Matematikk Økonomi

Oppgave 1

En forretning har over lang tid variert prisen på en bestemt vare og funnet at etterspørselen pr. dag er gitt ved

$$x(p) = p^2 - 80 \cdot p + 1300, \quad 5 \leq p \leq 15$$

a) Bestem prisen slik at etterspørselen blir 600 enheter.

b) Vis at etterspørselselastisiteten blir

$$E(p) = \frac{2p^2 - 80p}{p^2 - 80p + 1300}$$

Beregn $E(p)$ når $p = 12$.

c) Bestem p slik at etterspørselen blir nøytralelastisk. Hva blir bruttoinntekten pr. dag (I) i dette tilfellet?

d) Skriv opp det generelle uttrykket for bruttoinntekten pr. dag, I. Hva blir største verdi for I ? Skisser kurven for I i området $5 \leq p \leq 15$.

Løsning

a)

$$
\begin{aligned}
x(p) = 600 \Rightarrow p^2 - 80 \cdot p + 1300 = 600 \\
p^2 - 80 \cdot p + 1300 - 600 = 0 \\
p^2 - 80 \cdot p + 700 = 0 \\
p = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 700}}{2 \cdot 1} = \frac{80 \pm 60}{2} = 40 \pm 30 \\
p = 40 + 30 = 70 \quad \text{(ikke gyldig løsning fordi 70>15)} \quad \text{eller} \quad p = 40 - 30 = 10
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x'(p) = 2p^2 - 80 + 0 = 2p^2 - 80 \\
E_p(x(p)) = p \cdot \frac{x'(p)}{x(p)} = p \cdot \frac{2 \cdot p - 80}{p^2 - 80 \cdot p + 1300} = \frac{2 \cdot p^2 - 80p}{p^2 - 80 \cdot p + 1300} \\
E_p(12) = 12 \cdot \frac{2 \cdot 12^2 - 80 \cdot 12}{12^2 - 80 \cdot 12 + 1300} = -1,39 < -1 \quad \text{Etterspørselen er elastisk}
\end{aligned}
$$

c)

Etterspørselen er elastisk hvis elastisiteten er lik -1

$$
\begin{aligned}
E_p = -1 \Rightarrow \frac{2 \cdot p^2 - 80p}{p^2 - 80 \cdot p + 1300} = -1 \quad \text{Kryss-multiplisering} \\
2 \cdot p^2 - 80p = -p^2 + 80 \cdot p - 1300 \\
2 \cdot p^2 - 80p + p^2 - 80 \cdot p + 1300 = 0 \\
3p^2 - 160p + 1300 = 0 \quad \text{Løs andregradsligning} \\
p = \frac{160 \pm \sqrt{(-160)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1300}}{2 \cdot 3} = \frac{160 \pm 100}{6} = 40 \pm 30 \\
p = \frac{160 + 100}{6} = 43,33 \quad \text{(ikke gyldig løsning fordi 43,33>15)} \\
\text{eller} \\
p = \frac{160 - 100}{6} = 10 \\
I(p) = p \cdot x(p) = p^3 - 80p^2 + 1300p \\
I(10) = (10)^3 - 80 \cdot (10)^2 + 1300 \cdot (10) = 6000
\end{aligned}
$$

d)

Generelt er Inntekt= pris*etterspørsel så inntekt er gitt ved,

$$I(p) = p \cdot x(p) = p \cdot (p^2 - 80 \cdot p + 1300) = p^3 - 80p^2 + 1300p$$

For å finne størst inntekt må vi finne maksimumsverdien for funksjonen I(p)ved å derivere den så sette den deriverte lik null så finne ekstremalpunkter

$I'(p) = 3p^2 - 2 \cdot 80p + 1300 = 3p^2 - 160p + 1300$

$I'(p) = 0 \Rightarrow 3p^2 - 160p + 1300 = 0$ Løs andregradsligning

$p = \dfrac{160 \pm \sqrt{(-160)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1300}}{2 \cdot 3} = \dfrac{160 \pm 100}{6} = 40 \pm 30$

$p = \dfrac{160 + 100}{6} = 43,33$ (ikke gyldig løsning fordi 43,33>15)

eller

$p = \dfrac{160 - 100}{6} = 10$

$I''(p) = 6p - 160$

$I''(10) = 6 \cdot 10 - 160 = -100 < 0 \Rightarrow$ Punktet (10,I(10)=6000) er et topppunkt via andrederiverttest

Vi må også sjekke endepunktene

$I(5) = (5)^3 - 80 \cdot (5)^2 + 1300 \cdot (5) = 4625$

$I(15) = (15)^3 - 80 \cdot (15)^2 + 1300 \cdot (15) = 4875$

Når vi sammenligner funksjonsverdiene i topppunktet og i endepunktene , ser vi at største verdien er i topppunktet som er 6000.

En skisse av I(p)er gitt nedenfor (Brukte Geogebra),


Inntekt I(p)
Pris (p)
6100
6000
5900
5800
5700
5600
5500
5400
5300
5200
5100
5000
4900
4800
4700
4600
4500
4400
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

Figure 1