Løsningsforslag eksamen R2 høsten 2020

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=\sin(2x)+\pi \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{2\cos(2x)}}$

b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= x\cdot\cos^2 x = x\cdot(\cos x)^2 \\
&\quad gir \\
g'(x) &= 1\cdot\cos^2 x + x\cdot 2(\cos x)(-\sin x) \\
&= \cos^2 x - 2x\cdot\cos x\cdot\sin x \\
&= \underline{\underline{\cos x(\cos x - 2x\cdot\sin x)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) $\int\left(\cos x+\frac{1}{x}\right)=\underline{\underline{\sin x+\ln|x|+C}}$

b) Bruker delvis integrasjon og lar $u'=e^{2x}$ og $v=x$

$$\begin{aligned}
\int x\cdot e^{2x}\,dx &= x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx \\
&= x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx \\
&= x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C}}
\end{aligned}$$

c)

$$u=x^2-2x-3$$

$$gir$$

$$\frac{du}{dx}=2x-2\Rightarrow dx=\frac{du}{2x-2}$$

$$så$$

$$\int\frac{2x-2}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{2x-2}{u}\frac{du}{2x-2}=\int\frac{1}{u}du=\underline{\underline{\ln\left|x^2-2x-3\right|+C}}$$

Oppgave 3

a)

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$gir$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in Z)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$$

Når vi skal ha $x \in [0, 2\pi]$, får vi:

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}}}$$

b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

Venstresiden er på formen $a\sin(cx) + b\cos(cx)$.

Jeg vil skrive den om til formen $A\sin(cx + \varphi)$

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$og$$

$$\tan\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Punktet $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ ligger i 4.kvadrant, så da har vi $\varphi = \frac{11\pi}{6}$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

$$2\sin\left(x + \frac{11\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Dette gir videre:

$$x + \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x + \frac{11\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in Z)$$

$$x = -\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

Når vi skal ha $x \in [0, 2\pi]$, får vi:

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi}}$$

Oppgave 4

$\alpha: \quad 2x-3y+z=13$

a) Setter inn koordinatene til A i venstresiden til likningen for planet α:
$2\cdot 4-3(-2)+(-1)=8+6-1=13$
Koordinatene til A passer i likningen, så A ligger i planet. Som skulle vises

Setter inn koordinatene til P i venstresiden til likningen for planet α:
$2\cdot 1-3\cdot 2+3=2-6+3=-1\neq 13$
Koordinatene til P passer ikke i likningen, så P ligger ikke i planet.
Som skulle vises

b) Vektoren $\vec{n}=[2,-3,1]$ er en normalvektor til planet α og dermed også en retningsvektor for linja ℓ.
Når vi også vet at linja går gjennom punktet $P(1,2,3)$, kan vi sette opp følgende parameterfremstilling:

$$\underline{\underline{\ell:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=3+t \end{cases}}}$$

Setter koordinatene i parameterfremstillingen inn i likningen for planet α:

$$\begin{aligned} 2(1+2t)-3(2-3t)+3+t&=13 \\ 2+4t-6+9t+3+t&=13 \\ 14t&=13-2+6-3 \\ 14t&=14 \\ t&=1 \end{aligned}$$

Skjæringspunktet S har koordinater (3,-1,4)

c)

$$\overrightarrow{AS}=\left[3-4,-1-(-2),4-(-1)\right]=\left[-1,1,5\right]$$

og

$$\overrightarrow{PS}=\left[3-,-1-2,4-3\right]=\left[2,-3,1\right]$$

Kjeglen har da radius $r=\left|\overrightarrow{AS}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+5^2}=\sqrt{27}$

og høyde $h=\left|\overrightarrow{PS}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$.

Nå kan jeg regne ut volumet av kjeglen:

$$V=\frac{\pi\cdot\left(\sqrt{27}\right)^2\cdot\sqrt{14}}{3}=\frac{27\pi\cdot\sqrt{14}}{3}=\underline{\underline{9\pi\cdot\sqrt{14}}}$$

Oppgave 5

$f(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) + 2$, der $a > 0$ og $b \in \left[0, 2\pi\right\rangle$

a) Den største verdien $\cos\left(\frac{\pi}{2}x - b\right)$ kan ha er 1.

Når grafen til *f* har toppunkt i (3,5), har vi $a + 2 = 5$, slik at $a = 3$.
Vi vet også at $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x - b\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x - b\right)$$

$$så$$

$$f'(3) = 0$$

$$gir$$

$$\frac{-3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - b\right) = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} - b = 0$$

$$b = \frac{3\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in Z)$$

$b \in \left[0, 2\pi\right\rangle$ gir da $b = \frac{\pi}{2} \vee b = \frac{3\pi}{2}$

$b = \frac{\pi}{2}$ gir $f(3) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 3\cos(\pi) + 2 = -3 + 2 = -1$

$b = \frac{3\pi}{2}$ gir $f(3) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 3\cos 0 + 2 = 3 + 2 = 5$

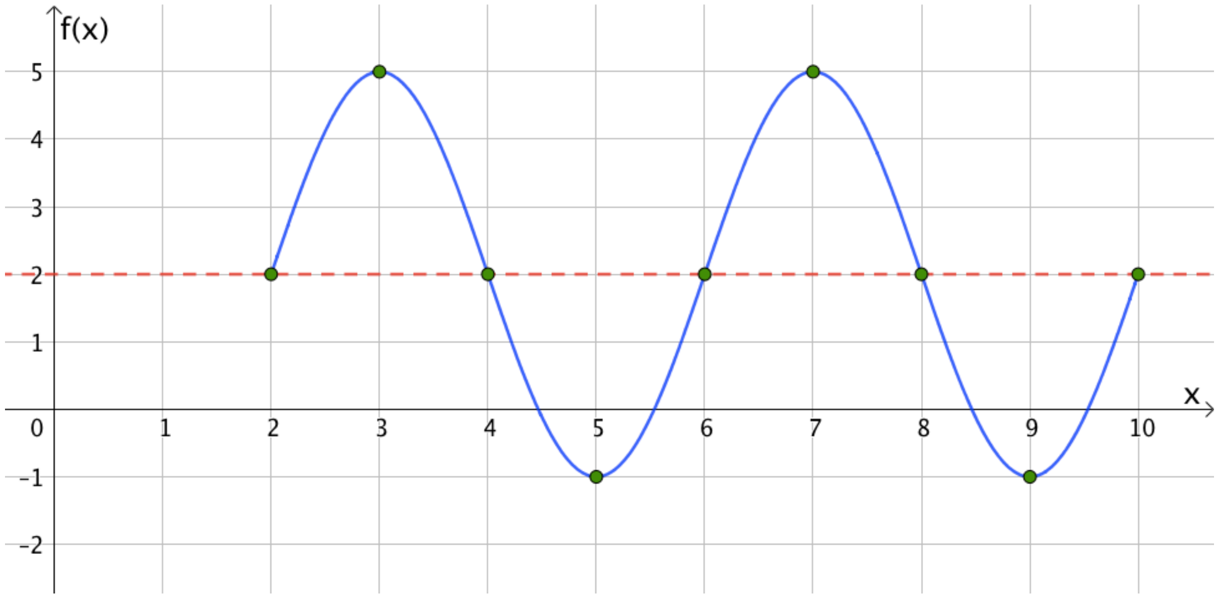
$$\underline{\underline{a = 3 \wedge b = \frac{3\pi}{2}}}$$

b) f har periode $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ og krysser likevektslinja på vei opp i $(2,2)$,

Skisserer grafen til *f* for $2 \le x \le 10$.
Jeg kan markere følgende punkter:
- (2,2), (4,2),(6,2), (8,2) og (10,2) som er skjæringspunkter med likevektslinja
- (3,5), (5,-1), (7,5) og (9,-1) som er topp- og bunnpunkter.

Tegner en jevn kurve gjennom disse punktene.

Skisse av grafen til $f(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{3\pi}{2}\right)+2 \quad , x\in[2,10]$



Oppgave 6

$y''-2y'+y=0$

a) Setter opp, og løser, karakteristisk likning.

$$r^2-2r+1=0$$
$$(r-1)^2=0$$
$$\text{gir}$$
$$r=1$$

Den karakteristiske likningen har én løsning, og da har vi at generell løsning er $y=A\cdot e^{1\cdot x}+B\cdot x\cdot e^{1\cdot x}=A\cdot e^{x}+B\cdot x\cdot e^{x}$, som skulle vises.

b) $y(0)=3$ gir $A=3$, så da har vi foreløpig at $y=3e^x+Bx\cdot e^x$.

$$y'=3e^x+B\cdot e^x+Bx\cdot e^x=(3+B+Bx)e^x$$
$$så$$
$$y'(0)=5$$
$$gir$$
$$3+B=5$$
$$B=2$$

$$\underline{\underline{A=3\wedge B=2}}$$

(Spesiell løsning, ved de gitte initialverdiene er da $y=3e^x+2xe^x$)

Oppgave 7

a) $k = \frac{3}{2}\cos x$

$x = \frac{\pi}{6}$ gir $k = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{27}}{4}$

Siden $\sqrt{27} > \sqrt{16} = 4$, ser vi at $\frac{\sqrt{27}}{4} > 1$.

$k > 1$, så rekka konvergerer *ikke*

$x = \frac{\pi}{3}$ gir $k = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Her har vi $-1 < k < 1$, så rekka konvergerer

Rekka konvergerer *ikke* for $x = \frac{\pi}{6}$, men konvergerer for $x = \frac{\pi}{3}$

Som skulle avgjøres.

b)

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{4}}$$

c)

$$\lim_{k\to -1}\frac{1}{1-k} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

og

$$\lim_{k\to 1}\frac{1}{1-k} \text{ eksisterer ikke}$$

$$\underline{\underline{S(x) = r \text{ har løsning for } r > \frac{1}{2}}}$$

Oppgave 8

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad , n \in N$$

Er $P(1)$ sann?

Venstre side: $(2\cdot 1-1)^2 = (2-1)^2 = 1^2 = 1$

Høyre side: $\dfrac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3} = \dfrac{1\cdot(2-1)(2+1)}{3} = \dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

$P(1)$ er sann!

Antar at påstanden er sann for $n = k$, der *k* er et vilkårlig naturlig tall.
Er da påstanden også sann for $n = k+1$?

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + \left(2(k+1)-1\right)^2 \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\
&= \frac{(2k+1)\left(k(2k-1) + 3(2k+1)\right)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left(2(k+1)-1\right)\left(2(k+1)+1\right)}{3}
\end{aligned}$$

Har vist at påstanden er sann for $n = k+1$, under forutsetning av at den er sann for $n = k$, der *k* er et naturlig tall.

Har dermed bevist ved induksjon at påstanden er sann for alle *n*.
Q.E.D.

Del 2

Oppgave 1

a) Her har vi ei aritmetisk rekke med ti ledd, der $a_1 = 5000$ og $a_{10} = 2500$.

$$S_{10} = \frac{5000+2500}{2}\cdot 10 = \frac{7500}{2}\cdot 10 = 3750\cdot 10 = 37500$$

<u>I følge modell 1 blir det samlede utslippet på 37 500 kg i løpet av tiårsperioden</u>.

b) Her har vi ei geometrisk rekke med ti ledd, der $a_1 = 5000$ og $k = \sqrt[9]{\frac{1}{2}}$

Bruker CAS til å regne ut S_{10}.

CAS

1	Sum(5000*((nrot(1/2, 9))^(n-1)), n, 1, 10)
	✓ $\sum_{n=1}^{10} 5000 \sqrt[9]{\frac{1}{2}}^{\,n-1}$
2	Sum(5000nrot(1 / 2,9)^(n - 1),n,1,10)
	$\approx$ **36226.682**

<u>I følge modell 2 blir det samlede utslippet på ca. 36 227 kg i løpet av tiårsperioden</u>.

c) Her har vi ei uendelig geometrisk rekke der $a_1 = 5000$ og $S = 50000$.

CAS

1	5000/(1-k)=50000
	✓ $\frac{5000}{1-k} = 50000$
2	5000 / (1 - k) = 50000
	Løs: $\left\{k = \frac{9}{10}\right\}$

$k = \frac{9}{10} = 0{,}9$, som er vekstfaktor med 10 % nedgang.

<u>Den laveste faste prosenten *p* bedriften kan kutte utslippene med er 10 %</u>

Oppgave 2

a) I og med at vinkelutslaget er 0,15 i det kula slippes, må vi ha $v(0)=0{,}15$.
Kula er i ro i det den slippes, så det er ikke noe endring i vinkelutslaget når $t=0$.
Da har vi $v'(0)=0$.
Som skulle forklares.

b)

CAS

1	LøsODE(y"=-9.81y/0.2, (0,0.15), (0,0))
	$\rightarrow\ y=\frac{3}{20}\cos\left(3x\frac{\sqrt{545}}{10}\right)$
2	y = 3 / 20 cos(3x sqrt(545) / 10)
	$\approx\ y=0.15\ \cos(7.004\,x)$

$$\underline{\underline{v(t)=0{,}15\cos(7t)}}$$

c) Bestemmer perioden til *v*:

$$p=\frac{2\pi}{7}=0{,}898\approx 0{,}9$$

Planpendelen har en svingetid på omtrent 0,9 sekunder

d) Tar utgangspunkt i *v*, men ønsker å justere slik at svingetiden blir 2 sekunder.
Da må perioden være 2.
Definerer da en funksjon $p(t)$, der perioden er 2, og løser likningen

$$p''(t)=-\frac{9{,}81}{L}\cdot p$$

4	p(t):=0.15*cos(pi*t)
	$\approx\ p(t)\ :=\ 0.15\ \cos(3.142\ t)$
5	Løs(p"(t)=-9.81*p/L, L)
	$\rightarrow\ \left\{L=\frac{981000000000000000000000}{98696044010906577398881}\right\}$
6	{L = 981000000000000000000000 / 98696044010906577398881}
	$\approx\ \{L=0.994\}$

Vi ser at lengda til sekundpendelen er omtrent 1 meter

Oppgave 3

a) Radiusen til kuleflaten er minste avstand fra S til planet α.

CAS

1	S:=(8,5,0) → $S := (8,5,0)$
2	α:=2x−3y+7z=5 → $\alpha: 2x - 3y + 7z = 5$
3	Avstand(S, α) → $2 \cdot \frac{\sqrt{62}}{31}$
4	2sqrt(62) / 31 ≈ 0.508

$$\underline{\underline{\text{Radius til kuleflata er } \frac{2\sqrt{62}}{31} \approx 0{,}508}}$$

b) Bestemmer først en likning for planet β og definerer T som er sentrum i kuleflaten:

CAS

1	A:=(1,2,−5) → $A := (1,2,-5)$
2	B:=(5,−2,1) → $B := (5,-2,1)$
3	C:=(t,1,4) → $C := (t,1,4)$
4	n:=Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C) → $n := \begin{pmatrix} -30 \\ 6t - 42 \\ 4t - 8 \end{pmatrix}$
5	β:=−30(x−1)+(6t−42)(y−2)+(4t−8)(z+5)=0 → $\beta: (y-2)\ (6t-42) + (z+5)\ (4t-8) - 30\ (x-1) = 0$
6	T:=(7,6,−3) → $T := (7,6,-3)$

Jeg forsøkte så å bruke kommandoen *"Avstand(<Punkt>, <Objekt>)"* og sette denne avstanden lik 2, men fikk kun løst denne likningen numerisk (ikke eksakt). Likningen for planet β kan skrives på formen $ax + by + cz + d = 0$.

Bruker CAS til å definere/regne ut d og bruker formelen for avstand fra punkt til plan. Nå fikk jeg eksakte løsninger når jeg satte denne avstanden lik 2.

7	d:=-30(-1)+(-2)(6t-42)+5(4t-8) $\rightarrow$ $d := 8t + 74$
8	abs(-30*7+(6t-42)*6+(4t-8)*(-3)+d)/sqrt((-30)²+(6t-42)²+(4t-8)²)=2 ✓ $\frac{\lvert -30 \cdot 7 + (6t-42) \cdot 6 + (4t-8)\ (-3) + d \rvert}{\sqrt{(-30)^2 + (6t-42)^2 + (4t-8)^2}} = 2$
9	abs(-30 (7) + (6t - 42) (6) + (4t - 8) (-3) + d) / sqrt((-30)² + (6t - 42)² + (4t - 8)²) = 2 Løs: $\left\{t = \frac{149}{17}, t = 17\right\}$

$$\underline{\underline{\text{Planet } \beta \text{ tangerer kuleflata når } t = \frac{149}{17} \vee t = 17}}$$

Oppgave 4

a)

CAS

1	f(x):=-0.3*sin(1.9x-4.1)+0.25 $\rightarrow$ $f(x) := \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \sin\left(\frac{19}{10} x - \frac{41}{10}\right)$
2	pi*Integral(f², 0, 1.5) $\approx$ **0.715**

Det er plass til 0,715dm^3, altså omtrent 7 dL, vann i glasset om det fylles helt opp.

b)

CAS

1	f(x):=-0.3*sin(1.9x-4.1)+0.25 $\rightarrow$ $f(x) := \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \sin\left(\frac{19}{10} x - \frac{41}{10}\right)$
2	g(x):=f+0.03 $\rightarrow$ $g(x) := -\frac{3}{10} \sin\left(\frac{1}{10} (19x - 41)\right) + \frac{7}{25}$
3	pi*IntegralMellom(g², f², 0, 1.5) $\approx$ **0.101**

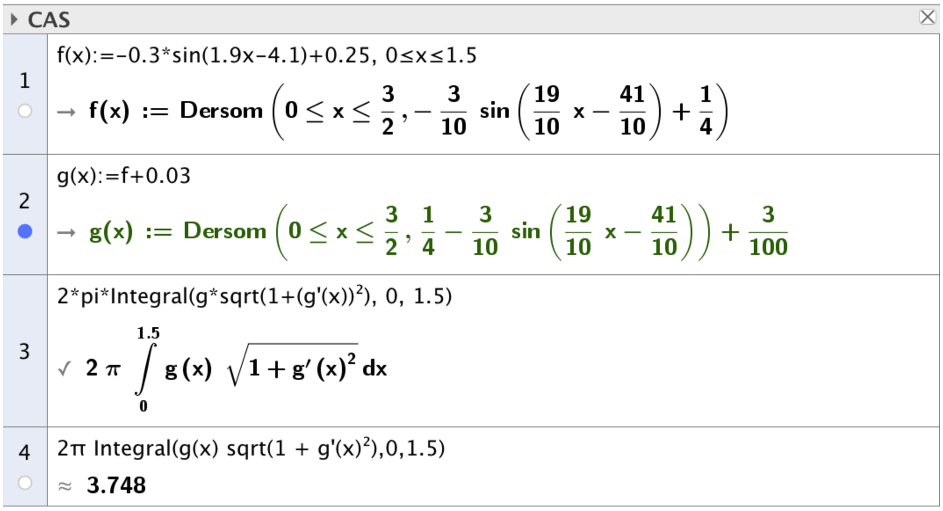
Volumet av materialet glasset (uten stetten) er laget av er omtrent 0,1dm^3

c) *Her kan jeg ikke se noen annen måte å bruke svaret fra b) direkte, enn å rett og slett dele volumet på tykkelsen. Altså at vi nærmest tenker at vi kan brette ut glasset og få et slags prisme som er 0,03 dm høyt, slik at overflatearealet utgjør grunnflaten i "prismet".*

$$\frac{0.101dm^3}{0.03dm} = 3{,}37dm^2$$

En tilnærmet verdi for overflatearealet av glasset er 3,37dm^2
(Denne tilnærmingen avviker omtrent 10 % fra svaret i d))

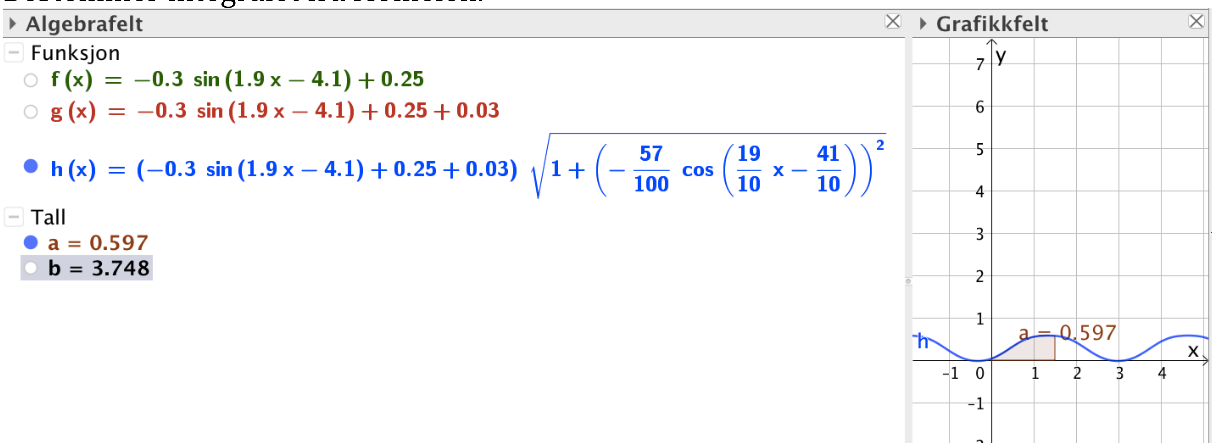
d) *CAS taklet ikke denne før jeg oppga definisjonsområdet når jeg definerte funksjonen f. Derfor er det med her, og ikke over.*



<u>Overflatearealet av utsiden til glasset er omtrent 3,75 dm^2</u>

Alternativ løsning av 4d:

Det er ikke krav til bruk av CAS her, så kan også bruke grafikkfeltet.
Bestemmer integralet fra formelen.



Tallet a er integralet fra formelen, mellom $x = 0$ og $x = 1{,}5$. Når jeg multipliserer dette med 2π, får jeg tallet b, som da er overflatearealet i kvadratdesimeter.