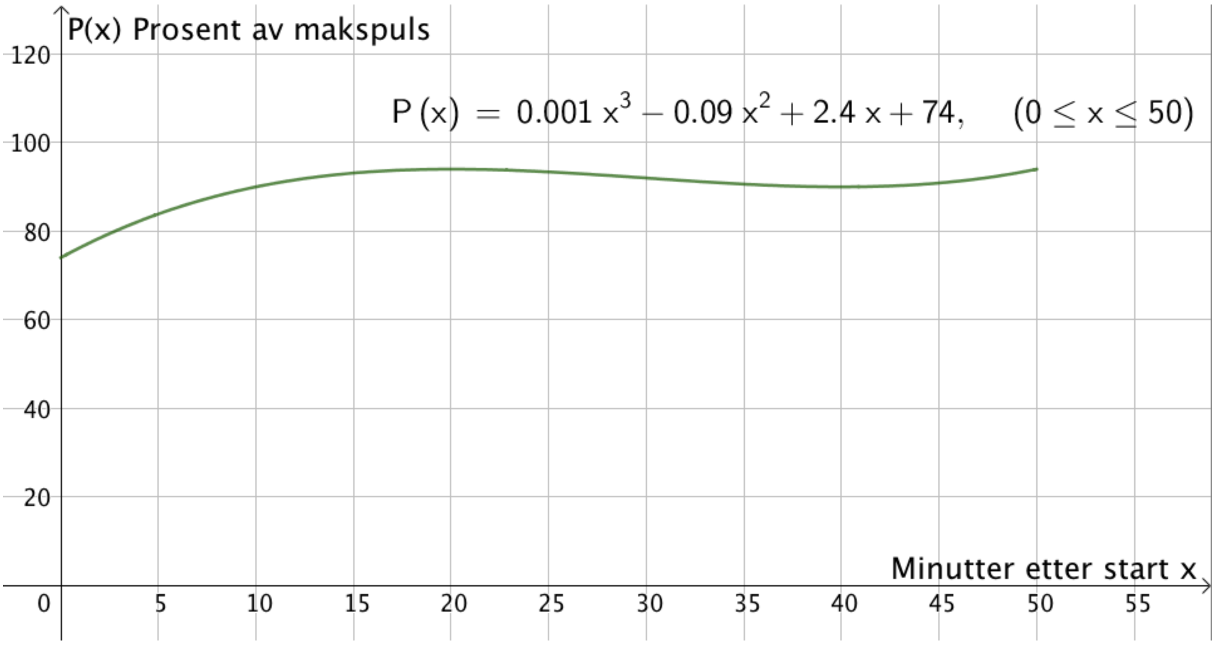
Som igjen gir $y = 500 - \frac{1}{2} \cdot 500 = 500 - 250 = 250$.

$$\underline{\underline{\text{Arealet av området blir størst mulig når } x = 500\text{m og } y = 250\text{m}}}$$

Del 2

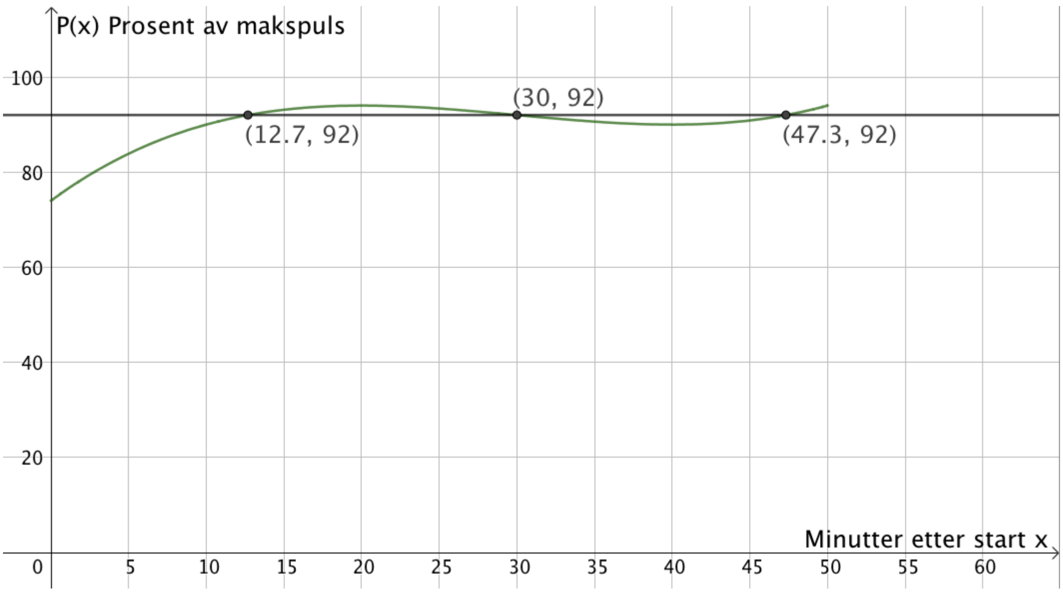
Oppgave 1

a)



b)

Tegner linja $y = 92$ og finner skjæringspunktene mellom denne og grafen til P ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*

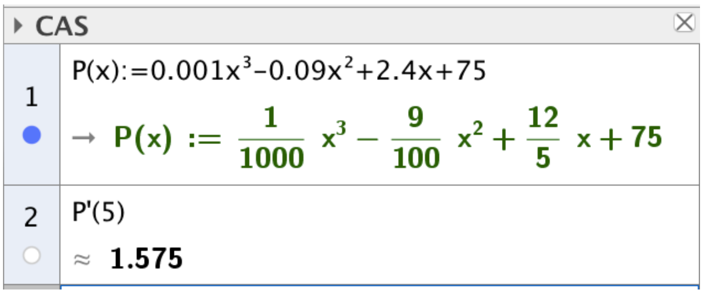


Vi ser at pulsen er høyere enn 92 % av makspuls fra 12,7 til 30 minutter ut i løpet og fra 47,3 minutter 50 minutter ut i løpet.

$$(30-12,7)+(50-47,3)=17,3+2,7=20$$

<u>Pulsen til Ole var høyere enn 92 % av makspuls i til sammen 20 minutter</u>

c)

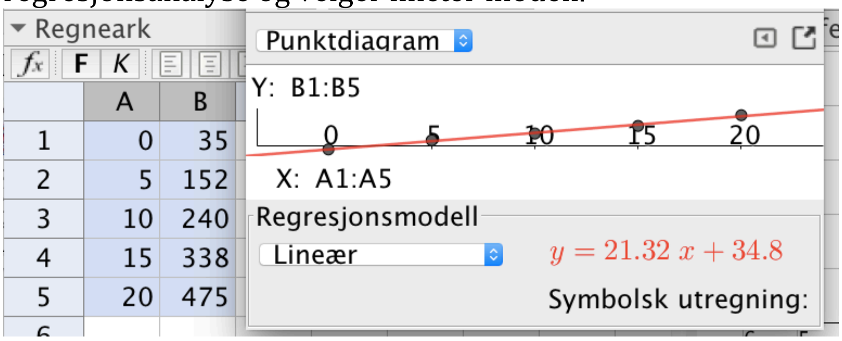


<u>Når $x = 5$ er den momentane vekstfarten ca. 1,6 prosent av makspuls per minutt</u>

Det betyr at pulsen til Ole steg med 1,6 prosent av makspuls 5 minutter etter at skirennet startet.

Oppgave 2

a) Legger inn korrekte verdier i regnearket i GeoGebra, gjennomfører regresjonsanalyse og velger lineær modell.



	A	B
1	0	35
2	5	152
3	10	240
4	15	338
5	20	475

En lineær funksjon som beskriver utviklingen i perioden er

$$\underline{\underline{M(x)=21,32x+34,8}}$$

b) Stigningstallet forteller at antall deltakere i mosjonsløpet i gjennomsnitt økte med 21,32 per år i perioden 2000-2020.

Oppgave 3

Her kan det være greit å lage krysstabell eller Venn-diagram, men det er heller ikke så vrient å resonnere seg fram til antall gunstige utfall for hendelsen ”eleven er med i idrettslaget, men ikke korpset”.

Siden 2 av de 20 elevene verken er med i idrettslaget eller korpset, må det være 18 elever som enten er med i idrettslaget eller korpset eller begge deler.
Når vi summerer antallet som er med i idrettslaget og antallet som er med i korpset, kommer vi til 21. Det betyr at det er 3 elever som er med i begge deler.
Da kan vi konkludere med at det er 11 elever som er med i idrettslaget, men ikke

korpset.

$$\frac{11}{20}=\frac{55}{100}=55\%$$

<u>Sannsynligheten eleven som trekkes ut er med i idrettslaget, men ikke korpset, er 55 %</u>

Oppgave 4

a)

CAS	
1	f(x):=x(x−a)(x−b)+c $\rightarrow \mathbf{f(x) := x\ (-a+x)\ (-b+x)+c}$
2	f'(x) $\rightarrow \mathbf{a\,b-2\,a\,x-2\,b\,x+3\,x^2}$

$$\underline{\underline{f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab}}$$

b)

3	f''(x)=0 Løs: $\left\{\mathbf{x=\frac{1}{3}\,a+\frac{1}{3}\,b}\right\}$

og

$$\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b=\frac{1}{3}(a+b)$$

Vi kan lese av funksjonsuttrykket til den deriverte, at grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"), så det stasjonære punktet på grafen til den deriverte er et bunnpunkt.

Det betyr at grafen til *f* synker raskest når $x=\frac{1}{3}(a+b)$, <u>som skulle vises</u>

Hvis man ikke har kjennskap til den andrederiverte, kan man likevel finne bunnpunktet på grafen til den deriverte ved hjelp av CAS.

c)

CAS	
1	f(x):=x(x−a)(x−b)+c $\rightarrow \mathbf{f(x) := x\ (-a+x)\ (-b+x)+c}$
2	Tangent((a/2), f) $\rightarrow \mathbf{y=\frac{1}{4}\,a^2\,b-\frac{1}{4}\,a^2\,x+c}$
3	g(x):=HøyreSide($2) $\rightarrow \mathbf{g(x) := \frac{1}{4}\,a^2\,b-\frac{1}{4}\,a^2\,x+c}$
4	Skjæring(f, g) $\rightarrow \left\{\left(\mathbf{\frac{1}{2}\,a, -\frac{1}{8}\,a^3+\frac{1}{4}\,a^2\,b+c}\right), \mathbf{(b, c)}\right\}$

(Det ene skjæringspunktet er tangeringspunktet)

Tangenten til grafen til f i punktet $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ skjærer grafen til f i punktet (b, c)

Som skulle vises

Oppgave 5

a) Begge trekantene i **Figur 2** har høyde lik *h*.
Den ene trekanten har grunnlinje *a*, mens den andre har grunnlinje *b*.
Arealet av hele trapeset er summen av arealene til de to trekantene.

$A = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, som skulle utledes.

b) Alle trekantene i **Figur 3** har høyde lik *h*.

To av trekantene har grunnlinje $\frac{a}{2}$ og én trekant har grunnlinje *b*.

Arealet av hele trapeset er summen av arealene til de tre trekantene.

$A = 2 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, som skulle utledes.

c)

Har laget en skisse av **Figur 4**. Siden de to trapesene er like, kan vi lage et rektangel som består av to kongruente, rettvinklede trekanter. Vinkelsummen til de to vinklene i trekantene som ikke er rette, er $90°$.
Da må begge de markerte vinklene på skissen over være $180°$.
Vi kan da konkludere med at de to trapesene til sammen danner et parallellogram.

Parallellogrammet har grunnlinje $a+b$ og høyde *h*.
Og halvparten av arealet til parallellogrammet tilsvarer arealet av trapeset man skal utlede en formel for arealet av.

$A = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, som skulle utledes.