

# Løsningsforslag eksamen R1 våren 2020

---

## Del 1

### Oppgave 1

$$\text{a) } f(x) = x^6 + 3x^5 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{6x^5 + 15x^4 + \frac{1}{x}}}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 \cdot e^{2x-1} \\ g'(x) &= 4x \cdot e^{2x-1} + 2x^2 \cdot 2e^{2x-1} = 4x \cdot e^{2x-1} + 4x^2 \cdot e^{2x-1} = \underline{\underline{4x(1+x)e^{2x-1}}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{4x-1}{x+2} \\ h'(x) &= \frac{4(x+2) - (4x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{4x+8-4x+1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{9}{(x+2)^2}}} \end{aligned}$$

### Oppgave 2

$$\text{a) } \ln(x^2) + \ln x = 12$$

Siden likningen inneholder leddet  $\ln x$ , vet vi at vi må ha  $x > 0$ , så det er ikke noe problem å bruke 1. logaritmesetning her.

$$2\ln x + \ln x = 12$$

$$3\ln x = 12$$

$$\ln x = 4$$

$$\underline{\underline{x = e^4}}$$

b)

$$e^{2x} - e^x = 6$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

$$u = e^x$$

gir

$$u^2 - u - 6 = 0$$

*Her kan man bruke abc-formelen*

$$(u-3)(u+2) = 0$$

så

$$u = 3 \vee u = -2$$

Siden  $e^x > 0$  for alle  $x$ , må vi velge den positive løsningen.

$$e^x = 3$$

$$\underline{\underline{x = \ln 3}}$$

### Oppgave 3

- a) Prøver å "lage"  $\vec{b}$  ved å multiplisere  $\vec{a}$  med et tall.  
Ser da hva jeg må multiplisere  $3\vec{v}$  med for å få  $5\vec{v}$ .

$$\frac{5}{3} \cdot \vec{a} = \frac{10}{3} \vec{u} + 5\vec{v}.$$

Ser da at  $\frac{5}{3} \cdot \vec{a} = \vec{b}$  når vi setter  $t = \frac{10}{3}$ .

$$\underline{\underline{\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ når } t = \frac{10}{3}}}$$

- b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (t \cdot \vec{u} + 5\vec{v}) = 0$$

$$2t \cdot \vec{u}^2 + 10 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 3t \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 15 \cdot \vec{v}^2 = 0$$

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = 3^2 = 9 \text{ og } \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = 2^2 = 4$$

Vi har også fått oppgitt at  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ .

$$2t \cdot 9 + 10(-2) + 3t(-2) + 15 \cdot 4 = 0$$

$$18t - 20 - 6t + 60 = 0$$

$$12t = 20 - 60$$

$$t = -\frac{40}{12}$$

$$t = -\frac{10}{3}$$

$$\underline{\underline{\vec{a} \perp \vec{b} \text{ når } t = -\frac{10}{3}}}$$

### Oppgave 4

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

- a) Dersom  $P(1) = 0$ , vet vi at  $(x - 1)$  er faktor i  $P(x)$ .

$$P(1) = 6 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 6 - 5 - 2 + 1 = 0, \text{ så divisjonen går opp.}$$

b)

$$6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 : (x - 1) = 6x^2 + x - 1$$

$$\underline{6x^3 - 6x^2}$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$\underline{x^2 - x}$$

$$-x + 1$$

$$\underline{-x + 1}$$

$$0$$

Faktoriserer så  $6x^2 + x - 1$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

gir

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

så

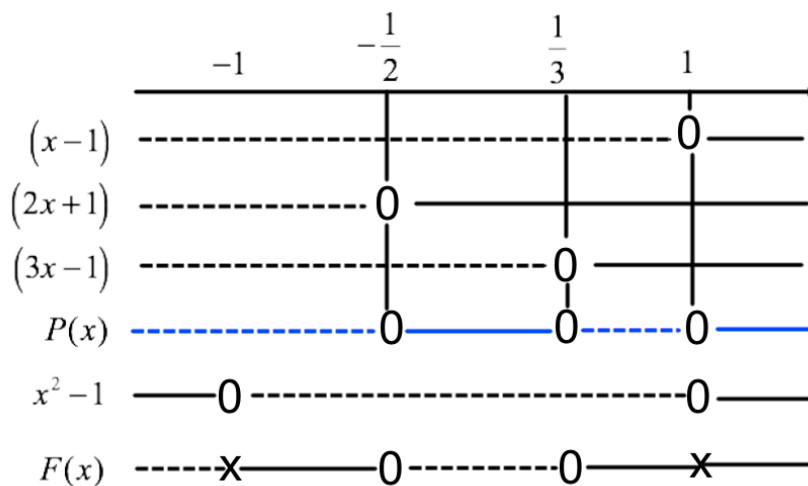
$$x_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ og } x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

slik at

$$P(x) = 6(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-1) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-1)(2x+1)(3x-1)$$

Som skulle vises

- c) Det kan være verdt å merke seg med én gang at  $F(x)$  ikke er definert for  $x = \pm 1$   
Vi tegner fortegnslinjer.



$$\underline{\underline{F(x) \geq 0 \text{ når } x \in \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{3}, 1 \right) \cup \langle 1, \rightarrow \rangle}}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)(3x-1)}{x+1} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(2x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)(3x-1)}{x+1}$$

Her vil vi få null i nevner om vi setter inn  $x = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 3, \text{ men } \lim_{x \rightarrow -1} F(x) \text{ eksisterer ikke}$$

### Oppgave 5

a)

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

Per kan legge 56 ulike kombinasjoner av bøker i sekken sin

- b) Her har vi en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. Per har 8 bøker totalt, og 3 av dem vil være riktige akkurat denne dagen. Hva er sannsynligheten for at Per har tatt med seg 3 riktige og én feil?

$$P(\text{Riktig bok til alle fagene denne dagen}) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{1 \cdot 5}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{5}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{1}{14}$$

- c) Minst to av fagene betyr her 2 av fagene eller alle 3 fagene denne dagen.

$$P(\text{Riktig bok til 2 av fagene denne dagen}) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{3}{7}$$

Har allerede regnet ut sannsynligheten for riktig antall bøker i alle tre fag, så

$$P(\text{Riktig bok til minst 2 av fagene denne dagen}) = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{6}{14} + \frac{1}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

## Oppgave 6

- a) I trapeset er lengdene til de parallelle sidene henholdsvis  $3 - (-3) = 6$  og  $x - (-x) = 2x$ . Høyden er  $f(x)$ .

Vi kan nå regne ut arealet av trapeset, som i dette tilfellet er gitt ved  $F(x)$  for  $0 < x < 3$ .

$$F(x) = \frac{6+2x}{2} \cdot f(x) = (3+x)(9-x^2) = 27 - 3x^2 + 9x - x^3 = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$$

Som skulle vises

- b)

$$F'(x) = -3x^2 - 6x + 9$$

så

$$F'(x) = 0$$

gir

$$-3x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$-3(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$-3(x-1)(x+3) = 0$$

Siden vi har  $0 < x < 3$ , må vi her velge løsningen  $x = 1$ .

Funksjonsuttrykket til  $F'(x)$ , forteller at grafen til  $F'(x)$  er en parabel som vender den hule siden ned. Den vil derfor gå fra negativ til positiv i nullpunktet  $x = -3$  og fra positiv til negativ i nullpunktet  $x = 1$ .

Det betyr at  $(1, F(1))$  er toppunkt på grafen til  $F$ , og at  $x = 1$  vil gi det største arealet trapeset kan ha.

*Her kunne jeg alternativt tegnet fortegnslinjer eller brukt andrederiverttesten for å konstatere at  $x=1$  gir toppunkt.*

$$F(1) = -1^3 - 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 27 = -1 - 3 + 9 + 27 = 32$$

Det største arealet trapeset kan ha er 32

## Oppgave 7

$\angle BCA$  er en periferivinkel som spanner over samme bue som periferivinkelen  $\angle BDA$ , så  $u = \angle BDA = 65^\circ$ .

$\angle BSA$  er en sentralvinkel som spanner over samme bue som periferivinkelen  $\angle BDA$ , så  $w = 2 \cdot \angle BDA = 2 \cdot u = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$

$$v = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - (180^\circ - 35^\circ - 65^\circ) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\underline{\underline{u = 65^\circ \wedge v = 100^\circ \wedge w = 130^\circ}}$$

## Oppgave 8

- a) Linja  $\ell$  gitt ved likningen  $y = 2x + 1$  kan ha følgende parameterfremstilling

$$\ell: \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

$D$  ligger på  $\ell$ , så kan si at vi har  $D(t, 2t + 1)$ , slik at

$$\overrightarrow{AD} = [t - (-1), 2t + 1 - 1] = [t + 1, 2t], \text{ som skulle vises}$$

- b) Alle sidene i firkanten er like lange, så  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}|$ , noe jeg bruker videre.

$$\overrightarrow{CD} = [t - 7, 2t + 1 - 5] = [t - 7, 2t - 4]$$

Da har vi:

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}|$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2$$

$$(t + 1)^2 + (2t)^2 = (t - 7)^2 + (2t - 4)^2$$

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 = t^2 - 14t + 49 + 4t^2 - 16t + 16$$

$$5t^2 + 2t + 1 = 5t^2 - 30t + 65$$

$$2t + 30t = 65 - 1$$

$$32t = 64$$

$$t = 2$$

Setter vi inn  $t = 2$  for punktet  $D$ , får vi  $D(2, 5)$ .

Posisjonsvektoren til punktet  $B$  er gitt ved

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CD} = [2 - 7, 5 - 5] = [-5, 0]$$

så

$$\overrightarrow{OB} = [-1, 1] - [-5, 0] = [-1 - (-5), 1 - 0] = [4, 1]$$

Koordinatene til punktet  $B$  er  $(4, 1)$  og koordinatene til punktet  $D$  er  $(2, 5)$

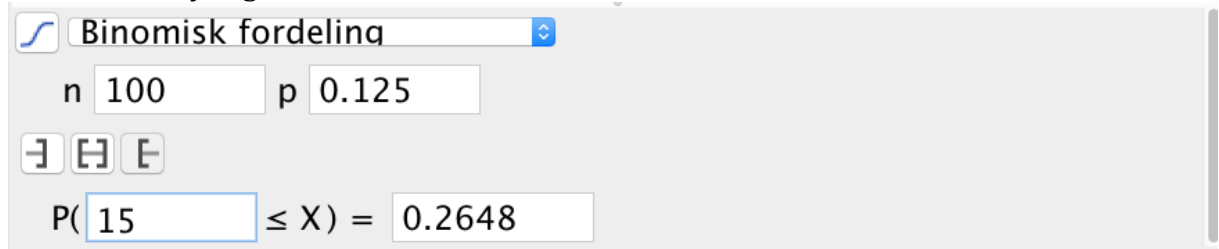
## Del 2

### Oppgave 1

- a) I et binomisk forsøk er alle delforsøkene uavhengige av hverandre. Det betyr at man må ta utgangspunkt i at dersom en EL-bil passerer, vil ikke dette ha noe betydning for om den neste som passerer også er en EL-bil.

Man må også ta utgangspunkt i at det er en gitt sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer er EL-bil. Maria må altså ta utgangspunkt i at det er 12,5 % sannsynlighet for at en tilfeldig bil som passerer henne er EL-bil, med bakgrunn i teksten hun leste på forhånd.

- b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



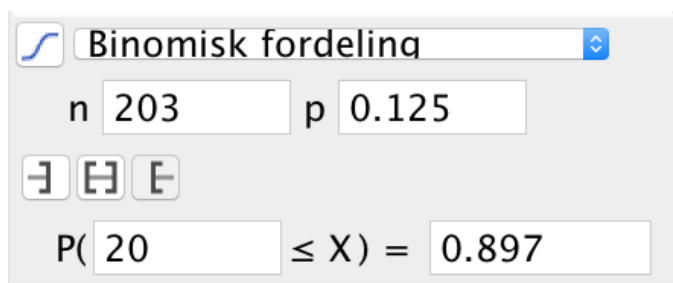
Binomisk fordeling

n 100 p 0.125

$P(15 \leq X) = 0.2648$

Det er omtrent 26,5 % sannsynlig at minst 15 av første 100 bilene er EL-bil

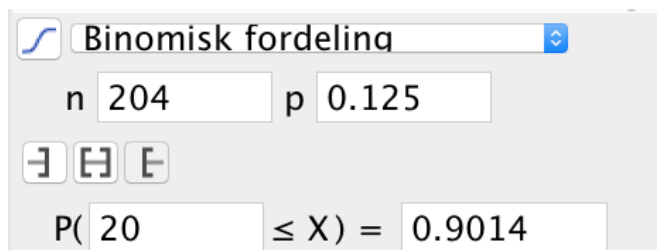
- c) Lar  $X \geq 20$  og justerer  $n$  til jeg ser at  $P(20 \leq X)$  passerer 0,9.  
( $p$  forblir 0,125)



Binomisk fordeling

n 203 p 0.125

$P(20 \leq X) = 0.897$



Binomisk fordeling

n 204 p 0.125

$P(20 \leq X) = 0.9014$

Vi ser at sannsynligheten passerer 90 % når antallet biler går fra 203 til 204.

Maria må føre statistikk over *minst* 204 biler for at det skal være mer enn 90 % sannsynlig at minst 20 av dem er EL-biler.

## Oppgave 2

- a) Starter med å bestemme stigningstallet til linja gjennom punktene  $(-1, p(-1))$  og  $(3, p(3))$ .

$$\frac{p(3) - p(-1)}{3 - (-1)} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 - 1 - ((-1)^2 + 3(-1) - 1)}{4} = \frac{9 + 9 - 1 - (1 - 3 - 1)}{4} = \frac{17 - (-3)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Stigningstallet til tangenten i punktet  $(1, 3)$  er gitt ved  $p'(1)$ .

$$p'(x) = 2x + 3$$

så

$$p'(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

Siden linja gjennom  $(-1, p(-1))$  og  $(3, p(3))$  har samme stigningstall som tangenten i punktet  $(1, 3)$ , er linja og tangenten parallelle. Som skulle vises

b)

CAS	
1	$q(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $\rightarrow q(x) := a x^2 + b x + c$
2	$q'(x)$ $\rightarrow 2 a x + b$
3	$(q(x+h) - q(x-h)) / (2h)$ $\checkmark \frac{q(x+h) - q(x-h)}{2h}$
4	$2a x + b == (q(x+h) - q(x-h)) / (2h)$ $\rightarrow \text{true}$

, Som skulle vises

Eventuelt

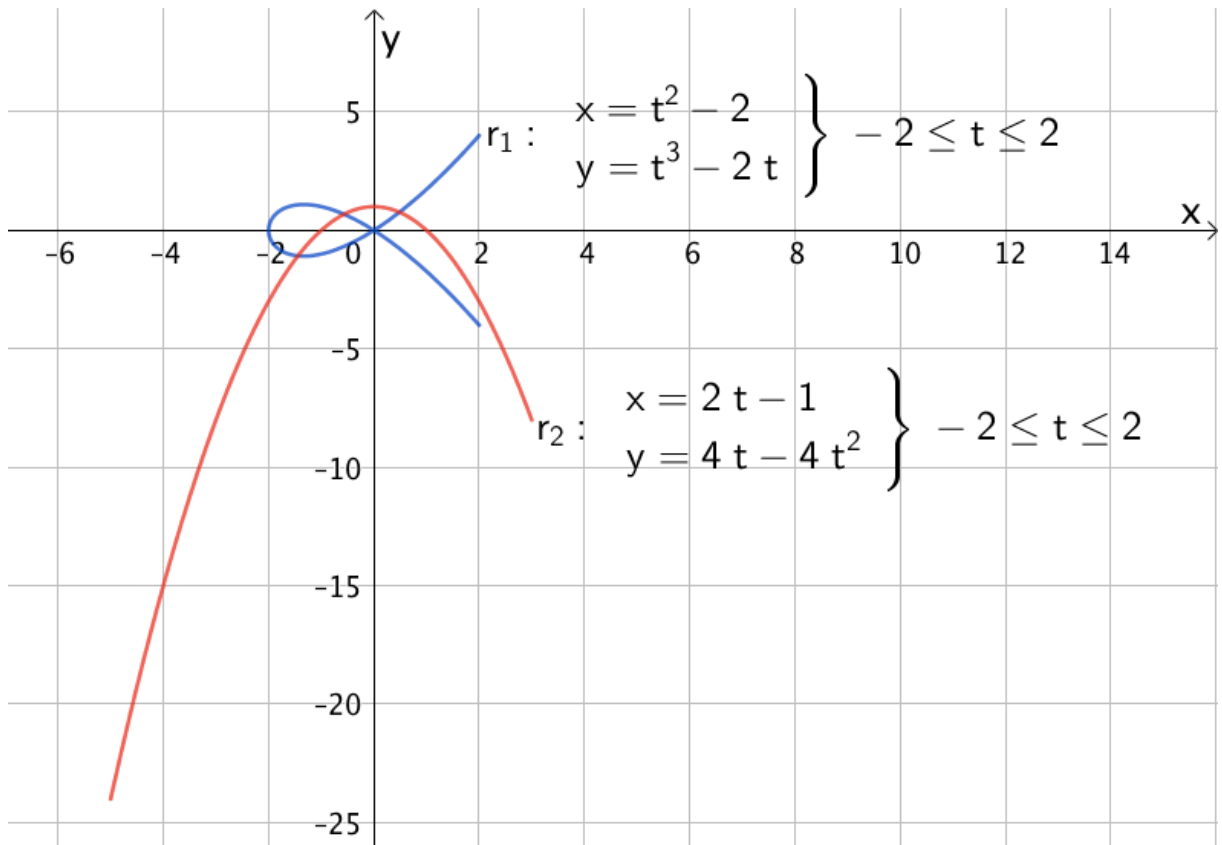
CAS	
1	$q(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $\rightarrow q(x) := a x^2 + b x + c$
2	$q'(x)$ $\rightarrow 2 a x + b$
3	$(q(x+h) - q(x-h)) / (2h)$ $\checkmark \frac{q(x+h) - q(x-h)}{2h}$
4	$(q(x+h) - q(x-h)) / (2h)$ Faktoriser: $2 x a + b$



## Oppgave 3

a) Bruker kommandoen

"Kurve(&lt;Uttrykk&gt;, &lt;Uttrykk&gt;, &lt;Parametervariabel&gt;, &lt;Start&gt;, &lt;Slutt&gt;)"

i GeoGebra og tegner grafene til  $\vec{r}_1(t)$  og  $\vec{r}_2(t)$ .

b)

CAS	
1	$v_1 = \text{abs}(r_1'(-1))$ $\rightarrow v_1 = \sqrt{5}$
2	$v_1 = \text{sqrt}(5)$ $\approx v_1 = 2.236$
3	$v_2 = \text{abs}(r_2'(-1))$ $\rightarrow v_2 = 2\sqrt{37}$
4	$v_2 = 2\text{sqrt}(37)$ $\approx v_2 = 12.166$

Banefarten til partiklene er henholdsvis ca. 2,2 m/s og ca. 12,2 m/s når  $t = -1$

- c) Definerer fartsvektorene til de to partiklene. Hvis to vektorer er parallelle *og* har samme retning, er vinkelen mellom vektorene  $0^\circ$ .

CAS	
1	$v_1(t) := \text{Vektor}(2t, 3t^2 - 2)$ $\rightarrow v_1(t) := \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 2 \end{pmatrix}$
2	$v_2(t) := \text{Vektor}(2, -8t + 4)$ $\rightarrow v_2(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ -8t + 4 \end{pmatrix}$
3	Bruker definisjonen av skalarprodukt til å bestemme t når vinkelen er 0 grader
4	$v_1 \cdot v_2 =  v_1   v_2  \cos(0^\circ)$ $\checkmark v_1 \cdot v_2 =  v_1   v_2  \cos(0^\circ)$
5	$v_1 \cdot v_2 =  v_1   v_2  \cos(0^\circ)$ $\text{Løs: } \left\{ t = \frac{\sqrt{26} + 2}{11} \right\}$
6	$\{t = (\text{sqrt}(26) + 2) / 11\}$ $\approx \{t = 0.65\}$

De to partiklene har samme fartsretning ved tidspunktet  $t = 0.65$

- d) Definerer avstanden mellom partiklene og finner ut når denne er minst.

CAS	
1	$d(t) := \text{abs}(r_2(t) - r_1(t))$ $\rightarrow d(t) := \sqrt{(-t^2 + 2t + 1)^2 + (-t^3 - 4t^2 + 6t)^2}$
2	$d'(t) = 0$ $\text{Løs: } \{t = -4.53, t = -3.93, t = -0.05, t = 0.67, t = 1.17\}$
3	Tre av løsningene over er innenfor det aktuelle tidsrommet
4	$d(-0.05)$ $\approx 0.95$
5	$d(0.67)$ $\approx 2.7$
6	$d(1.17)$ $\approx 1.97$

Den minste avstanden mellom partiklene, innenfor de 4 sekundene, er 0,95 cm.

**Oppgave 4**

- a)  $\triangle ADC$  er rettvinklet og deler en vinkel med  $\triangle ABC$ , så  $\triangle ADC$  og  $\triangle ABC$  er formlike.

$\triangle BDC$  er rettvinklet og deler en vinkel med  $\triangle BDC$ , så  $\triangle ADC$  og  $\triangle ABC$  er formlike.

Speilingene som er beskrevet i oppgaveteksten forteller oss at

- $\triangle AEB$  er kongruent med  $\triangle ABC$
- $\triangle CBF$  er kongruent med  $\triangle BDC$ , som igjen er formlik med  $\triangle ABC$
- $\triangle ACG$  er kongruent med  $\triangle ADC$ , som igjen er formlik med  $\triangle ABC$

Siden alle trekantene  $AEB$ ,  $CBF$  og  $ACG$  er formlike med  $\triangle ABC$ , må de også være formlike med hverandre. Som skulle grunngis.

- b) Her er  $k$  forholdet mellom høyden og grunnlinja i trekantene. Siden de tre trekantene  $AEB$ ,  $CBF$  og  $ACG$  er formlike, skal dette forholdet være likt for alle disse.

Vi kan da si at  $k = \frac{h_1}{c} = \frac{h_2}{a} = \frac{h_3}{b}$ .

Dette gir  $h_2 = k \cdot a$  og  $h_3 = k \cdot b$ , som skulle grunngis.

- c) Ut fra figuren og opplysningene vi har fått oppgitt, har vi at

$$A_{\triangle CBF} + A_{\triangle ACG} = A_{\triangle AEB}$$

$$\frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2} = \frac{c \cdot h_1}{2}$$

$$a \cdot k \cdot a + b \cdot k \cdot b = c \cdot k \cdot c$$

$$k \cdot a^2 + k \cdot b^2 = k \cdot c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vi har dermed bevist Pythagoras' setning