Løsningsforslag eksamen 1T våren 2021 MAT1013 – ”Utgående ordning”

Del 1

Oppgave 1

$$I. \quad 2x - y = 4$$

$$II. \quad x - 2y = 5$$

Trekker likning II fra likning I to ganger og får:

$$3y = -6$$

$$y = -2$$

Setter dette inn i likning II:

$$x - 2(-2) = 5$$

$$x + 4 = 5$$

$$x = 1$$

$$\underline{\underline{x = 1 \wedge y = -2}}$$

Oppgave 2

- $\sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ og siden $1 < 3 < 4$, har vi $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{3^{-1}}{4^{-1}} = \dfrac{4}{3}$
- $\sin 160° = \sin\left(180° - 160°\right) = \sin 20°$ og $\sin 0° < \sin 20° < \sin 30°$, så $0 < \sin 20° < \dfrac{1}{2}$
- $\lg 1 = 0$

I stigende rekkefølge:

$$\underline{\underline{\lg 1 \qquad \sin 160° \qquad \sin 60° \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}}$$

Oppgave 3

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x-6}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x-6)(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{18}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2+3x+x^2-9x+18-18}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-6x}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{2x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2x}{x+3}}}$$

Oppgave 4

Bestemmer et andregradsuttrykk som har nullpunkter $x=-4$ og $x=2$.
$(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$.
Grafen til dette uttrykket er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"), så verdien til uttrykket er negativ for alle *x* mellom nullpunktene.

Vi kan da sette opp følgende ulikhet der alle $x \in [-4,2]$ er løsninger:

$$\underline{\underline{x^2+2x-8\leq 0}}$$

Oppgave 5

Ut fra grafen, kan jeg foreløpig sette opp funksjonsuttrykket $f(x)=ax^2+bx-2$, der *a* og *b* er konstanter.
Ser at symmetrilinja er $x=0$, så da vet jeg at vi har $b=0$.
Sitter da igjen med $f(x)=ax^2-2$.
Vi kan se at $f(1)=-1$, så

$$a\cdot 1^2-2=-1$$
$$a=-1+2$$
$$a=1$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^2-2}}$$

Ved å studere grafen nøye, kan vi egentlig ganske raskt se at det er grafen til x^2 som er parallellforskjøvet 2 enheter i negativ y-retning, men måtte uansett ha argumentert for dette om jeg valgte den tilnærmingen. Det er også mulig å løse denne oppgaven ved å sette opp likningssett basert på det foreløpige uttrykket som står i linje 1 i løsningen over.

Oppgave 6

$$f(20) = -2 \cdot 20 + 9 = -40 + 9 = -31$$

$$og$$

$$-72 - (-31) = -72 + 31 = -41$$

Det betyr at verdien til y-koordinatene til alle punktene på grafen til g er 41 lavere enn for punktene på grafen til f.
Da har vi $g(0) = f(0) - 41 = 9 - 41 = -32$.

Siden grafene til f og g er parallelle linjer, har de samme stigningstall.

$$\underline{\underline{g(x) = -2x - 32}}$$

Oppgave 7

$$3^{-2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{a^3}}{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3 \cdot a^0} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{4} \cdot 3} \cdot 1} = \frac{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}}{9a^{\frac{9}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}}{9} = \frac{a^{\frac{1}{4}+\frac{6}{4}-\frac{9}{4}}}{9} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{9} = \frac{1}{9a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{9\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{9\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{a}}{9a}}}$$

Oppgave 8

a)

$$3^{2x+2} = 81$$

$$3^{2x+2} = 3^4$$

$$2x + 2 = 4$$

$$2x = 2$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

b)

$$\lg\left(\frac{1}{2x+2}\right) = -2$$

$$10^{\lg\left(\frac{1}{2x+2}\right)} = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{2x+2} = \frac{1}{10^2}$$

$$2x + 2 = 10^2$$

$$2x = 100 - 2$$

$$x = \frac{98}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 49}}$$

Oppgave 9

a) $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 24}{5\cdot 24}=\frac{48}{120}$ og $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 30}{5\cdot 30}=\frac{90}{150}$

	Elev i Vg1	Elev i Vg3	Sum
Fornøyd med hjemmeundervisningen	48	90	138
Ikke fornøyd med hjemmeundervisningen	72	60	132
Sum	120	150	270

b) $P(\text{Tilfeldig valgt elev var fornøyd med hjemmeundervisningen})=\frac{138}{270}=\frac{46}{90}=\underline{\underline{\frac{23}{45}}}$

c) $P(\text{Vg3}|\text{Fornøyd})=\frac{90}{138}=\frac{30}{46}=\underline{\underline{\frac{15}{23}}}$

Oppgave 10

$$\frac{5\cdot 12\cdot \sin v}{2}=15$$
$$60\cdot \sin v=30$$
$$\sin v=\frac{1}{2}$$
$$så$$
$$\underline{\underline{v=30^\circ}}$$

Oppgave 11

Lar x være antall kilo marsipan og lar y være antall kilo sjokolade.
Hvis butikken har en fortjeneste på 50 kroner for hver pose de selger, og prisen per pose er 166 kroner, betyr det at produksjonskostnaden er 116 kroner per pose.
Vi kan da sette opp en likning for produksjonskostnaden per pose: $140x+100y=116$
Samtidig vet vi at hver pose veier 1kg, så basert på innholdet i hver pose, kan vi si at $x+y=1$, slik at $y=1-x$. Setter dette inn i likningen over:

$$140x+100(1-x)=116$$
$$140x+100-100x=116$$
$$40x=116-100$$
$$x=\frac{16}{40}$$
$$x=0{,}4 \text{ , som gir } y=1-0{,}4=0{,}6$$

<u>Det er 400 gram marsipan og 600 gram sjokolade i hver pose.</u>

Oppgave 12

Bestemmer først $\cos v$ ved hjelp av definisjonen av cosinus:

$$\cos v = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Bestemmer så $\cos u$ ved hjelp av cosinussetningen:

$$1^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\cos u$$

$$2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\cos u = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 - 1^2$$

$$2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{4\cdot 2}\cdot\cos u = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 - 1^2$$

$$2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos u = 5+8-1$$

$$4\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos u = 12$$

$$4\sqrt{5\cdot 2}\cdot\cos u = 12$$

$$4\sqrt{10}\cdot\cos u = 12$$

$$\cos u = \frac{12}{4\sqrt{10}}$$

$$\cos u = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos u = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$\cos u = \cos v$, som skulle vises.

Oppgave 13

Momentan vekstfart i $\left(3, f(3)\right)$ er gitt ved $f'(3)$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, så $f'(3) = 3\cdot 9 - 4\cdot 3 - 4 = 27 - 12 - 4 = 11$

Gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $\left[-3,0\right]$ er gitt ved $\dfrac{f(0)-f(-3)}{3}$.

$$\frac{f(0)-f(-3)}{3} = \frac{8-\left(\left(-3\right)^3 - 2\left(-3\right)^2 - 4\left(-3\right)+8\right)}{3} = \frac{8-\left(-27-18+12+8\right)}{3} = \frac{8-\left(-25\right)}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Den momentane vekstfarten til f i $\left(3, f(3)\right)$ er lik den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $\left[-3,0\right]$. Som skulle vises.

Oppgave 14

Rektangelet *ABCD* har grunnlinje $12-x$ og høyde $f(x)$.
Lar arealet av rektangelet være uttrykt ved en funksjon *R*.

$$R(x)=(12-x)\cdot f(x)=(12-x)\cdot(x^2+21)=12x^2+252-x^3-21x=-x^3+12x^2-21x+252$$

Bruker derivasjon til å bestemme den største verdien *R* kan få.

$$R'(x)=-3x^2+24x-21=-3(x^2-8x+7)=-3(x-1)(x-7)$$

$$så$$

$$R'(x)=0$$

$$gir$$

$$x=1\vee x=7$$

Grafen til den deriverte av *R* er en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), så verdien av den deriverte er positiv mellom nullpunktene. Det betyr at den deriverte skifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet $x=7$, slik at $(7, R(7))$ er et toppunkt på grafen til *R*.

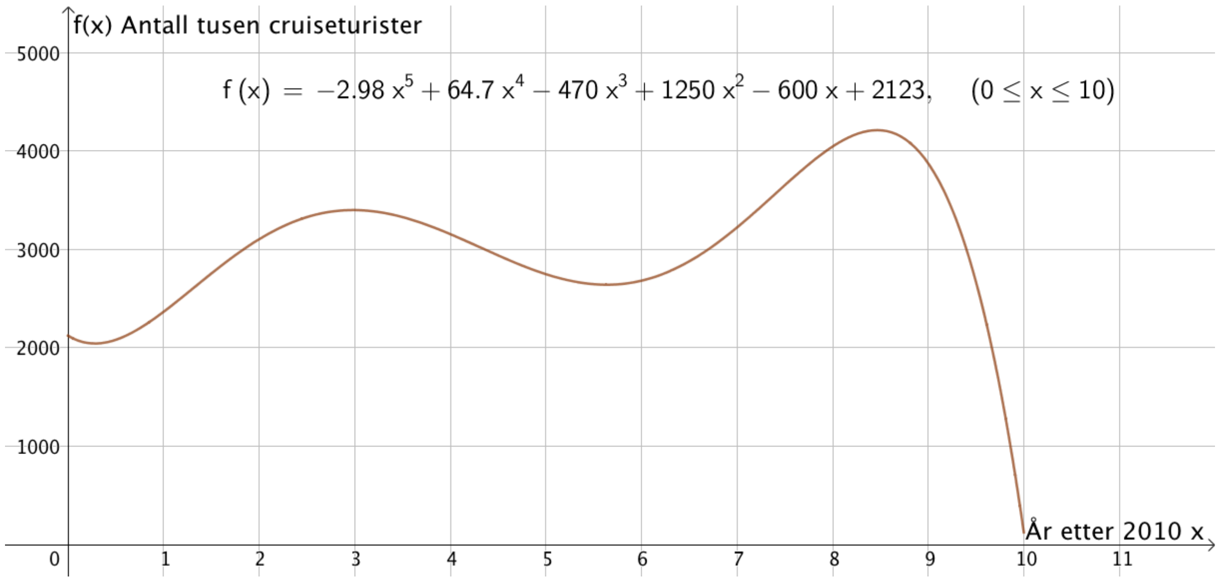
$$R(7)=(12-7)(7^2+21)=5\cdot 70=350$$

<u>Det største arealet rektangelet *ABCD* kan ha, under de gitte forutsetningene, er 350.</u>

Del 2

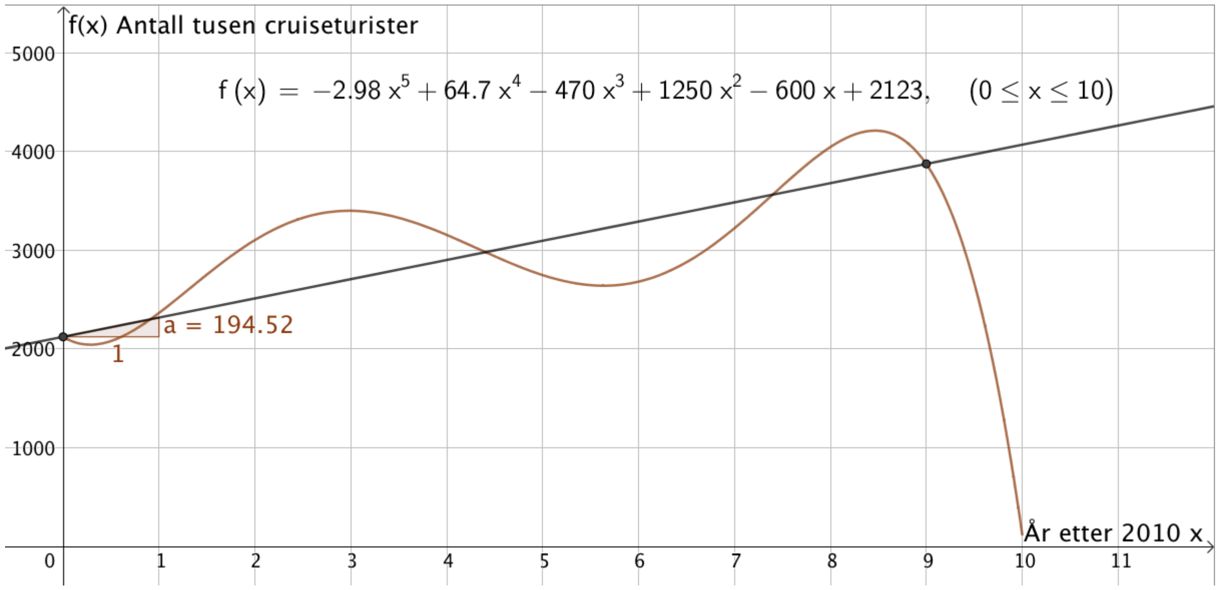
Oppgave 1

a)



b) Skriver skriver $(0, f(0))$ og $(9, f(9))$ i inntastingsfeltet.

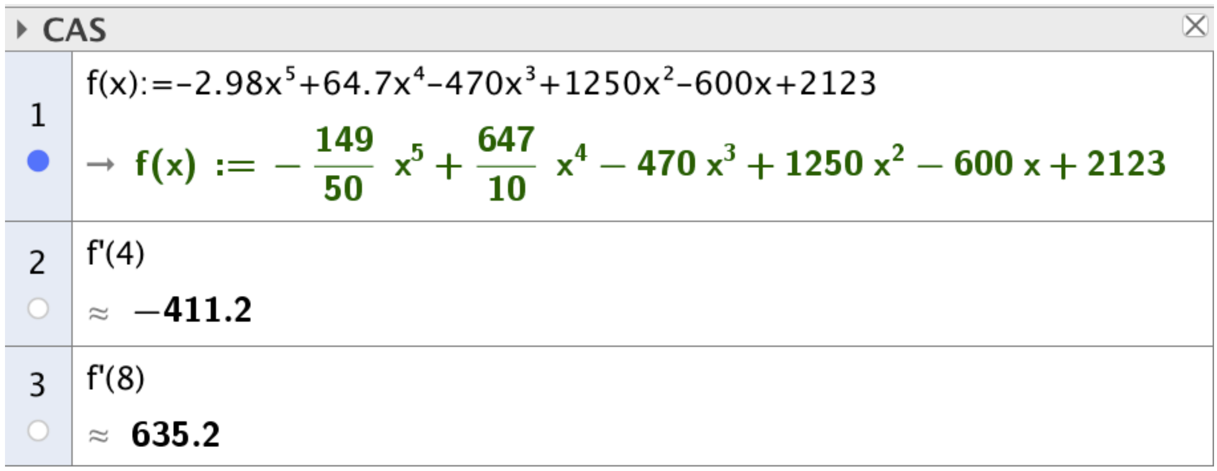
Tegner linje gjennom punktene, og finner stigningstallet til linja ved hjelp av "*stigning*".



<u>Gjennomsnittlig vekstfart i intervallet [0,9] er 194520 cruiseturister per år.</u>

Svaret forteller at antall cruiseturister som besøkte Norge steg med omtrent 194 500 per år i gjennomsnitt i perioden 2010-2019.

c)



<u>Den momentane vekstfarten til f er -411200 cruiseturister per år når $x = 4$</u>

<u>og 635200 cruiseturister per år når $x = 8$</u>

Svarene forteller at antallet cruiseturister som besøkte Norge avtok med 411200 per år i 2014, og at antallet økte med 635200 per år i 2018.

Oppgave 2
Bruker arealsetningen.

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin v = 8\sqrt{3} \quad |\cdot\frac{1}{8}$$
$$2\sin v = \sqrt{3}$$
$$\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$v = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$$

Det finnes også en vinkel u, slik at $u = 180^\circ - v = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

To trekanter hvor to av sidene har lengder på henholdsvis 4 og 8, og vinkelen mellom disse sidene er 60° i den ene trekanten og 120° i den andre, vil begge ha areal $8\sqrt{3}$, uten at trekantene er formlike.

Det finnes altså to trekanter som ikke er formlike, og som tilfredsstiller kravene som er gitt i oppgaveteksten. Som skulle vises.

Oppgave 3
To drops av samme farge, betyr enten to hvite eller to røde.

$$P(\text{To drops av samme farge}) = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15} + \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15} = \frac{30}{240} + \frac{90}{240} = \frac{120}{240} = \frac{1}{2} = 50\%$$

To drops med ulik farge, er det motsatte av to drops av samme farge.

$$P(\text{To drops med ulik farge}) = 100\% - P(\text{To drops av samme farge}) = 100\% - 50\% = 50\%$$

Det er altså like stor sannsynlighet for at Scott trekker to drops av samme farge, som at han trekker to drops med ulik farge.
Som skulle vises.

Oppgave 4
a) Figuren illustrerer rektangler som er satt sammen av par av trekanttallene, i mønsteret $T_1 + T_1$, $T_2 + T_2$ osv...
Vi ser at rektanglene har grunnlinje n og høyde $n+1$, slik at rektangelet som er satt sammen av $T_n + T_n$ vil ha areal lik $n(n+1)$.

Da har vi følgende formel for T_n:

$$T_n + T_n = n(n+1)$$
$$2T_n = n(n+1)$$
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Som skulle vises

b)

$$T_{n+1}=\frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+3}{2}.$$

<u>Som skulle vises.</u>

c)

CAS

1	Antall hvite drops er gitt ved H, antall røde er gitt ved R og totalt antall er gitt ved S
2	H(n):=(n²+n)/2 → $H(n) := \frac{1}{2}(n^2+n)$
3	R(n):=H(n+1) → $R(n) := \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$
4	S(n):=H+R → $S(n) := n^2+2n+1$

5	Bestemmer sannsynligheten for to drops av samme farge:
6	H/S*(H−1)/(S−1)+R/S*(R−1)/(S−1) ✓ $\frac{H}{S}\cdot\frac{H-1}{S-1}+\frac{R}{S}\cdot\frac{R-1}{S-1}$
7	H / S (H − 1) / (S − 1) + R / S (R − 1) / (S − 1) → $\frac{1}{2}$
8	Sannsynligheten for to drops med ulik farge:
9	H/S*R/(S−1)*2 ✓ $\frac{H}{S}\cdot\frac{R}{S-1}\cdot 2$
10	H / S R / (S − 1) 2 → $\frac{1}{2}$

Vi ser at sannsynligheten for at Scott trekker to drops av samme farge er lik sannsynligheten for at han trekker to drops med ulik farge, ut fra forutsetningene gitt i oppgaveteksten. <u>Som skulle vises</u>.

Oppgave 5

a)

CAS

1	AC^2=s^2+s^2-2*s*s*cos(108°)
	Løs: $\left\{ \mathbf{AC} = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\,s, \mathbf{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,s \right\}$

Vi har $s > 0$ og $AC > 0$, så velger løsningen lengst til høyre i bildet over.

$$AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}s = \frac{s\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} = \frac{1}{2}s\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)$$, <u>som skulle vises</u>.

b) ΔABC er likebeint, så $\angle BAC = \frac{180° - 108°}{2} = \frac{72°}{2} = 36°$.

CAS

1	AC/sin(108°)=s/sin(36°)
	Løs: $\left\{ \mathbf{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,s \right\}$

$$AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}s = \frac{s\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} = \frac{1}{2}s\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)$$, <u>som skulle vises</u>.

c)

CAS

2	A_1:=(s*s*sin(108°))/2 $\to A_1 := \frac{1}{8}s^2\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)}$
3	Areal av trekant AEC:
4	AC:=(sqrt(5)+1)/2*s $\to AC := \frac{1}{2}s\left(\sqrt{5}+1\right)$
5	A_2:=(AC*AC*sin(108°-2*36°))/2 $\to A_2 := \frac{1}{4}s^2\sqrt{2\sqrt{5}+5}$
6	Areal av trekant ABC (som er likt arealet av trekant CED):
7	A_3:=A_1 $\to A_3 := \frac{1}{8}s^2\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)}$
8	Arealet av hele femkanten:
9	A_1+A_2+A_3 $\to \frac{1}{4}s^2\sqrt{5\left(2\sqrt{5}+5\right)}$

Arealet av femkanten, uttrykt eksakt ved *s*, står i linje 9 på bildet over.