

Løsningsforslag til eksamen i Matematikk R1 V2013

Del 1

Oppgave 1

$$\begin{aligned}A'(r) &= \pi \cdot 2r = \underline{\underline{2\pi r}} \\ V'(r) &= \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = \underline{\underline{4\pi r^2}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

- a) Vi bruker kjerneregelen med $x^2 - 1$ som kjerne.

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{3 \cdot 2x}{x^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{6x}{x^2 - 1}}}$$

- b) Vi bruker brøkregelen.

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{(2x^2)' \cdot e^x - 2x^2 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{4xe^x - 2x^2 e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{(4x - 2x^2)e^x}{(e^x)^2} = \underline{\underline{\frac{4x - 2x^2}{e^x}}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

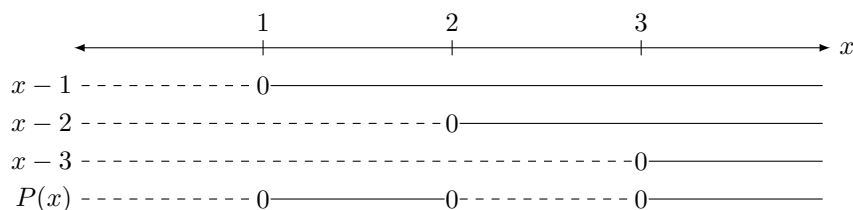
- a) $P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = \underline{\underline{0}}$

- b) Siden $P(1) = 0$ vil $P(x)$ ha $(x - 1)$ som faktor.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^3 - \quad x^2} \\ - 5x^2 + 11x - 6 \\ \underline{- 5x^2 + \quad 5x} \\ 6x - 6 \\ \underline{6x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x^2-2x-3x+(-2)(-3)) = \underline{\underline{(x-1)(x-2)(x-3)}}$$

- c) Vi tegner fortegnslinje, og ser at $P(x) \leq 0$ når $\underline{\underline{x \leq 1}}$ eller $\underline{\underline{2 \leq x \leq 3}}$.



Oppgave 4

$$\begin{aligned}\ln(a^2 \cdot b) - 2 \ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right) &= (\ln a^2 + \ln b) - 2 \ln a - (\ln 1 - \ln b) \\ &= 2 \ln a + \ln b - 2 \ln a - 0 + \ln b = \underline{\underline{2 \ln b}}\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi ser at f er sammenhengende, så f er kontinuerlig for $x \in \underline{\underline{\langle -1, 4 \rangle}}$.

Vi ser at f har en plutselig endring i momentan vekstfart ved $x = 2$, så funksjonen er ikke deriverbar der. f er dermed deriverbar når $x \in \underline{\underline{\langle -1, 2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle}}$.

Oppgave 6

Vi finner den andrederiverte til f .

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 12x \\ f''(x) &= 6x + 12\end{aligned}$$

Siden den andrederiverte er lineær vil den skifte fortegn i nullpunktet, som vi enkelt ser ligger ved $x = -2$. Dermed vil f ha et vendepunkt her.

$$\begin{aligned}f(-2) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 - 2 = -8 + 24 - 2 = 14 \\ f'(-2) &= 3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12\end{aligned}$$

Vendetangenten har altså stigningstall -12 og går gjennom punktet $(-2, 14)$. Ettpunktsformelen gir oss at likningen blir

$$\begin{aligned}y - 14 &= -12(x - (-2)) \\ y &= -12x - 24 + 14 \\ y &= \underline{\underline{-12x - 10}}\end{aligned}$$

Oppgave 7

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = [2, 3] \cdot [-6, 4] = (2)(-6) + (3)(4) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

b) $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b} \Rightarrow [3, 11] = k[2, 3] + t[-6, 4] \Rightarrow [3, 11] = [2k - 6t, 3k + 4t]$.

Dette gir oss likningssettet $2k - 6t = 3 \wedge 3k + 4t = 11$.

Vi omformer den første likningen til $k = 3t + \frac{3}{2}$, og setter inn i den andre.

$$\begin{aligned} 3\left(3t + \frac{3}{2}\right) + 4t &= 11 \\ 9t + \frac{9}{2} + 4t &= 11 \\ 18t + 9 + 8t &= 22 \\ 26t &= 13 \\ t &= \frac{1}{2} \Rightarrow k = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Konstruksjonsforklaring:

1. Markerer punktet O , og slår en sirkel med radius på 5,0 cm.
2. Tegner inn en diameter på sirkelen, og lar endepunktene være A og B .
3. Konstruerer en normal på AB i O . Normalen skjærer sirkelen i C .
4. Trekker linjene AC og BC , og konstruerer midtpunktet D på AC .
5. Setter passerspissen i D og enden i A og trekker halvsirkelen med AC som diameter.

Se vedlegg 1 for konstruksjonen.

Del 2

Oppgave 1

Generelt har vi at hvis et polynom har $x = a$ som nullpunkt så vil $(x - a)$ være en faktor i polynomet. Dermed fører det at f har nullpunktene $x = -1$, $x = 1$ og $x = 3$ til at funksjonen vil være delelig med de oppgitte faktorene.

En eventuell fjerde faktor i f vil være en konstant a , siden en tredjegradsfunksjon kun inneholder tre førstegradsfaktorer. Dermed er $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) = \underline{\underline{a(x^2 - 1)(x - 3)}}$.

At $(0, 12)$ ligger på grafen til f betyr at

$$f(0) = 12 \Rightarrow a(0^2 - 1)(0 - 3) = a(-1)(-3) = 3a = 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$$

Oppgave 2

- a) Siden M_1 er midtpunktet på AB så gir midtpunktformelen oss at

$$M_1 = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \underline{\underline{\left(3, \frac{3}{2} \right)}}$$

På samme måte blir

$$M_2 = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = \underline{\underline{(4, 3)}} \quad \text{og}$$
$$M_3 = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \underline{\underline{\left(2, \frac{5}{2} \right)}}$$

- b) Vi regner ut retningsvektorer til linjene

$$\overrightarrow{AM_2} = [4-1, 3-1] = [3, 2]$$
$$\overrightarrow{CM_1} = \left[3-3, 4-\frac{3}{2} \right] = \left[0, \frac{5}{2} \right]$$

Siden $\overrightarrow{CM_1}$ er parallell med y -aksen bruker vi $[0, 1]$ som retningsvektor.

Dermed får linja gjennom A med retningsvektoren $[3, 2]$ parameterframstillingen

$$\underline{\underline{x = 1 + 3t \wedge y = 1 + 2t}}$$

og linja gjennom C med retningsvektoren $[0, 1]$ får parameterframstillingen

$$\underline{\underline{x = 3 \wedge y = 4 + t}}$$

- c) Vi løser oppgaven i Geogebra ved å legge inn punktene A , B og C og bruke verktøyet *Mangekant* til å tegne $\triangle ABC$. Deretter bruker vi verktøyet *Midtpunkt* til å markere M_1 , M_2 og M_3 , og *Linjestykke mellom to punkt* for å tegne inn medianene. Verktøyet *Skjæring mellom to objekt* gir oss at T har koordinatene $\underline{\underline{\left(3, \frac{7}{3} \right)}}$.

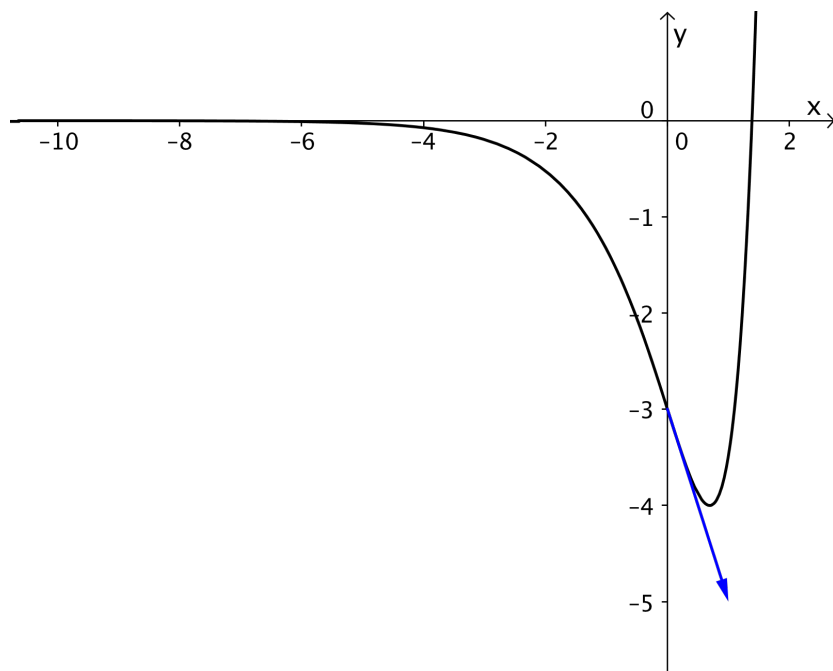
Se vedlegg 2 for konstruksjonsforklaring.

Oppgave 3

- a) Tegnet grafen i Geogebra med kommandoen $\mathbf{r=Kurve}[\ln(t), t^2-4t, t, 0, 100]$.

Grafen skjærer y -aksen når $x = \ln t = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 4(1) = -3$ og x -aksen når $y = t(t-4) = 0 \Rightarrow t = 4$ (siden $t > 0$) $\Rightarrow x = \ln 4$.

Vi har altså skjæringspunkter i $(\ln 4, 0)$ og $(0, -3)$.



- b) $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[\frac{1}{t}, 2t - 4 \right]$. Vi har topp- og bunnpunkter i punkter der fartsvektoren er parallell med x -aksen, altså der $y = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$. Siden $\vec{v}(1) = [1, -2]$ vil fartsvektoren før dette peke nedover, altså har vi et bunnpunkt når $t = 2$.

Koordinatene til punktet blir $(\ln 2, (2)^2 - 4(2)) = (\ln 2, -4)$.

Vektoren er tegnet inn ved kommandoen `Vektor[r(1), r(1)+(1,-2)]` i Geogebra.

- c) Vi kan skrive fartsvektoren som $\vec{v}(t) = [t^{-1}, 2t - 4]$. Vi får

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [-t^{-2}, 2] = \left[-\frac{1}{t^2}, 2 \right]$$

Siden $-\frac{1}{t^2}$ blir mindre og mindre jo større t er vil $\vec{a}(t) \rightarrow [0, 2]$ når $t \rightarrow \infty$.

Vi kommer altså nærmere og nærmere en konstant akselerasjon i positiv y -retning.

Oppgave 4

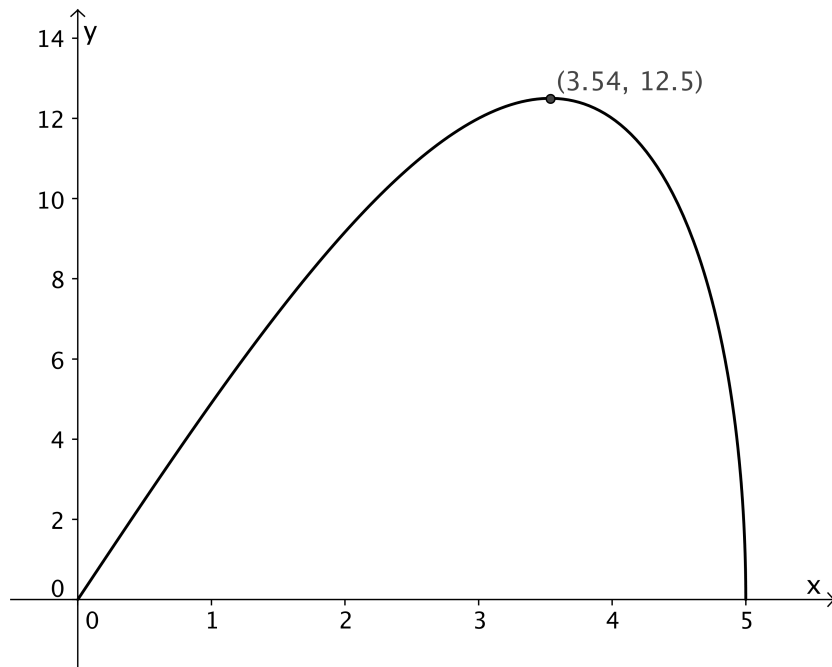
- a) Pytagoras' læresetning gir oss $y = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$. Arealet til rektangelet blir da

$$T(x) = xy = \underline{\underline{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}}$$

x og y må begge være større enn null. Dermed får vi

$$x > 0 \wedge y = \sqrt{25 - x^2} > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge 25 > x^2 \Rightarrow \underline{\underline{0 < x < 5}}$$

- b) Vi tegner grafen til T i Geogebra med kommandoen $T(x)=\text{Funksjon}[x \text{ sqrt}(25-x^2), 0, 5]$.



Kommandoen **Ekstremalpunkt**[$T, 0, 5$] gir oss toppunktet $(3,54, 12,5)$, altså har vi det største arealet når $x = 3,54$. y er da $\sqrt{25 - (3,54)^2} = 3,53$. Vi ser at vi har det største arealet når firkanten er et kvadrat (x og y er ikke helt like, men dette skyldes avrunding).

- c) Omkretsen er $O(x) = 2y + 2x = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$. Vi deriverer denne.

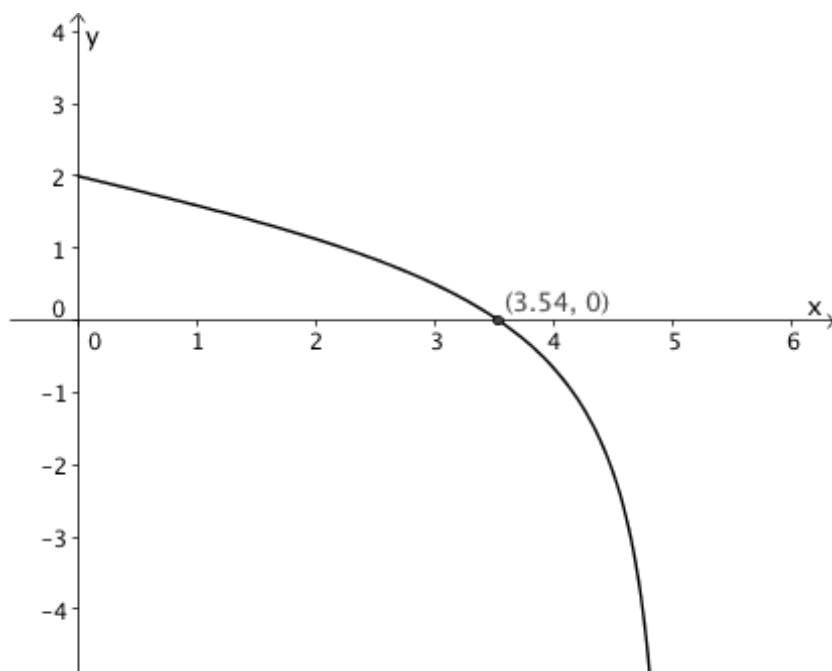
$$\begin{aligned} O'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25 - x^2}} \cdot (25 - x^2)' + 2 \\ &= \frac{2(-2x)}{2 \cdot \sqrt{25 - x^2}} + 2 \\ &= 2 - \frac{2x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Vi tegner grafen til den deriverte i Geogebra med kommandoen

$O'(x)=\text{Funksjon}[2-(2x)/\text{sqrt}(25-x^2), 0, 5]$

og finner nullpunktet ved kommandoen **Nullpunkt**[$O', 3, 4$].

Vi ser at den deriverte endrer fortegn fra positivt til negativt i $x = 3,54$, altså har omkretsfunksjonen sin største verdi for denne x -verdien. Siden dette er samme svar som i oppgave b er det et kvadrat som gir den største omkretsen.



Oppgave 5

a) Vi innfører disse hendingene.

R_i : Vi trekker en rød kule på den i -nde trekningen.

S_i : Vi trekker en svart kule på den i -nde trekningen.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1) \cdot P(S_2 | R_1) + P(S_1) \cdot P(R_2 | S_1) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}} \end{aligned}$$

b) A og B er komplementære hendinger, så $P(B) = 1 - P(A) = \underline{\underline{\frac{7}{15}}}$.

c) Vi lar antall svarte kuler være x . Da er det totale antallet kuler $x + 6$. Hvis hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet må $P(B) = 50\%$, siden A og B er komplementære.

$$\begin{aligned} P(B) &= 0,5 \\ P(R_1) \cdot P(R_2 | R_1) + P(S_1) \cdot P(S_2 | S_1) &= 0,5 \\ \frac{6}{x+6} \cdot \frac{5}{x+5} + \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-1}{x+5} &= 0,5 \end{aligned}$$

Vi bruker CAS-verktøyet i Geogebra, skriver inn

$$6/(x+6)*5/(x+5)+x/(x+6)*(x-1)/(x+5)=0.5$$

og trykker på *Løs*. Vi får løsningene $x = 3$ og $x = 10$.

Vi kan ha enten 3 eller 10 svarte kuler i esken.

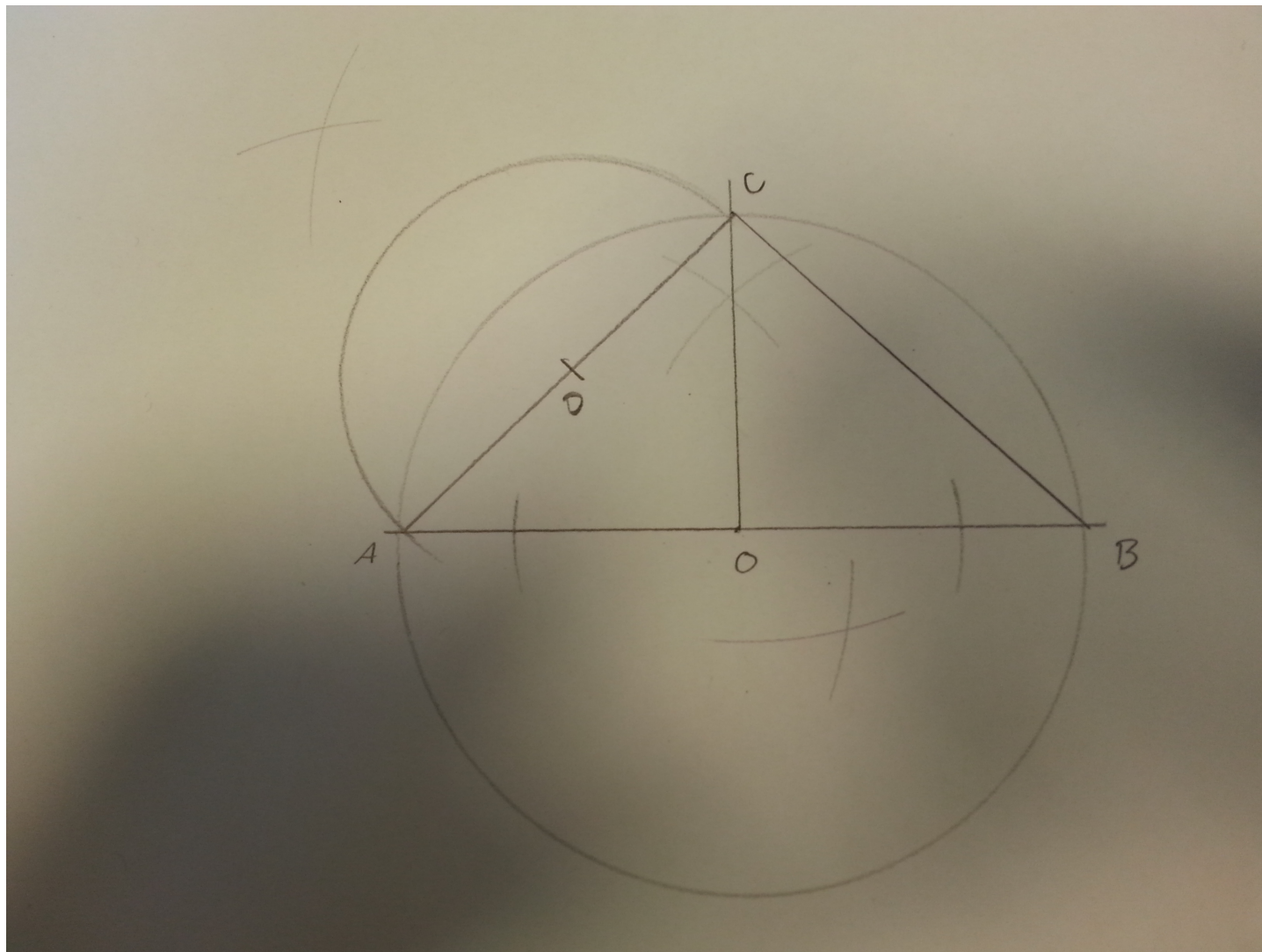
Oppgave 6

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Vi ser at de to potensene har samme grunntall, så de blir like hvis eksponentene er like, altså hvis $\lg x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 100}}$.

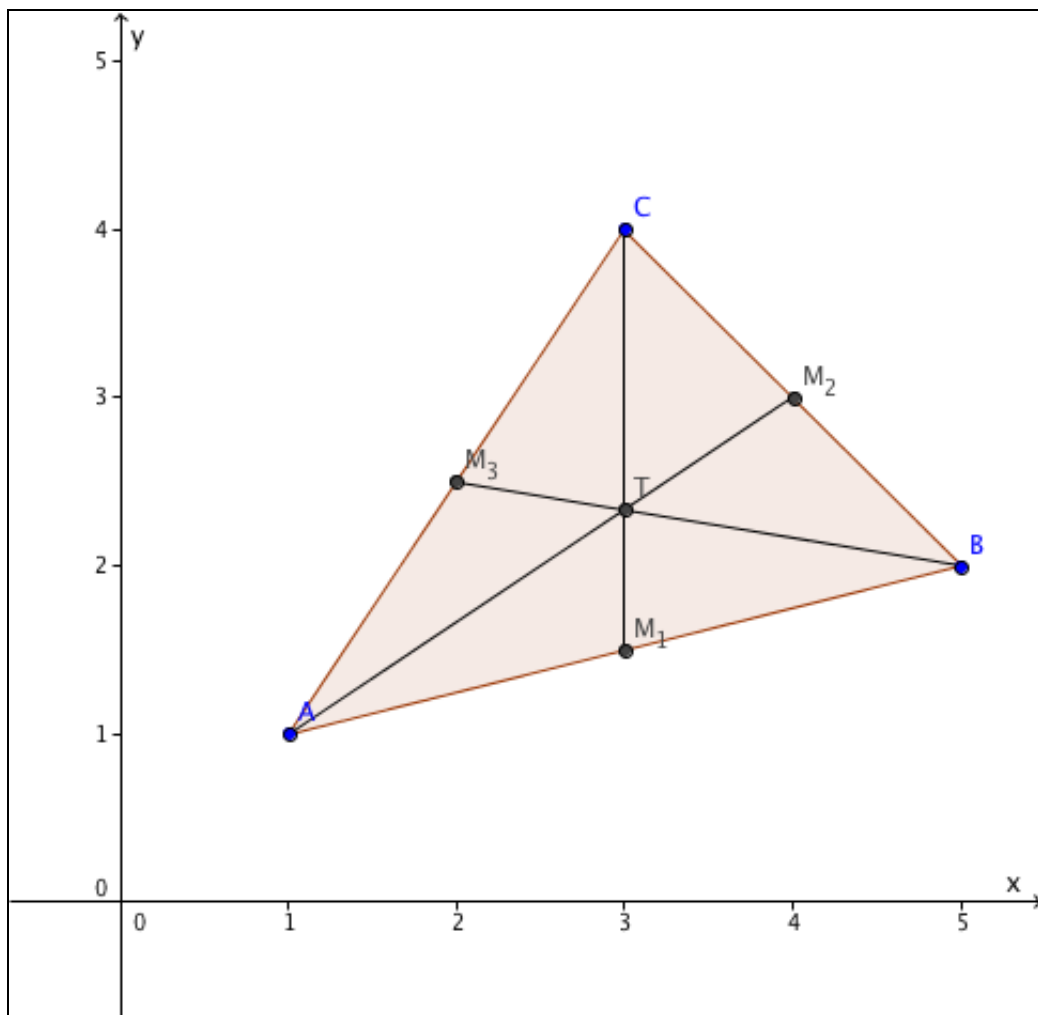
I tillegg vil potensene være like hvis begge har 1 som grunntall (da blir begge sidene 1 uavhengig av eksponenten). Dette skjer når $x = n$.

Vedlegg 1










Vedlegg 2

29 Mai 2013



| Nr. | Navn | Verktøylinjeikon | Definisjon | Verdi |
|-----|-----------------------|------------------|---|-------------------|
| 1 | Punkt A | | | $A = (1, 1)$ |
| 2 | Punkt B | | | $B = (5, 2)$ |
| 3 | Punkt C | | | $C = (3, 4)$ |
| 4 | Trekant Mangekant1 | | Mangekant A, B, C | Mangekant1 = 5 |
| 4 | Linjestykke c | | Linjestykke [A, B] av Trekant Mangekant1 | $c = 4.12$ |
| 4 | Linjestykke a | | Linjestykke [B, C] av Trekant Mangekant1 | $a = 2.83$ |
| 4 | Linjestykke b | | Linjestykke [C, A] av Trekant Mangekant1 | $b = 3.61$ |

| | | | | |
|----|---------------|---|---------------------------|------------------|
| 5 | Punkt M_1 |  | Midtpunkt på c | $M_1 = (3, 1.5)$ |
| 6 | Punkt M_2 |  | Midtpunkt på a | $M_2 = (4, 3)$ |
| 7 | Punkt M_3 |  | Midtpunkt på b | $M_3 = (2, 2.5)$ |
| 8 | Linjestykke d |  | Linjestykke $[C, M_1]$ | $d = 2.5$ |
| 9 | Linjestykke e |  | Linjestykke $[A, M_2]$ | $e = 3.61$ |
| 10 | Linjestykke f |  | Linjestykke $[B, M_3]$ | $f = 3.04$ |
| 11 | Punkt T |  | Skjæringspunkt mellom f,e | $T = (3, 2.33)$ |

Laget med [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m)