Løsningsforslag eksamen S2 våren 2021

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = x^4 - 4\ln x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{4x^3 - \frac{4}{x} = 4\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)}}$

b) $g(x) = \frac{e^{2x}}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x}\left(x+1\right) - e^{2x}\cdot 1}{\left(x+1\right)^2} = \frac{\left(2x+2\right)e^{2x} - e^{2x}}{\left(x+1\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\left(2x+1\right)e^{2x}}{\left(x+1\right)^2}}}$

Oppgave 2

a) $a_1 = -6$ og $d = -1-(-6) = 5$.

Bestemmer antall ledd i rekka:

$$a_1 + \left(n-1\right)\cdot d = 189$$
$$-6 + \left(n-1\right)\cdot 5 = 189$$
$$-6 + 5n - 5 = 189$$
$$5n = 189 + 11$$
$$n = \frac{200}{5}$$
$$n = 40$$

Regner ut summen av rekka:

$$S_{40} = \frac{-6+189}{2}\cdot 40 = \frac{183}{2}\cdot 40 = 183\cdot 20 = \underline{\underline{3660}}$$

b) Vi har ei uendelig geometrisk rekke, der $a_1 = 72$ og $k = \frac{-36}{72} = -\frac{1}{2}$.

Siden $-1 < k - 1$, konvergerer rekka.

Bestemmer summen:

$$S = \frac{72}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{72}{\frac{3}{2}} = \frac{144}{3} = \underline{\underline{48}}$$

Oppgave 3

a)

$$\left(x^3+0\cdot x^2-19x+30\right):\left(x-2\right)=\underline{\underline{x^2+2x-15}}$$

$$\underline{x^3-2x^2}$$

$$2x^2-19x+30$$

$$\underline{2x^2-4x}$$

$$-15x+30$$

$$\underline{-15x+30}$$

$$0$$

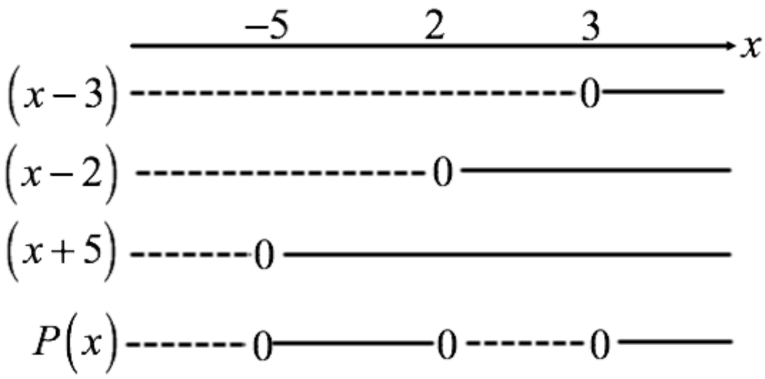
b)

$$P(x)\geq 0$$

$$\left(x-2\right)\left(x^2+2x-15\right)\geq 0$$

$$\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x+5\right)\geq 0$$

Tegner fortegnslinjer:



$$\underline{\underline{P(x)\geq 0 \text{ når } x\in\left[-5,2\right]\cup\left[3,\rightarrow\right\rangle}}$$

c) Sjekker om teller og nevner har felles faktor(er):

$x^3-2x^2-9x+18=0$ når $x=2$, så $\left(x-2\right)$ er faktor i nevneren.

og

$x^3-2x^2-9x+18=0$ når $x=3$, så $\left(x-3\right)$ er faktor i nevneren.

$\left(x-3\right)\left(x-2\right)=\left(x^2-5x+6\right)$ og $\left(x^2-5x+6\right)\left(x+3\right)=\left(x^3-2x^2-9x+18\right)$

Forkorter brøken:

$$\frac{x^3-19x+30}{x^3-2x^2-9x+18}=\frac{\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x+5\right)}{\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)}=\underline{\underline{\frac{x+5}{x+3}}}$$

Oppgave 4

a) Funksjonen *f* er en logistisk funksjon, og vi ser av figuren at grafen flater ut slik at verdien til *f* går mot 10 når *x* går mot uendelig. Det betyr at $A = 10$.

Bruker at $F(0) = 2$ og bestemmer *B*:

$$F(0) = 2$$
$$\frac{10}{1 + B \cdot e^{-k \cdot 0}} = 2$$
$$\frac{10}{1 + B} = 2$$
$$gir$$
$$1 + B = 5$$
$$B = 4$$

$$\underline{\underline{A = 10 \wedge B = 4}}$$

b) Ser at tangenten på figuren har stigningstall $\frac{10-2}{10-0} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, så $f'(0) = \frac{4}{5}$.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \left(1 + 4e^{-k \cdot x}\right) - 10\left(-4k \cdot e^{-k \cdot x}\right)}{\left(1 + 4e^{-k \cdot x}\right)^2} = \frac{40k \cdot e^{-k \cdot x}}{\left(1 + 4e^{-k \cdot x}\right)^2}$$

Løser likningen $f'(0) = \frac{4}{5}$

$$f'(0) = \frac{4}{5}$$
$$\frac{40k \cdot e^{-k \cdot 0}}{\left(1 + 4e^{-k \cdot 0}\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{40k}{\left(1 + 4\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{40k}{25} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{8k}{5} = \frac{4}{5}$$
$$8k = 4$$
$$k = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

<u>Som skulle vises</u>

Oppgave 5

a) $f(1)=6$ gir $a+b+c=6$ og $f(-1)=2$ gir $-a+b-c=2$.

Når grafen har toppunkt med *x*-koordinat lik 3, vet vi også at $f'(3)=0$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$, så $f'(3)=0$ gir da:

$$3a\cdot 3^2+2b\cdot 3+c=0$$

$$27a+6b+c=0$$

Vi får da følgende likningssystem som kan brukes til å bestemme *a, b* og *c*:

$$\begin{aligned} I.&\quad a+b+c=6 \\ II.&\quad -a+b-c=2 \\ III.&\quad 27a+6b+c=0 \end{aligned}$$

b) Legger likning *I* til likning *II* og får:

$2b=8 \Leftrightarrow b=4$

Trekker likning *I* fra likning *III* og får:

$26a+5b=-6$

Når $b=4$, har vi da

$$26a+5\cdot 4=-6$$

$$26a=-6-20$$

$$26a=-26$$

$$a=-1$$

Setter $a=-1$ og $b=4$ inn i likning *I* og får:

$$-1+4+c=6$$

$$c=6-4+1$$

$$c=3$$

$$\underline{\underline{a=-1 \wedge b=4 \wedge c=3}}$$

Oppgave 6

a)

$$f(x)=\left(\ln x\right)^2-2\ln x-3=\left(\ln x+1\right)\left(\ln x-3\right)$$

så

$$f(x)=0$$

gir

$$\ln x=-1 \vee \ln x=3$$

$$\underline{\underline{x=\frac{1}{e} \vee x=e^3}}$$

b) $f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 2}{x}$, <u>som skulle vises</u>.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ &gir \\ 2\ln x - 2 &= 0 \\ 2\left(\ln x - 1\right) &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ x &= e \end{aligned}$$

Når $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$, vet vi at nevneren til den deriverte er positiv for alle *x*.

Telleren er negativ når $x \in \langle 0, e \rangle$ og positiv når $x > e$.

$\left(e, f(e)\right)$ er altså et bunnpunkt på grafen til *f*.

$$f(e) = \left(\ln e\right)^2 - 2\ln e - 3 = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = -4$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har bunnpunkt i } \left(e, -4\right)}}$$

c)

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x}\cdot x - \left(2\ln x - 2\right)\cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x + 2}{x^2} = \frac{4 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2\left(2 - \ln x\right)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} &gir \\ f''(x) &= 0 \\ 2 - \ln x &= 0 \\ \ln x &= 2 \\ x &= e^2 \end{aligned}$$

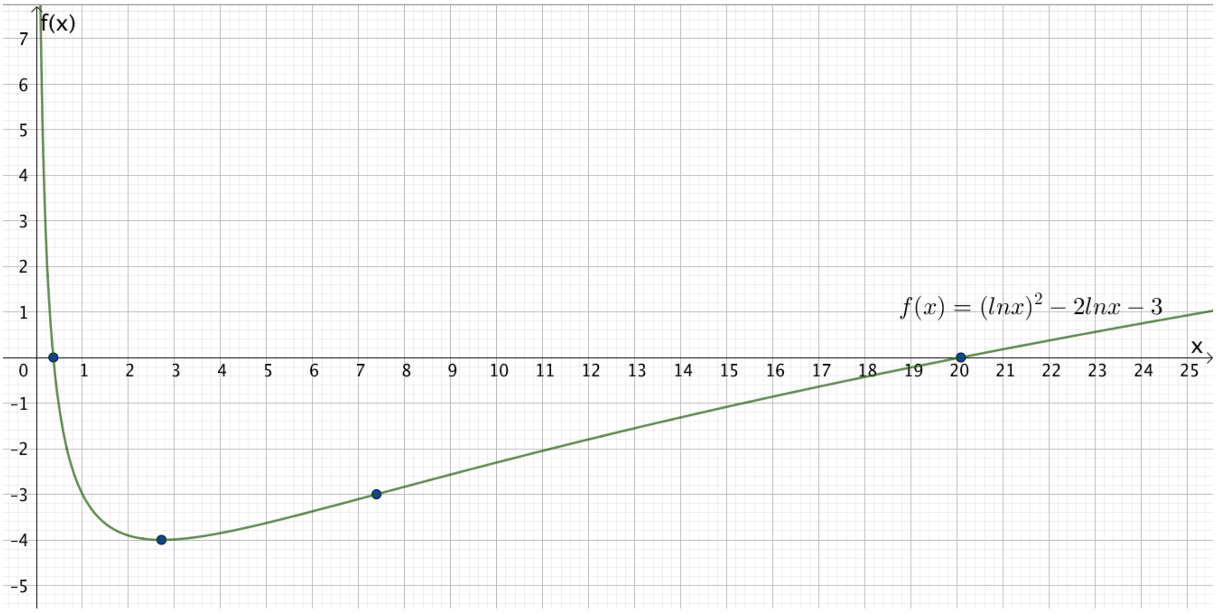
Nevneren til den andrederiverte er positiv for alle *x* i definisjonsmengden, mens telleren er positiv når $x \in \langle 0, e^2 \rangle$ og negativ når $x > e^2$.

Den andrederiverte skrifter altså fortegn i nullpunktet sitt, så $\left(e^2, f\left(e^2\right)\right)$ er vendepunkt på grafen til *f*.

$$f\left(e^2\right) = \left(\ln\left(e^2\right)\right)^2 - 2\ln\left(e^2\right) - 3 = 2^2 - 2\cdot 2 - 3 = -3$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har vendepunkt i } \left(e^2, -3\right)}}$$

d) Markerer nullpunktene, bunnpunktet og vendepunktet på grafen til f i et koordinatsystem og tegner en jevn kurve gjennom disse. Ser også av funksjonsuttrykket at grafen til f vil legge seg inntil y-aksen når x nærmer seg 0.



Oppgave 7

I denne oppgaven får vi bruk for tabell over standard normalfordeling.

a)

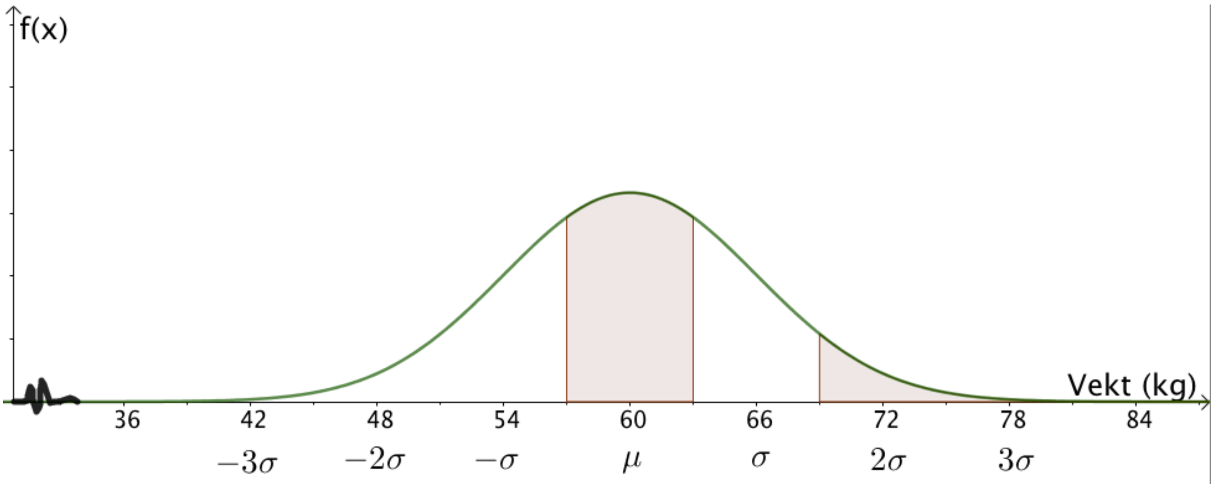
$$
\begin{aligned}
P(57 < X < 63) &= P\left(\frac{57-60}{6} \leq Z \leq \frac{63-60}{6}\right) \\
&= P\left(\frac{-3}{6} \leq Z \leq \frac{3}{6}\right) \\
&= P(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5) \\
&= P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5) \\
&= 0{,}6915 - 0{,}3085 \\
&= 69{,}15\% - 30{,}85\% \\
&= 38{,}3\%
\end{aligned}
$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt sau veier mellom 57 og 63 kg er 38,3 %

b) $$\int_{69}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - P(X \leq 69) = 1 - P\left(Z \leq \frac{69-60}{6}\right) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \underline{\underline{0{,}0668}}$$

Verdien av integralet forteller oss at 6,68 % av sauene veier minst 69 kg.
Det betyr også at sannsynligheten er 6,68 % for at en tilfeldig valgt sau veier mer enn minst 69 kg.

c)



Resultatene fra oppgave a) og oppgave b) er synliggjort ved skravering av de aktuelle områdene under grafen.

d) Lar den stokastiske variabelen S være summen av vekten til 25 tilfeldig valgte sauer. Sentralgrensesetningen sier da at S er tilnærmet normalfordelt.

$E(S) = n \cdot \mu = 25 \cdot 60 = 1500$ og $SD(S) = \sigma \cdot \sqrt{n} = 6 \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$.

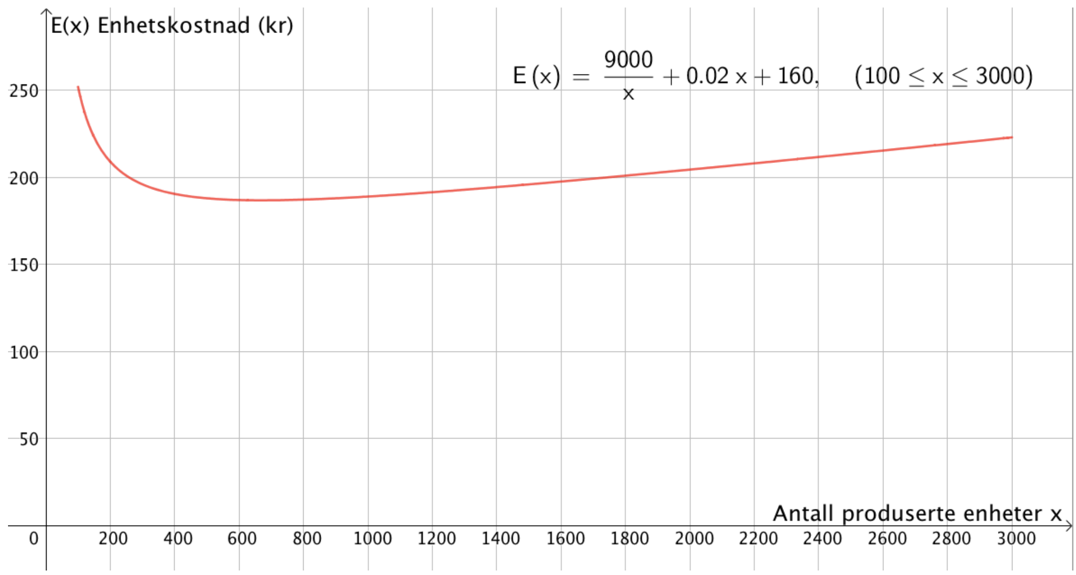
$$P(S \leq 1550) = P\left(Z \leq \frac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{50}{30}\right) \approx P(Z \leq 1{,}67) = 0{,}9525$$

<u>Det er omtrent 95 % sannsynlig at slaktebilen kan ta med seg alle de 25 sauene.</u>

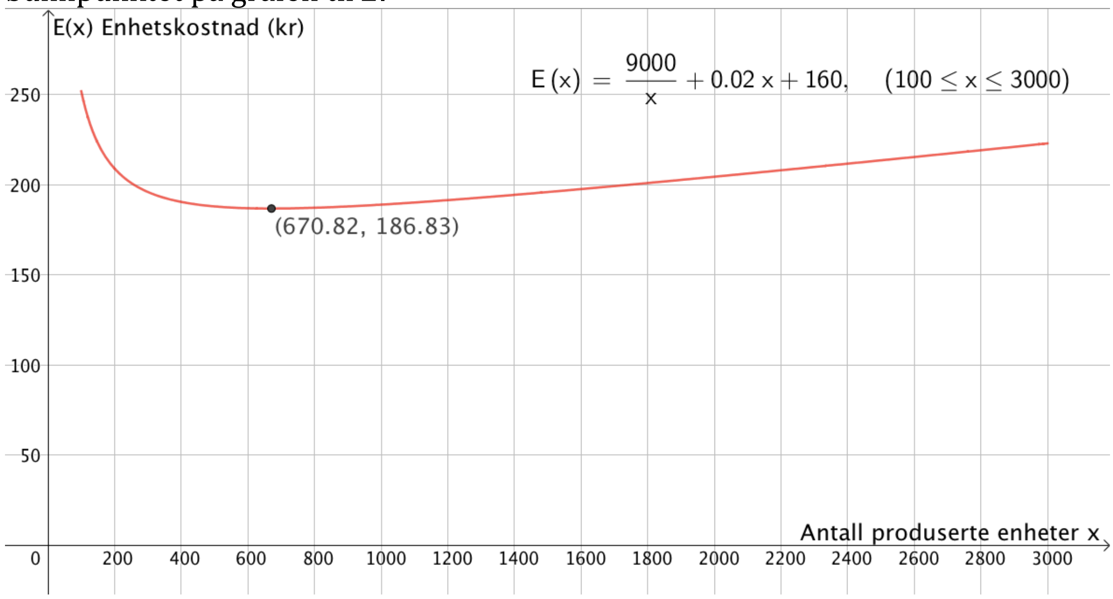
Del 2

Oppgave 1

a)



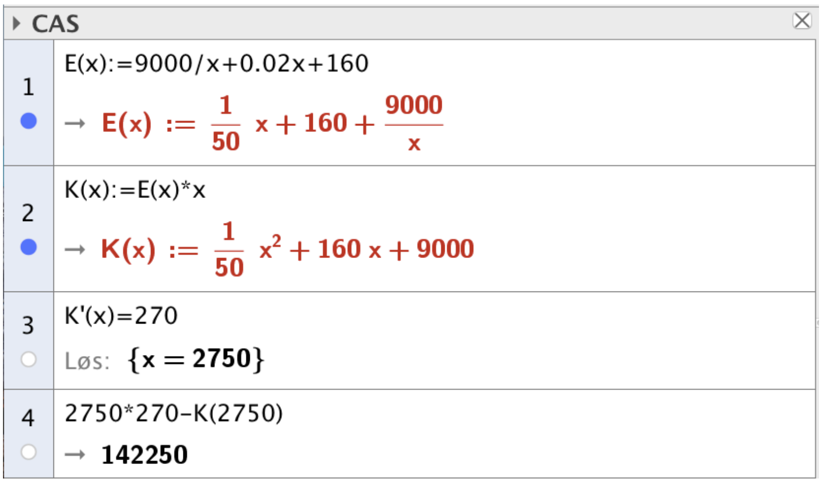
b) Bruker kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og finner bunnpunktet på grafen til E.



<u>Bedriften må produsere og selge 670,82 enheter per måned, for at enhetskostnaden skal bli lavest mulig.</u>

Det står at "den månedlige" enhetskostnaden er gitt ved funksjonen E.
Da kan man tenke seg at bedriften må produsere og selve 670,82 enheter per måned (altså et månedlig gjennomsnitt). Hadde det stått "denne måneden", ville det vært mer naturlig å runde av til 671 eller lignende.
Jeg vil anta at begge deler vil gi full uttelling.

c) Grensekostnaden er konstant og er 270 kroner per enhet.
Den vinningsoptimale produksjonsmengden finner vi ved å løse likningen $K'(x) = I'(x)$.



<u>En månedlig produksjonsmengde på 2750 enheter gir størst mulig overskudd. Da er det månedlige overskuddet på 142 250 kroner.</u>

d)

CAS

1	E(x):=9000/x+0.02x+160 → $E(x) := \frac{1}{50}\,x + 160 + \frac{9000}{x}$
2	K(x):=E(x)*x → $K(x) := \frac{1}{50}\,x^2 + 160\,x + 9000$
3	I(x):=p*x → $I(x) := p\,x$
4	I(x)-K(x)=100000 → $p\,x - \frac{1}{50}\,x^2 - 160\,x - 9000 = 100000$
5	I'(x)-K'(x)=0 → $p - \frac{1}{25}\,x - 160 = 0$
6	{$4, $5} Løs: $\left\{\left\{x = 100\,\sqrt{545}, p = 4\,\sqrt{545} + 160\right\}, \left\{x = -100\,\sqrt{545}, p = -4\,\sqrt{545} + 160\right\}\right\}$
7	{{x = 100sqrt(545), p = 4sqrt(545) + 160}, {x = -100 sqrt(545), p = -4 sqrt(545) + 160}} ≈ $\{\{x = 2334.524, p = 253.381\}, \{x = -2334.524, p = 66.619\}\}$

I rad 3 definerer jeg et utrykk for inntekt avhengig av pris.
I rad 4 - 7 setter jeg opp, og løser likninger, som gir den prisen og produksjonsmengden som gir maksimalt overskudd på 100 000 kroner.

<u>En pris på 253,38 kroner vil gjøre at det største mulige månedlige overskuddet blir 100 000 kroner. Da må bedriften selge ca. 2335 enheter.</u>

Oppgave 2

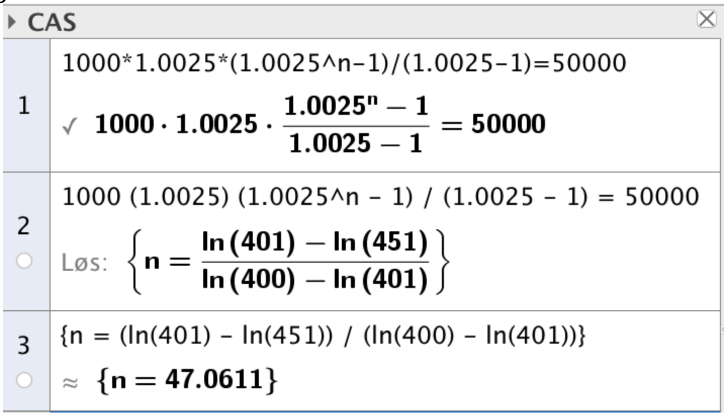
a) Summen av sluttverdiene til de 40 innskuddene danner ei geometrisk rekke med 40 ledd, der $a_1 = 1000$ og $k = 1{,}0025$.

CAS

1	1000*(1.0025^40-1)/(1.0025-1) ✓ $1000 \cdot \frac{1.0025^{40} - 1}{1.0025 - 1}$
2	1000(1.0025^40 - 1) / (1.0025 - 1) ≈ 42013.2041

<u>Rannveig hadde 42013,20 kroner på kontoen like etter innskudd nummer 40.</u>

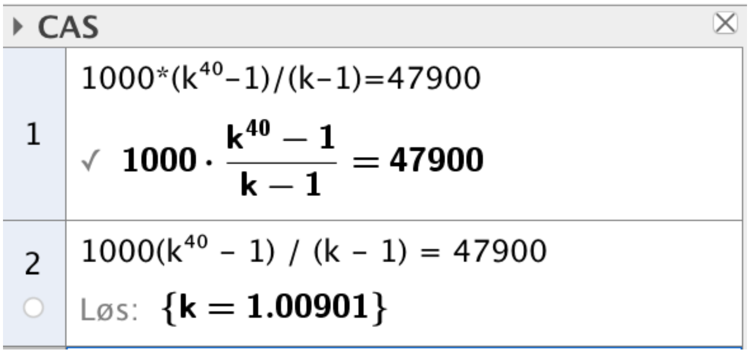
b) Endrer a_1 til $1000 \cdot 1{,}0025$, slik at vi nå får med renten på siste innskudd i summen av sluttverdiene. Vi ser altså på hvor mye penger hun har på konto like *før* neste innskudd.



Beløpet på kontoen passerer 50 000 kroner idet Rannveig foretar innskudd nummer 48.

<u>Det gikk 47 måneder, altså 3 år og 11 måneder, fra første innskudd og frem til beløpet på kontoen passerte 50000 kroner.</u>

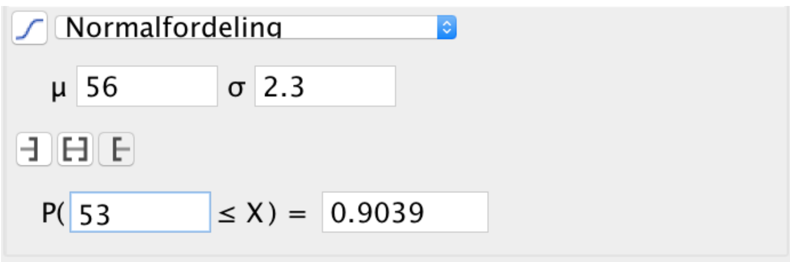
c)



<u>Den månedlige rentefoten måtte vært på 0,90 %</u>

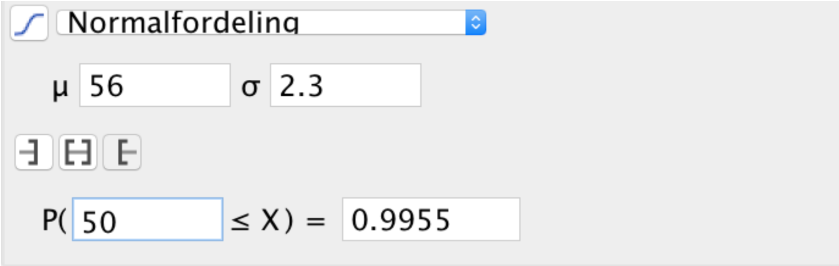
Oppgave 3

a) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Sannsynligheten for at senen i en tilfeldigvalgt spole tåler minst 53 kg er 90,39 %</u>

b)



Sannsynligheten for at senen i en tilfeldig valg spole tåler mer enn 50 kg er 0,9955.

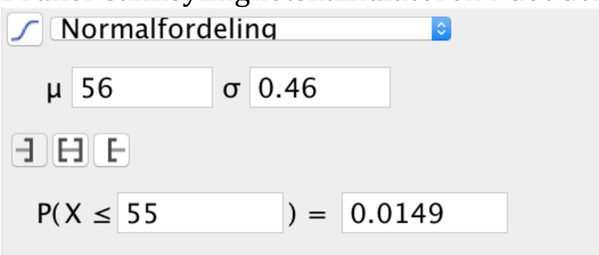
Når vi da gjør målinger av 25 tilfeldig valgte spoler, kan vi anta at resultatene i de 25 målingene er uavhengige av hverandre. Vi har altså et binomisk forsøk med $n = 25$ og $p = 0{,}9955$.

$$P(\text{Alle de 25 spolene tåler mer enn 50 kg}) = 0{,}9955^{25} = \underline{\underline{0{,}8934 = 89{,}34\%}}$$

c) Når X er normalfordelt, har vi:

$$E(\bar{X}) = \mu = 56 \text{ og } SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{25}} = \frac{2{,}3}{5} = 0{,}46$$

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra:



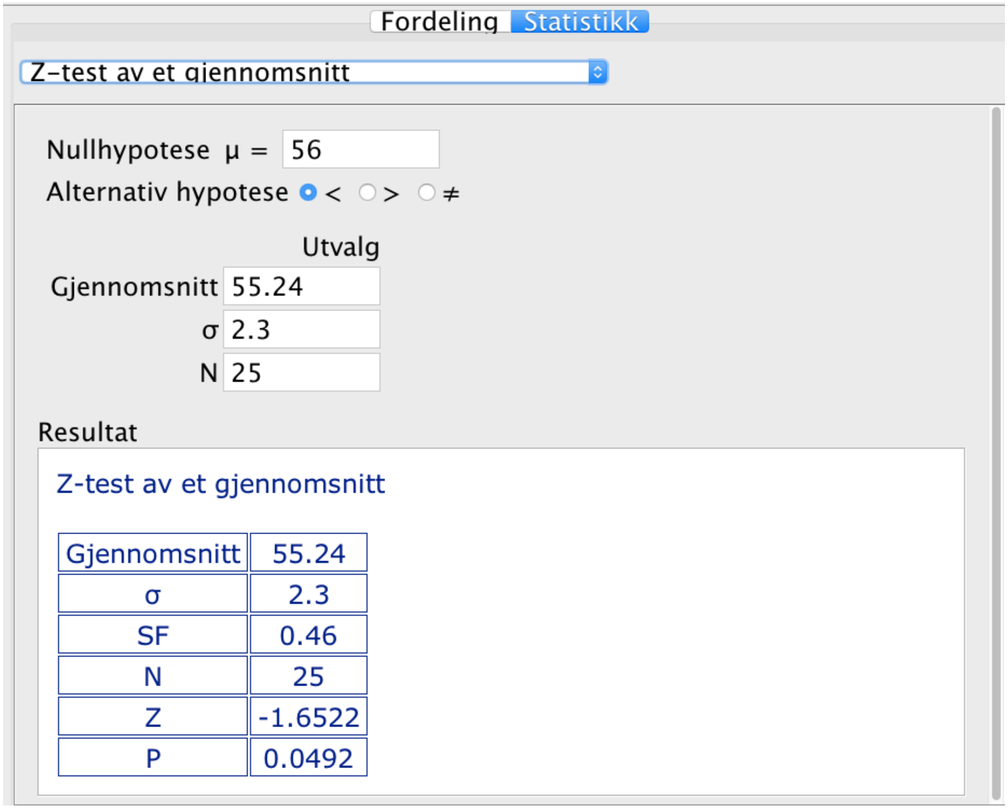
$$P(\bar{X} \leq 55) = \underline{\underline{0{,}0149 \approx 1{,}5\%}}$$

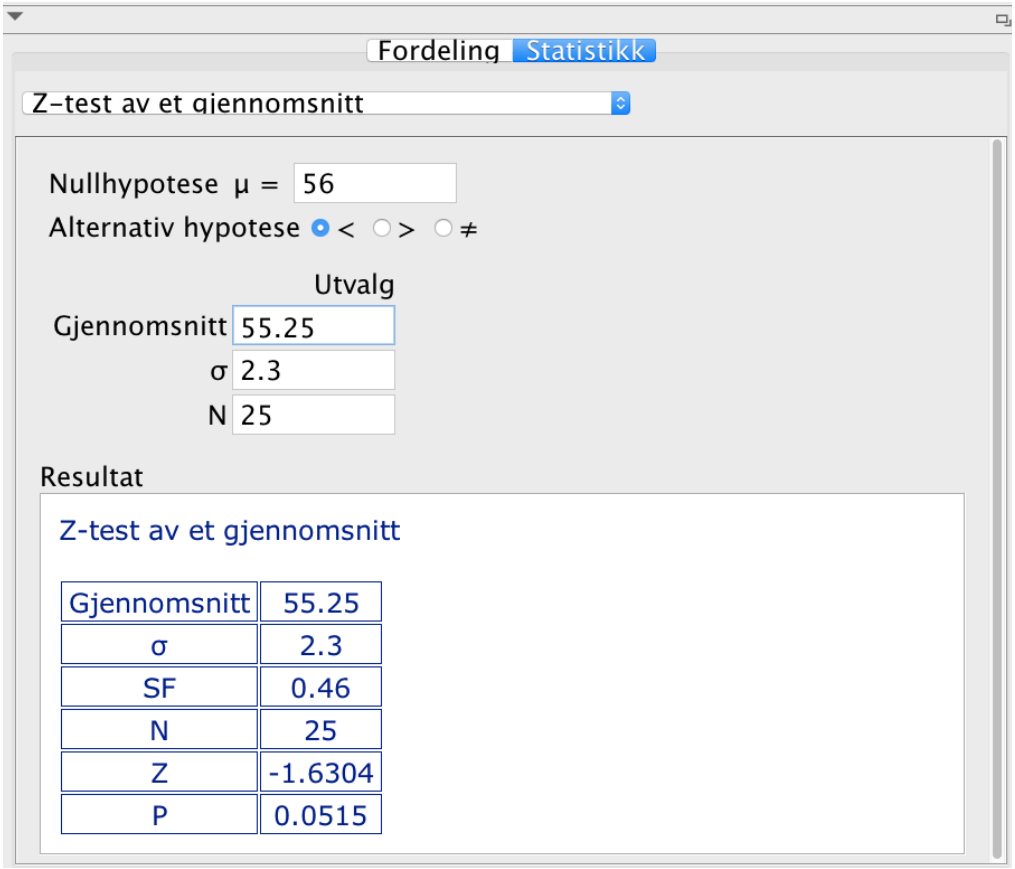
d)

$$H_0 : \mu = 56$$
$$\underline{\underline{H_A : \mu < 56}}$$

e) Bruker hypotesetest-verktøyet i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Legger inn de kjente verdiene og justerer gjennomsnittet, helt til *P*-verdien passerer 5%.

Den gjennomsnittlige verdien for bruddstyrken til senene i de 25 tilfeldig valgte spolene kan være ***høyst 55,24 kg*** dersom vi kan konkludere med at det er grunnlag for leverandørens mistanke.
(Se bildene på neste side).


Fordeling
Statistikk
Z-test av et gjennomsnitt
Nullhypotese μ = 56
Alternativ hypotese < > ≠
Utvalg
Gjennomsnitt 55.24
σ 2.3
N 25
Resultat
Z-test av et gjennomsnitt
Gjennomsnitt 55.24
σ 2.3
SF 0.46
N 25
Z -1.6522
P 0.0492


Fordeling
Statistikk
Z-test av et gjennomsnitt
Nullhypotese μ = 56
Alternativ hypotese < > ≠
Utvalg
Gjennomsnitt 55.25
σ 2.3
N 25
Resultat
Z-test av et gjennomsnitt
Gjennomsnitt 55.25
σ 2.3
SF 0.46
N 25
Z -1.6304
P 0.0515