Løsningsforslag eksamen R2 våren 2021

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=\cos(2x+1) \Rightarrow f'(x)=-\sin(2x+1)\cdot 2=\underline{\underline{-2\sin(2x+1)}}$

b)

$$g(x)=\cos(2x)\cdot\sin x$$

$$g'(x)=-\sin(2x)\cdot 2\cdot\sin x+\cos(2x)\cdot\cos x$$

$$=\underline{\underline{\cos x\cdot\cos(2x)-2\sin x\cdot\sin(2x)}}$$

Oppgave 2

a) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{3x}\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}\ln|x|+C}}$

b) Bruker delvis integrasjon:

$$\int x\cdot\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+C$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C}}$$

c) Bruker variabelskifte. Finner først det ubestemte integralet.

$$u=(\sin x+1)\text{ gir }\frac{du}{dx}=\cos x\Leftrightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int(\sin x+1)^2\cdot\cos x\,dx=\int u^2\cdot\cos x\cdot\frac{du}{\cos x}=\int u^2\,du=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(\sin x+1)^3+C$$

Det bestemte integralet regnes ut øverst på neste side

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x + 1)^2 \cdot \cos x \, dx = \left[\frac{1}{3}(\sin x + 1)^3 \right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{3}\left[(\sin x + 1)^3 \right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \right)^3 - (\sin 0 + 1)^3 \right)$$
$$= \frac{1}{3}\left((1+1)^3 - 1^3 \right)$$
$$= \frac{1}{3}(8-1)$$
$$= \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

Oppgave 3

a) $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$, så nullpunktene til f er $x = 0$ og $x = 1$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$\underline{\underline{\text{Arealet av flatestykket } F \text{ er } \frac{1}{6}}}$

b) $f(x)^2 = (x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$

$$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 \right) dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$
$$= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 \right)$$
$$= \pi \left(\frac{6}{30} - \frac{15}{30} + \frac{10}{30} \right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{30}}}$$

Oppgave 4

a)

$$2\sin\left(2x-\pi\right)=\sqrt{3}$$

$$\sin\left(2x-\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x-\pi=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \vee 2x-\pi=\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi \quad , \ k\in Z$$

$$2x=\frac{4\pi}{3}+k\cdot 2\pi \vee 2x=\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+k\cdot \pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot \pi$$

$$x\in\left[0,2\pi\right] \text{ gir da: } \underline{\underline{x=\frac{2\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{3}\vee x=\frac{11\pi}{6}}}$$

b)

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$u=\cos x$$

$$\text{gir}$$

$$2u^2+u-1=0$$

$$u=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}$$

$$så$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\vee \cos x=-1$$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi \vee x=\pi+k\cdot 2\pi \quad , k\in Z$$

$$x\in\left[0,2\pi\right] \text{ gir da: } \underline{\underline{x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}\vee x=\pi}}$$

Oppgave 5

$a_1=s_1=3\cdot 1^2+4\cdot 1=7$ og $a_2=s_2-s_1=3\cdot 2^2+4\cdot 2-7=12+8-7=13$

Da har vi

$$d=a_2-a_1=13-7=6$$

$$så$$

$$a_3=a_2+d=13+6=\underline{\underline{19}}$$

Oppgave 6

Rekka konvergerer mot 6, så $\frac{b_1}{1-k}=6 \Rightarrow b_1=6(1-k)=6-6k$

Bruker videre at summen av de tre første leddene er $\frac{38}{9}$.

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \frac{38}{9} \\
b_1 \cdot \frac{k^3-1}{k-1} &= \frac{38}{9} \\
(6-6k)\cdot \frac{k^3-1}{k-1} &= \frac{38}{9} \\
-6(k-1)\cdot \frac{k^3-1}{k-1} &= \frac{38}{9} \\
-6(k^3-1) &= \frac{38}{9} \\
k^3-1 &= \frac{38}{9(-6)} \\
k^3 &= -\frac{38}{54}+1 \\
k^3 &= -\frac{19}{27}+\frac{27}{27} \\
k^3 &= \frac{8}{27} \\
k &= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \\
k &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Da kan vi bestemme b_4:

$$b_4 = b_1 \cdot k^{4-1} = (6-6k)\cdot k^3 = \left(6-6\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{8}{27} = (6-4)\cdot\frac{8}{27} = 2\cdot\frac{8}{27} = \underline{\underline{\frac{16}{27}}}$$

Oppgave 7

a) Dette er en separabel differensiallikning.

$$y' = 2x \cdot y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{1}{y^2}\ dy = 2x\ dx$$

Da kan vi integrere på begge sider:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 2x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = x^2 + c_2$$

$$-1 = y\left(x^2 + c_2 - c_1\right)$$

$$-\frac{1}{x^2 + c_2 - c_1} = y \qquad \left(c_1 - c_2 = C\right)$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{C - x^2}}}$$

b) I punktet (2,1) har vi $y' = 2 \cdot 2 \cdot 1^2 = 4$

Bruker ettpunktsformelen:

$$y - 1 = 4\left(x - 2\right)$$

$$y = 4x - 8 + 1$$

$$\underline{\underline{y = 4x - 7}}$$

Oppgave 8

a) Vi må ha:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -1 \pm 2i$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4c} = -2 \pm 4i$$

Det betyr at $b = 2$, slik at $\sqrt{4 - 4c} = 4i$

$$\sqrt{4-4c}=4i$$
$$\sqrt{4-4c}=\sqrt{-16}$$
$$4-4c=-16$$
$$4c=4+16$$
$$4c=20$$
$$c=5$$

$$\underline{\underline{b=2\wedge c=5}}$$

b)

$$y(0)=2$$
$$gir$$
$$e^{-0}\left(A\cos(2\cdot 0)+B\sin(2\cdot 0)\right)=2$$
$$\left(A\cdot 1+B\cdot 0\right)=2$$
$$A=2$$

$$y'(x)=-e^{-x}\left(2\cos(2x)+B\sin(2x)\right)+e^{-x}\left(-4\sin(2x)+2B\cos(2x)\right)$$
$$så$$
$$y'(0)=6$$
$$gir$$
$$-e^{-0}\left(2\cos 0+B\sin 0\right)+e^{-0}\left(-4\sin 0+2B\cos 0\right)=6$$
$$-2+2B=6$$
$$2B=8$$
$$B=4$$
$$\underline{\underline{A=2\wedge B=4}}$$

Oppgave 9

a)

$$\overrightarrow{AB}=\left[1-1,2-1,1-3\right]=\left[0,1,-2\right]\text{ og }\overrightarrow{AC}=\left[-1-1,3-1,2-3\right]=\left[-2,2,-1\right]$$
$$og$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left[1\cdot(-1)-(-2)\cdot 2,-\left(0\cdot(-1)-(-2)(-2)\right),0\cdot 2-1(-2)\right]=\left[3,4,2\right]$$
$$så$$
$\vec{n}=\left[3,4,2\right]$ er en normalvektor for α.

Bruker $\vec{n}$ og punktet A til å bestemme en likning for planet α.

$$3(x-1)+4(y-1)+2(z-3)=0$$
$$3x-3+4y-4+2z-6=0$$
$$\underline{\underline{\alpha: 3x+4y+2z=13}}$$

b)

$y=z=0$ gir $x=\dfrac{13}{3}$

$x=z=0$ gir $y=\dfrac{13}{4}$

$x=y=0$ gir $z=\dfrac{13}{2}$

$\underline{\underline{\text{Planet skjærer } x\text{-aksen i } \left(\frac{13}{3},0,0\right),\ y\text{-aksen i } \left(0,\frac{15}{4},0\right) \text{ og } z\text{-aksen i } \left(0,0,\frac{13}{2}\right)}}$

c) Ved å bruke definisjonen av skalarproduktet, kan jeg finne cosinus til vinkelen mellom en koordinatakse og $\vec{n}$.
Jo større vinkelen mellom aksen og $\vec{n}$ er, jo mindre er vinkelen mellom aksen og planet.

Lar *u* være vinkelen mellom *x*-aksen og $\vec{n}$:

$$\cos u = \frac{[1,0,0]\cdot[3,4,2]}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

Lar *v* være vinkelen mellom *y*-aksen og $\vec{n}$:

$$\cos v = \frac{[0,1,0]\cdot[3,4,2]}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

Lar *w* være vinkelen mellom *z*-aksen og $\vec{n}$:

$$\cos w = \frac{[0,0,1]\cdot[3,4,2]}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Når cosinus til en vinkel endrer seg fra 1 mot -1, endrer vinkelen seg fra 0° mot 180°. Den blir altså større og større etter hvert som cosinusverdien minsker.
Av de vinklene vi har sett på her, er det *w* som har minst cosinusverdi, og dermed er den største av de tre vinklene. Det betyr samtidig at aksen som danner vinkel *w* med $\vec{n}$ er den aksen som danner minst vinkel med planet α.

$\underline{\underline{\text{Det er } z\text{-aksen som danner minst vinkel med planet } \alpha}}$

Del 2

Oppgave 1

a) Summen av sluttverdiene til de 40 innskuddene danner ei geometrisk rekke med 40 ledd, der $a_1 = 1000$ og $k = 1{,}0025$.

CAS

1: 1000*(1.0025^40-1)/(1.0025-1)

$$\checkmark\ 1000 \cdot \frac{1.0025^{40} - 1}{1.0025 - 1}$$

2: 1000(1.0025^40 - 1) / (1.0025 - 1)

$$\approx\ 42013.2041$$

<u>Rannveig hadde 42013,20 kroner på kontoen like etter innskudd nummer 40.</u>

b) Endrer a_1 til $1000 \cdot 1{,}0025$, slik at vi nå får med renten på siste innskudd i summen av sluttverdiene. Vi ser altså på hvor mye penger hun har på konto like *før* neste innskudd.

CAS

1: 1000*1.0025*(1.0025^n-1)/(1.0025-1)=50000

$$\checkmark\ 1000 \cdot 1.0025 \cdot \frac{1.0025^{n} - 1}{1.0025 - 1} = 50000$$

2: 1000 (1.0025) (1.0025^n - 1) / (1.0025 - 1) = 50000

Løs: $\left\{ n = \frac{\ln(401) - \ln(451)}{\ln(400) - \ln(401)} \right\}$

3: {n = (ln(401) - ln(451)) / (ln(400) - ln(401))}

$$\approx\ \{n = 47.0611\}$$

Beløpet på kontoen passerer 50 000 kroner idet Rannveig foretar innskudd nummer 48.

<u>Det gikk 47 måneder, altså 3 år og 11 måneder, fra første innskudd og frem til beløpet på kontoen passerte 50000 kroner.</u>

c)

CAS

1: 1000*(k^40-1)/(k-1)=47900

$$\checkmark\ 1000 \cdot \frac{k^{40} - 1}{k - 1} = 47900$$

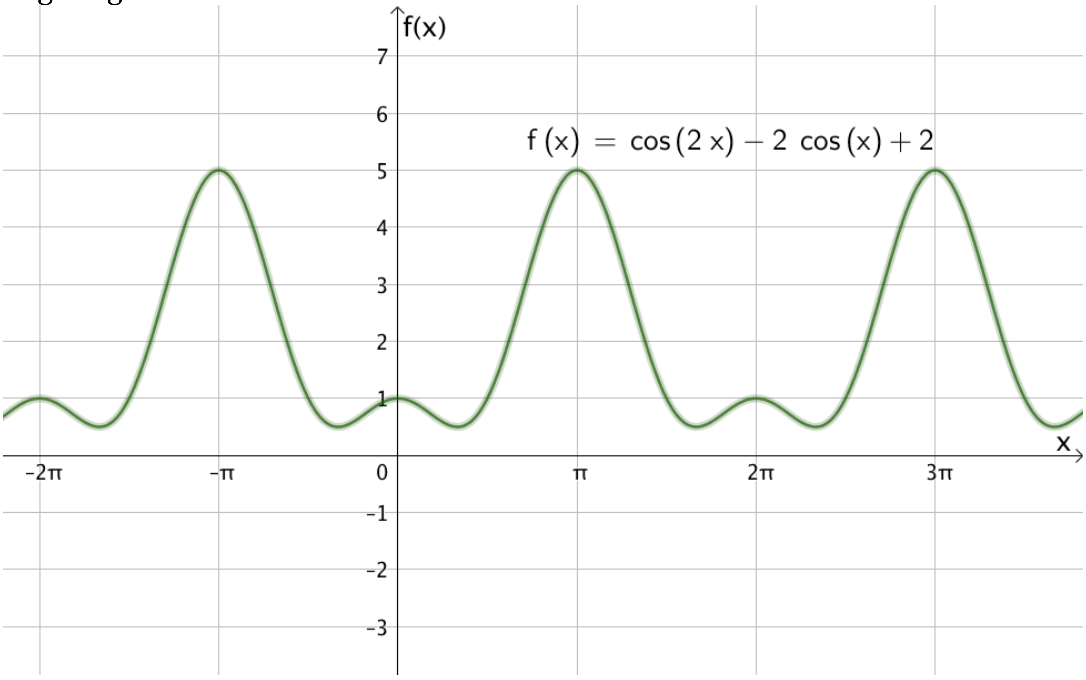
2: 1000(k^40 - 1) / (k - 1) = 47900

Løs: $\{k = 1.00901\}$

<u>Den månedlige rentefoten måtte vært på 0,90 %</u>

Oppgave 2

a) Tegner grafen i GeoGebra:



Ser at $f\left(x\right)=f\left(x+2\pi\right)$.

$\underline{\underline{\text{Perioden er } 2\pi}}$

b) Funksjonsuttrykket til *f* slik det er gitt øverst i oppgaveteksten, og grafen på bildet over, forteller at grafen til *f* går gjennom $\left(0,1\right)$, $\left(\pi,5\right)$ og $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.

CAS

1	f(x):=a*cos²(x)+b*cos(x)+c → $\mathbf{f(x) := a\ cos^2(x) + b\ cos(x) + c}$
2	f(0)=1 → $\mathbf{a + b + c = 1}$
3	f(pi)=5 → $\mathbf{a - b + c = 5}$
4	f(pi/2)=1 → $\mathbf{c = 1}$
5	{$2, $3, $4} Løs: $\mathbf{\{\{a = 2, b = -2, c = 1\}\}}$

$\underline{\underline{a=2 \wedge b=-2 \wedge c=1}}$

Oppgave 3

a) $y = z = 0$, innsatt i likningen for planet α, gir $x = 4$

$x = z = 0$, innsatt i likningen for planet α, gir $y = 4$

$x = y = 0$, innsatt i likningen for planet α, gir $z = \dfrac{4}{t}$

$$\underline{\underline{A = (4,0,0)\ ,\ B = (0,4,0)\ \text{og}\ C = \left(0,0,\frac{4}{t}\right)}}$$

b)

CAS

1 A:=(4,0,0)
→ $A := (4, 0, 0)$

2 B:=(0,4,0)
→ $B := (0, 4, 0)$

3 C:=(0,0,4/t)
→ $C := \left(0, 0, \frac{4}{t}\right)$

4 AB:=Vektor(A, B)
→ $AB := \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

5 AC:=Vektor(A, C)
→ $AC := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{4}{t} \end{pmatrix}$

6 AO:=Vektor(A, (0,0))
→ $AO := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7 abs((AB⊗AC)*AO)/6=10
Løs: $\left\{t = -\frac{16}{15}, t = \frac{16}{15}\right\}$

I rad 1-6 definerer jeg punkter og vektorer som er nødvendige i beregningen.
(Pyramiden har toppunkt i origo, så derfor er posisjonsvektoren til A med i rad 6)
I rad 7 setter løser volumet av pyramiden lik 10, og løser likningen i CAS.

$$\underline{\underline{\text{Volumet av pyramiden er 10 når } t = \pm\frac{16}{15}}}$$

c)

CAS

1	α:=x+y+t*z=4 → $\alpha: t\,z + x + y = 4$
2	S:=(-1,2,1) → $S := (-1, 2, 1)$
3	Løs[Avstand(S, α)=2,t] → $\left\{t = \frac{-2\sqrt{3}-3}{3}, t = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right\}$

Planet α tangerer kuleflaten K når $t = \frac{-2\sqrt{3}-3}{3} \vee t = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

Oppgave 4

a)

Driften av motoren bidrar til en konstant, negativ vekstfart for *V* på 0,70 liter per mil. Det gir leddet $-0,70$.

Lekkasjen i tanken bidrar til en negativ vekstfart som er proporsjonal med *V*, der proporsjonalitetskonstanten er 0,01. Siden vekstfarten er *negativ*, får vi da leddet $-0,01 \cdot V$.

Initialbetingelsen $V(0) = 60$ viser til at tanken rommer 60 liter og er full når turen starter.

Samlet gir dette følgende differensiallikning som kan brukes til å bestemme et uttrykk for $V(x)$: $V' = -0,70 - 0,01 \cdot V \;,\quad V(0) = 60$.

Som skulle begrunnes.

b) Erstatter *V'* og *V* med *y* og *y'* når jeg løser differensiallikningen i CAS:

CAS

1	LøsODE(y'=-0.70-0.01y, (0,60)) → $y = 130\,e^{-\frac{x}{100}} - 70$

$V(x) = 130 \cdot e^{-0,01x} - 70$

c)

CAS

1	LøsODE(y'=-0.70-0.01y, (0,60)) → $y = 130\,e^{-\frac{x}{100}} - 70$
2	V(x):=HøyreSide($1) → $V(x) := 130\,e^{-\frac{1}{100}x} - 70$
3	V(40) ≈ 17.14

Det er omtrent 17 liter bensin igjen på tanken når han har kjørt 40 mil d)

3	V=0 Løs: $\left\{x = -100 \ln\left(\frac{7}{13}\right)\right\}$
4	{x = -100 ln(7 / 13)} $\approx \{x = 61.9\}$
5	60-0.7*61.9 $\approx$ **16.67**

I rad 3 og 4 finner jeg ut hvor langt han har kjørt når tanken er tom.
I rad 5 finner jeg ut hvor mye han ville hatt igjen på tanken dersom denne var tett, som da tilsvarer svinnet forårsaket av lekkasjen.

<u>Sverre kan maksimalt kjøre 61,9 mil før tanken er tom.</u>
<u>Da har 16,67 liter bensin forsvunnet grunnet lekkasjen i tanken.</u>

e)

CAS

1	LøsODE(y'=-0.70-0.01y, (0,30)) $\approx y = 100\, e^{-0.01x} - 70$
2	V(x):=HøyreSide($1) $\rightarrow V(x) := 100\, e^{-\frac{1}{100}x} - 70$
3	V(20) $\approx$ **11.87**
4	30-11.8730753078 $\approx$ **18.13**
5	18.1269246922*2 $\approx$ **36.25**

I rad 1 løser jeg likningen med den nye initialbetingelsen (han starter med 30 liter på tanken).
I rad 2 er det nye uttrykket for $V(x)$.
I rad 3 og 4 finner jeg hvor mye bensin han bruker på de første 20 milene, og siden de neste 20 er tilsvarende situasjon, er det bare å doble dette forbruket.

<u>Med den nye strategien, vil Sverre bruke 36,25 liter bensin, om han kjører 40 mil.</u>

(Han vil altså spare 6-7 liter, sammenlignet med å starte med full tank)