Eksamen i fysikk på forkurset - oppgaveutkast mai

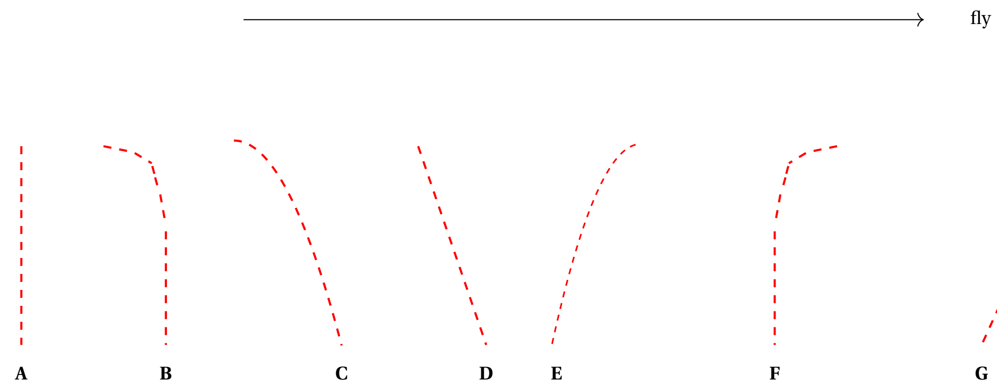
Oppgave 1

En fallskjermhopper hopper ut av et fly. Vi ser først kun på den delen av fallet som skjer før fallskjermen utløses. Flyet flyr mot høyre. Bruk $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Hvilken figur beskriver fallbanen best? Svarene skal begrunnes.

i) Vi ser bort fra luftmotstanden.

ii) Vi tar hensyn til luftmotstand.



En løsning:

I det fallskjermhopperen forlater flyet har han en horisontal fartskomponent mot høyre lik flyets hastighet og ingen vertikal fartskomponent.

i) Uten luftmotstand er tyngdekraften den eneste kraften som påvirker fallet. Denne gir en akselerasjon rett nedover, mens i horisontalretning er det ingenting som endrer hastigheten. Fallet vil da beskrives av en parabelbane som i **C**.

ii) Med luftmotstand er det to krefter som vi må ta hensyn til: tyngdekraft som virker rett ned og luftmotstanden som til enhver tid virker i motstatt retning av fartsretningen. Dette gjør at fallskjermhopperen i starten vil ha økende hastighet nedover og avtakende hastighet mot høyre. Når horisontalkomponenten av hastigheten er 0 virker luftmotstanden rett oppover. Fallbanen vil derfor i starten ha en komponent mot høyre, men denne avtar raskt og vi får etter hvert en fallbane som går rett ned som i **B**.

Luftmotstanden er:

$$R_\ell = kv^2$$

b) Bestem verdien av k for en fallskjermhopper med masse 75,0 kg som oppnår terminalhastighet 200 km/h.

En løsning:

Vilkåret for terminalhastighet er at luftmotstanden er like stor som tyngdekraften:

$$kv^2 = mg.$$

Siden farten er oppgitt i km/h regner vi om til m/s før vi fortsetter:

$$v = 200\,\mathrm{km/h} = \frac{200}{3{,}6}\ \mathrm{m/s} = 55{,}56\,\mathrm{m/s}.$$

Vi finner da

$$k = \frac{mg}{v^2} = \frac{75{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{(55{,}56\,\mathrm{m/s})^2} = \underline{\underline{0{,}238\,\mathrm{kg/m}}}.$$

Når fallskjermen foldes ut bremses farten fra 200 km/h til 5,00 m/s i løpet av 4,50 s.

c) Hvor stor er den gjennomsnittlige kraftsummen som virker på fallskjermhopperen i dette tidsrommet? I hvilken retning virker summen av kreftene i den perioden?

En løsning:

Impulsloven forteller oss at kraftsummens impuls er lik endring i bevegelsesmengde. Kraftsummens impuls kan skrives som produktet av gjennomsnittlig kraft og varigheten til impulsen. Dette gir

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma F}\cdot\Delta t &= \Delta p = mv_{\text{etter}} - mv_{\text{før}}\\ \overline{\Sigma F} &= m\cdot\frac{v_{\text{etter}}-v_{\text{før}}}{\Delta t} = \frac{75{,}0\,\mathrm{kg}\cdot(5{,}00\,\mathrm{m/s}-55{,}56\,\mathrm{m/s})}{4{,}50\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-843\,\mathrm{N}}}.\end{aligned}$$

Kraften virker rett oppover (derav negativt fortegn siden vi har regnet med rett nedover som positiv retning).

Oppgave 2

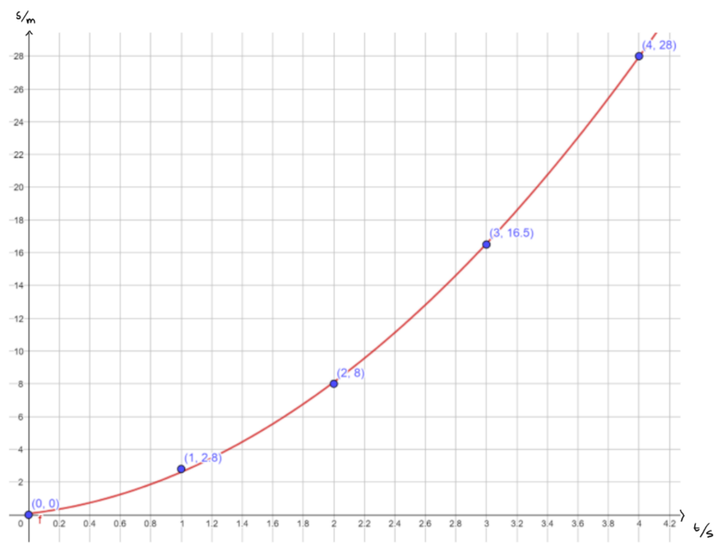
En partikkel beveger seg med konstant akselerasjon langs en horisontal rett linje.
Posisjonen ved noen ulike tidspunkt bestemmes til:

t/s	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
s/m	0,0	2,5	8,0	16,5	28,0

a) Lag en *st*-graf for bevegelsen og bestem akselerasjonen.

En løsning:

st-grafen:



Velger to ulike punkter på grafen og bruker at akselerasjonen er konstant.
Da må $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ for begge.

$$2{,}5 = v_0 \cdot 1{,}0 + \frac{1}{2} a \cdot 1{,}0^2 \text{ og } 8{,}0 = v_0 \cdot 2{,}0 + \frac{1}{2} a \cdot (2{,}0)^2 \text{ (uten benevning)}$$

$$2{,}5 = v_0 + \frac{1}{2} a \text{ og } 8{,}0 = 2{,}0 v_0 + 2{,}0 a$$

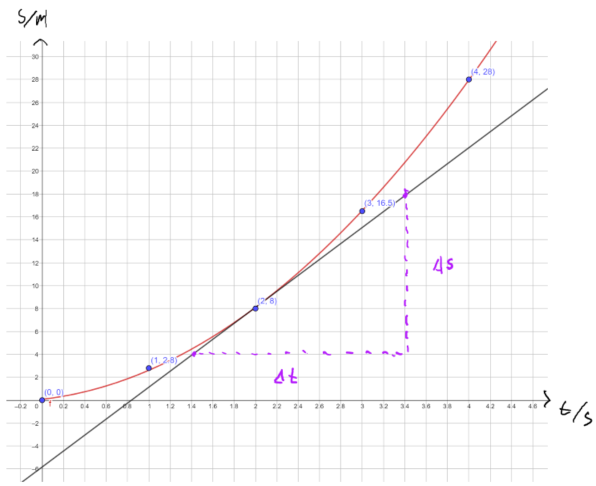
$$v_0 = 1{,}0 \text{ og } a = 3{,}0$$

$$\text{Svar: } a = \underline{\underline{3{,}0\,\mathrm{m/s^2}}}$$

b) Bestem momentanhastigheten ved $t = 2{,}0\,\text{s}$.

En løsning:

Alternativ 1.
Finner tangenten til kurven i punktet for $t = 2{,}0\,\text{s}$.



$$v(2{,}0\,\text{s}) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underline{\underline{7{,}0\,\text{m/s}}}$$

Alternativ 2.
$v_0 = 1{,}0\,\text{m/s}$, $a = 3{,}0\,\text{m/s}^2$ og $t = 2{,}0\,\text{s}$
$v = v_0 + at = 1{,}0\,\text{m/s} + 3{,}0\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}0\,\text{s} = \underline{\underline{7{,}0\,\text{m/s}}}$

Per Ulv vil gjerne fange Bippe Stankelbein. Han er først i ro ved siden av veien og når Bippe Stankelbein suser forbi med konstant fart 15,0 m/s, tenner han sin ACME rakett. Etter å ha ventet i 2,00 s mens lunten brenner ned, akselererer han med konstante 5,00 m/s^2, etter Bippe Stankelbein.

c) Hvor lang tid (t_{lunsj}) etter at Bippe Stankelbein passerer ham vil Per Ulv ta henne igjen?

d) Hva er farten (v_{lunsj}) til Per Ulv og hvor langt (s_{lunsj}) har han forflyttet seg da?

En løsning:

La $t = 0$ være tidspunktet Per Ulv starter å akselerere så kan posisjonene skrives som

$$s_{\text{Bippe}}(t) = 30{,}0 + 15{,}0t \text{ (i m)},$$
$$s_{\text{Per}}(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{5{,}00}{2}t^2 \text{ (i m)},$$

fordi i de to sekunder frem til tiden $t = 0$ har Bippe allerede forflyttet seg $15{,}0\,\text{m/s} \cdot 2{,}00\,\text{s} = 30{,}0\,\text{m}$.

De møtes når $s_{\text{Bippe}} = s_{\text{Per}} \Rightarrow 2{,}5t^2 - 15t - 30 = 0 \overset{a=2{,}5,b=-15,c=-30}{\Longrightarrow} t_\pm = \begin{cases} (3{,}00 + \sqrt{21})\ \text{s} & = 7{,}58\,\text{s} \\ (3{,}00 - \sqrt{21})\ \text{s} & = -1{,}58\,\text{s}. \end{cases}$

Den negative løsning t_- er ikke relevant, da den svarer til en tid før Per Ulv starter.

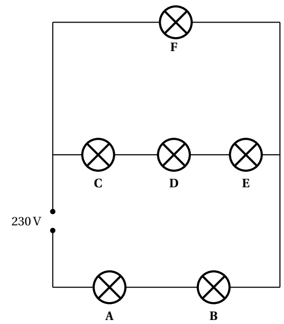
c) De møtes altså til tiden $t_{\text{lunsj}} = t_+ + 2{,}00\,\text{s} = \underline{\underline{9{,}58\,\text{s}}}$.

d) Per Ulvs fart er da $v_{\text{lunsj}} = a \cdot t_+ = \underline{\underline{37{,}9\,\text{m/s}}}$.

og forflytningen blir $s_{\text{lunsj}} = s_{\text{Bippe}}(t_{\text{lunsj}}) = s_{\text{Per}}(t_+) = \underline{\underline{144\,\text{m}}}$.

Oppgave 3

Seks like lyspærer koples som i kretsen under. Hver lyspære er merket 230 V/40 W (det betyr at når spenningen over lyspæra er 230 V lyser de normalt og avgir 40 W). Se bort fra indre motstand i spenningskilden og anta at resistansen i hver lyspære er konstant i hele denne oppgaven.



a) Beregn totalresistansen i kretsen.

En løsning:

Siden alle lyspærene har den samme konstante resistansen kan vi bruke betingelsene for å lyse normalt til å bestemme den:

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{40\,\mathrm{W}} = 1322{,}5\,\Omega$$

Kretsen har A i serie med B i serie med parallellkopling som har C,D og E i serie i den ene grenen og F alene i den andre grenen. Totalresistansen blir derfor:

$$R_{\text{total}} = R_{\text{A}} + R_{\text{B}} + \left(\frac{1}{R_{\text{C}} + R_{\text{D}} + R_{\text{E}}} + \frac{1}{R_{\text{F}}}\right)^{-1} = \frac{11}{4}R = \frac{11}{4} \cdot 1322{,}5\,\Omega = 3637\,\Omega = \underline{\underline{3{,}6\,\mathrm{k}\Omega}}.$$

b) Ranger lyspærene fra størst til minst lystyrke. Forklar hvilke som lyser normalt.

En løsning:

Totalstrømmen i kretsen finnes fra Ohms lov:

$$I_{\text{total}} = \frac{U_{\text{total}}}{R_{\text{total}}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{3637\,\Omega} = 0{,}0632\,\mathrm{A}$$

Ved å se på kretsen ser vi at hele denne strømmen går gjennom A og B, mens i parallellkoplingen blir den delt opp med 3 ganger så mye gjennom F som gjennom C,D og E.
Det gir

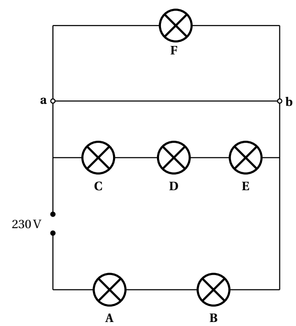
$$I_{\text{A}} = I_{\text{B}} = I_{\text{total}} = 0{,}0632\,\mathrm{A},$$
$$I_{\text{F}} = \frac{3}{4} I_{\text{total}} = 0{,}0474\,\mathrm{A},$$
$$I_{\text{C}} = I_{\text{D}} = I_{\text{E}} = \frac{1}{4} I_{\text{total}} = 0{,}0158\,\mathrm{A}.$$

Effektene er gitt ved $P = RI^2$

$$P_\mathrm{A} = P_\mathrm{B} = 1322{,}5\,\Omega \cdot (0{,}0632\,\mathrm{A})^2 = 5{,}28\,\mathrm{W},$$
$$P_\mathrm{F} = 1322{,}5\,\Omega \cdot (0{,}0474)^2 = 2{,}97\,\mathrm{W},$$
$$P_\mathrm{C} = P_\mathrm{D} = P_\mathrm{E} = 1322{,}5\,\Omega \cdot (0{,}0158\,\mathrm{A})^2 = 0{,}330\,\mathrm{W}.$$

Rangering av lysstyrken: $\underline{\mathrm{A} = \mathrm{B} > \mathrm{F} > \mathrm{C} = \mathrm{D} = \mathrm{E}.}$ Ingen av lyspærene lyser normalt.

Det kobles så en ledning mellom **a** og **b** som på figuren under (kortslutning mellom **a** og **b**).



c) Bestem effektene til hver lyspære og forklar hvilke som lyser normalt nå.

En løsning:

Kretsen er nå en ren seriekopling med A og B
Totalresistansen blir nå $R_\mathrm{total,ny} = R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B} = 2R = 2 \cdot 1322{,}5\,\Omega = 2645\,\Omega$
Totalstrømmen i kretsen finnes fra Ohms lov:

$$I_\mathrm{total} = \frac{U_\mathrm{total}}{R_\mathrm{total,ny}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{2645\,\Omega} = 0{,}0870\,\mathrm{A}$$

Denne strømmen går gjennom A og B. Effektene der er gitt ved $P = RI^2$

$$P_\mathrm{A} = P_\mathrm{B} = 1322{,}5\,\Omega \cdot (0{,}0870\,\mathrm{A})^2 = \underline{\underline{10{,}0\,\mathrm{W}}}$$

Det vil ikke gå noen strøm gjennom C,D,E eller F så effekten i dem blir $\underline{\underline{0{,}00\,\mathrm{W}}}$

Ingen av lyspærene lyser normalt nå heller.

Oppgave 4

En terning består av to materialer som ikke er blandet. Den ene delen består av 2,50 kg aluminium som starter med temperaturen 20,0 °C og den andre delen 1,50 kg jern som starter med temperaturen 120 °C. Se bort fra varmeutveksling med omgivelsene. Terningen blir stående til hele terningen har samme temperatur.

a) Bestem terningens samlete varmekapasitet.

> **En løsning:**
>
> Terningens samlete varmekapasitet blir:
>
> $$\begin{aligned} C_{\text{samlet}} &= C_{\text{aluminium}} + C_{\text{jern}} = m_{\text{aluminium}} \cdot c_{\text{aluminium}} + m_{\text{jern}} \cdot c_{\text{jern}} \\ &= 2{,}50\,\text{kg} \cdot 900\,\text{J/kgK} + 1{,}50\,\text{kg} \cdot 449\,\text{J/kgK} = 2923{,}5\,\text{J/K} = \underline{\underline{2{,}92\,\text{kJ/K.}}} \end{aligned}$$

b) Hva blir sluttemperaturen?

> **En løsning:**
>
> Det vil overføres varme fra den delen med høyest temperatur til den delen med lavest temperatur. Hvis vi ser bort fra varmetap til omgivelsene må mottatt varme være lik avgitt varme. Hvis vi kaller sluttemperaturen T_{blanding} får vi:
>
> $$\begin{aligned} Q_{\text{avgitt}} &= C_{\text{jern}} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) = c_{\text{jern}} \cdot m_{\text{jern}} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) \\ &= 449\,\text{J/kgK} \cdot 1{,}50\,\text{kg} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) = 673{,}5\,\text{J/K} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) \\ Q_{\text{mottatt}} &= C_{\text{aluminium}} \cdot (T_{\text{blanding}} - T_{\text{lav}}) = c_{\text{aluminium}} \cdot m_{\text{aluminium}} \cdot (T_{\text{blanding}} - T_{\text{lav}}) \\ &= 900\,\text{J/kgK} \cdot 2{,}50\,\text{kg} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) = 2250\,\text{J/K} \cdot (T_{\text{blanding}} - T_{\text{lav}}) \end{aligned}$$
>
> Setter disse lik hverandre og får:
>
> $$\begin{aligned} Q_{\text{avgitt}} &= Q_{\text{mottatt}} \\ 673{,}5\,\text{J/K} \cdot (T_{\text{høy}} - T_{\text{blanding}}) &= 2250\,\text{J/K} \cdot (T_{\text{blanding}} - T_{\text{lav}}) \\ 673{,}5 \cdot 120\,^\circ\text{C} - 673{,}5 \cdot T_{\text{blanding}} &= 2250 \cdot T_{\text{blanding}} - 2250 \cdot 20{,}0\,^\circ\text{C} \\ (673{,}5 + 2250) \cdot T_{\text{blanding}} &= 673{,}5 \cdot 120\,^\circ\text{C} + 2250 \cdot 20{,}0\,^\circ\text{C} \\ 2923{,}5 \cdot T_{\text{blanding}} &= 125\,820\,^\circ\text{C} \\ T_{\text{blanding}} &= \frac{125\,820\,^\circ\text{C}}{2923{,}5} = \underline{\underline{43{,}0\,^\circ\text{C}}} \end{aligned}$$

c) Formuler hvordan termofysikkens 1. og 2. lov kan brukes i dette tilfellet.

> **En løsning:**
>
> Endringen av indre energi må være like stor i hver del (avgitt = mottatt) og siden det er ren varmeoverføring gir første loven ($\Delta U = Q + W$) $Q_{\text{avgitt}} = Q_{\text{mottatt}}$.
> Den første formuleringen av termodynamikkens 2.lov var at varme kan ikke gå av seg selv fra lavere til høyere temperatur. Det brukes når vi setter opp detaljene i hva som går hvor i b).

Oppgave 5

Bensin kan her regnes som C_8H_{18} (oktan) som har massetetthet 0,740 kg/liter.
Når bensin brenner i en oksygenrik atmosfære dannes karbondioksid og vann.

a) Balanser reaksjonsligningen: $C_8H_{18} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$.

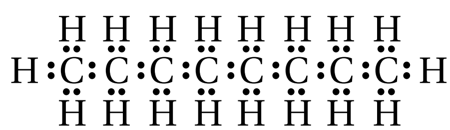
En løsning:

Vi starter med $aC_8H_{18} + bO_2 \longrightarrow cCO_2 + dH_2O$.
Teller atomer på hver side
På VS er det 8a C-atomer og på HS er det c C-atomer så c = 8a.
På VS er 18a H-atomer og på HS er det 2d H atomer så vi må ha d = 9a,
På VS er et 2b O-atomer og på HS er det 2c + d O-atomer.
Får å få det til å gå opp prøver vi først a= 1 som fører til c = 8, d = 9 og b = $\frac{25}{2}$. Ikke en løsning.
Prøver så a = 2 som fører til c = 16, d = 18 og b = 25.
Balansert reaksjon: $\underline{\underline{2\,C_8H_{18} + 25\,O_2 \longrightarrow 16\,CO_2 + 18\,H_2O}}$

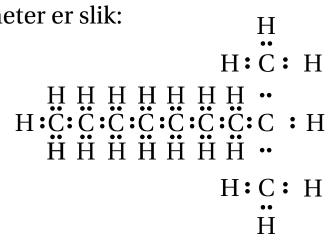
b) Tegn et C_8H_{18}- molekyl med elektronprikkformel.

En løsning:

Det er ikke en unik løsning, men den enkleste ser slik ut:



En av mange andre muligheter er slik:



(Det er tilstrekkelig med én riktig løsning for å få full uttelling på spørsmålet).

c) Hvor mange kg karbondioksid dannes ved forbrenning av 1,00 liter bensin?

En løsning:

Med atommasser $m_C = 12{,}0\,\text{u}$ og $m_O = 16{,}0\,\text{u}$ blir det dannet $\frac{12{,}0+2\cdot 16{,}0}{12{,}0} = 3{,}67\,\text{kg}\ CO_2$ per kg karbon i det som forbrennes. Siden hydrogen har atommassen $m_H = 1{,}01\,\text{u}$ er det $\frac{8\cdot 12{,}0}{8\cdot 12{,}0+18\cdot 1{,}01} = 0{,}841\,\text{kg}$ karbon per kg bensin. Vi setter alt sammen og finner mengden CO_2 som dannes ved forbrenning av 1,00 liter er:

$$1{,}00\,\text{liter} \cdot 0{,}740\,\text{kg bensin/liter} \cdot 0{,}841\,\frac{\text{kg C}}{\text{kg bensin}} \cdot 3{,}67\,\frac{\text{kg } CO_2}{\text{kg C}} = \underline{\underline{2{,}28\,\text{kg } CO_2}}.$$

Oppgave 6

Karbon-14-datering er en viktig metode for å bestemme alderen på gammelt biologisk materiale. Grunnlaget for metoden er at en liten andel av karbonet i atmosfæren består av den radioaktive isotopen ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Dette gjør at man kan vite hvor stor andel av karbonet i en organisme som var av den radioaktive typen da den var i live. Siden organismen slutter å ta opp karbon når den dør vil mengden ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ avta bestemt av radioaktivt henfall.

${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ henfaller til den stabile nitrogenisotopen ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ gjennom prosessene

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N}^{*} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \bar{\nu}_e \qquad \text{og} \qquad {}^{14}_{7}\mathrm{N}^{*} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma $$

Halveringstiden er 5730 år.
Ca. 15,0% av skjelettet vårt består av karbon. Andelen av karbonatomene som er av typen ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ måles til $1{,}00 \cdot 10^{-12}$.

a) Hvor mange ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-atomer er det i 1,00 kg biologisk materiale (skjelett, beinvev)?

En løsning:

Total masse av ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-atomer i 1,00 kg biologisk materiale:

$$ m({}^{14}_{6}\mathrm{C}) = 1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 15{,}0\,\% \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-12} = 1{,}50 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{kg} = 1{,}50 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{g}. $$

Molmasse for ${}^{14}_{6}\mathrm{C} = 14{,}0\,\mathrm{g/mol}$.
Antall atomer

$$ N = \frac{\text{total masse}}{\text{molmasse}} = \frac{1{,}50 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{g}}{14{,}0\,\mathrm{g/mol}} = 1{,}071\,\mathrm{mol} = 1{,}071\,\mathrm{mol} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{-23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}} = \underline{\underline{6{,}45 \cdot 10^{12}}}. $$

Aktiviteten fra ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ per kg i et levende menneske er 25,0 Bq. Et gammelt skjelett blir gravd opp og funnet å ha aktivitet fra ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ på 2,50 Bq per kg. Anta at ingenting annet enn radioaktivt henfall har endret ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ siden dette mennesket levde.

b) Hvor mange ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-atomer er igjen per kg i skjelettet som ble funnet?

En løsning:

Aktiviten er mål på reduksjonsraten av antall atomer. Dvs. reduksjon i aktiviteten med en faktor n betyr at antall ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-atomer er redusert med samme faktor. I vårt tilfelle er aktiviteten redusert med en faktor 10, som derfor medfører at det er 10 ganger færre antall atomer per kg.
Antallet per kg er $\underline{\underline{6{,}45 \cdot 10^{11}}}$.

c) Hvor gammelt er skjelettet?

En løsning:

Dersom aktiviteten på tidspunktet $t = 0$ er A_0 er aktiviteten på et senere tidspunkt gitt som

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

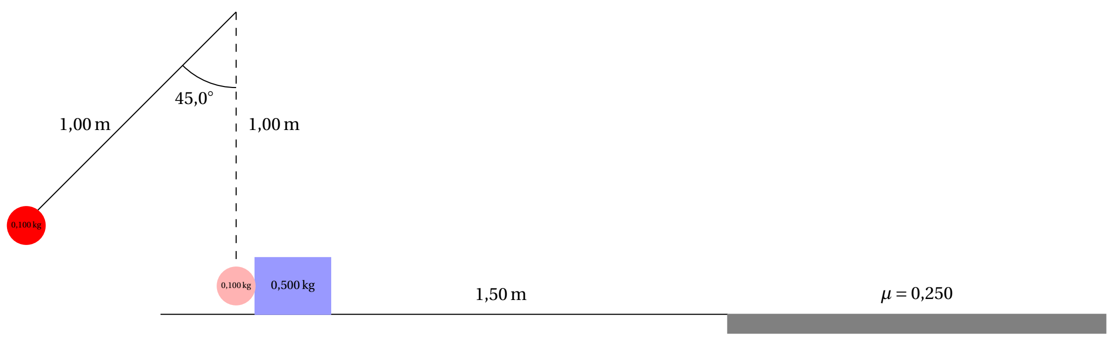
der $t_{1/2} = 5730$ år er halvveringstiden til den radioaktive karbonisotopen. Ved å ta logaritmen av begge sider av ligningen og bruke logaritmeregler for videre beregning finner vi

$$\lg \frac{A}{A_0} = \frac{t}{t_{1/2}} \lg \frac{1}{2}$$

$$t = t_{1/2} \frac{\lg \frac{A}{A_0}}{\lg \frac{1}{2}} = 5730\,\text{år} \cdot \frac{\lg\left(\frac{2{,}50\,\text{Bq}}{25{,}0\,\text{Bq}}\right)}{\lg \frac{1}{2}} = 19\,035\,\text{år} = \underline{\underline{1{,}90 \cdot 10^4\ \text{år}}}.$$

Oppgave 7

En pendel med lengde 1,00 m og masse 0,100 kg løftes opp til 45,0° vinkel med vertikalen og slippes. I punktet der pendelen er rett ned støter den elastisk mot en stillestående kloss med masse 0,500 kg. Etter at klossen blir truffet av pendelen glir den bortover et horisontalt underlag - først en strekning på 1,50 m friksjonsfritt og deretter innpå et område med friksjonstall 0,250. Se bort fra luftmotstand gjennom hele oppgaven. Bruk $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Regn pendelkule og kloss som punkter (uten utstrekning).



a) Hvor stor fart har pendelen i det den treffer klossen?

En løsning:

Farten finner vi enklest ved bevaring av mekanisk energi. Vi velger nullpunkt for potensiell energi der kulen er i sitt laveste punkt, altså der den treffer klossen. Da har kulen kun kinetisk energi der. Siden kulen starter fra ro har den kun potensiell energi ved starten.

$$E_{\text{k,før}} + E_{\text{p,før}} = E_{\text{k,etter}} + E_{\text{p,etter}}$$
$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

For å komme i mål må vi nå relatere høyden h til vinkelutslaget θ til pendelen. Siden snorlengden er ℓ er høydeforskjellen fra opphengspunktet ned til kulen $\ell\cos\theta$. Høyden h er målt oppover fra laveste punkt (som ligger ℓ lavere enn opphengspunktet) og er derfor

$$h = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta).$$

Innsatt høyden h og løst med hensyn på farten v finner vi

$$v^2 = 2gh = 2g\ell(1-\cos(45{,}0\,\text{degree}),$$
$$v = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1{,}00\,\mathrm{m}\cdot(1-\cos(45{,}0°))} = \underline{\underline{2{,}40\,\mathrm{m/s}}}.$$

b) Hvor stor fart har klossen umiddelbart etter at støtet med pendelen er ferdig? Og hvor stor fart har den ved slutten av den friksjonsfrie strekningen?

En løsning:

Siden støtet er elastisk er både bevegelsesmengde og mekanisk energi bevart. La v_0 være farten kulen har like før støtet (den vi fant i del a), og v være farten den har like etter støtet. V er farten klossen har like etter støtet.

$$mv_0 = mv + MV \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{2}$$

Dette er to ligninger med to ukjente (v og V) så dette er løsbart. Siden det er V vi primært er interessert i starter vi med å eliminere v fra ligningssettet.

$$mv = mv_0 - MV \qquad \text{snur på (1)} \tag{3}$$
$$(mv)^2 = m^2v_0^2 - MmV^2 \qquad \text{ganger (2) med 2} \tag{4}$$
$$m^2v_0^2 + M^2V^2 - 2mMv_0V = m^2v_0^2 - MmV^2 \qquad \text{setter (3) inn i (4)} \tag{5}$$
$$(M^2 + Mm)V^2 = 2mMv_0V \qquad \text{forenkler og faktoriserer} \tag{6}$$

Siden vi må ha $V \neq 0$ kan vi dividere venstre og høyre side med V. M er også en felles faktor som vi dividerer bort. Dermed sitter vi igjen med

$$(M+m)V = 2mv_0. \tag{7}$$

Løst med hensyn på V finner vi:

$$V = \frac{2m}{M+m}v_0 = \frac{2\cdot 0{,}100\,\mathrm{kg}}{0{,}500\,\mathrm{kg} + 0{,}100\,\mathrm{kg}}\cdot 2{,}40\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{0{,}800\,\mathrm{m/s}}}.$$

Siden summen av krefter er lik null mens klossen glir på det friksjonsfrie området er farten den samme ved slutten av strekningen.

c) Bruk beregning av arbeidet friksjonen gjør til å finne hvor langt inn i området med friksjon klossen kommer før den stopper opp.

> **En løsning:**
>
> Bevaring av mekanisk energi krever at arbeidet friksjonen gjør er like stort som den kinetiske energien klossen hadde når den kom fram til friksjonsfeltet.
> Friksjonskraften er $R = \mu M g$ slik at størrelsen til friksjonsarbeidet er $Rs = \mu M g s$.
> Den kinetiske energien er $\frac{1}{2}MV^2$. Setter sammen og får:
>
> $$\frac{1}{2}MV^2 = Rs = \mu M g s$$
> $$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}800\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}250 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{\underline{0{,}130\,\mathrm{m}}}.$$

Oppgave 8

Julenissen er på vei over isen sent på julaften. Reinsdyrene er slitne og bestemmer seg for ikke å jobbe mer. De flyr bort og lar julenissen bli igjen på sleden med de siste 50 julegavene. Hver julegave har massen 1,00 kg og sleden med nissen har massen 300 kg. Han kaster så julegavene bakover slik at de får farten 10,0 m/s i forhold til sleden hver gang.

a) Han kaster først ut en julegave bakover. Hvor stor fart får da julenisse+slede+resten av julegavene i forhold til isen?

> **En løsning:**
>
> Før første kast er sleden i ro så hastighet ift. slede og hastighet ift. is er det samme.
> Bevegelsesmengden før første kast er $350\,\mathrm{kg} \cdot 0\,\mathrm{m/s} = 0\,\mathrm{kgm/s}$.
> Etter første kast er bevegelsesmegden $1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 10{,}0\,\mathrm{m/s} - 349\,\mathrm{kg} \cdot u$
> Bevaring av bevegelsesmengde gir da $1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 10{,}0\,\mathrm{m/s} = 349\,\mathrm{kg} \cdot u \Leftrightarrow$
> Sledens hastighet ift. is blir $\underline{\underline{= \frac{10{,}0}{349}\,\mathrm{m/s} = 0{,}0287\,\mathrm{m/s}}}$.

b) Hva med farten videre?

i) Han kaster så ut resten av julegavene en etter en bakover med farten 10,0 m/s i forhold til sleden hver gang. Hva er farten til julenisse+slede+resten av julegavene i forhold til isen etter 2. og etter 3. julegave da?

> **En løsning:**
>
> I senere kast må det skilles mellom hastighet ift. slede og hastighet i forhold til is.
> Sledens neste hastig = sledens forrige hastighet (u_1) pluss det nye tillegget (u_2).
> Bevaring av bevegelsesmengde i det andre kastet gir i forhold til sleden:
>
> $1{,}00\,\text{kg} \cdot 10{,}0\,\text{m/s} - 348\,\text{kg} \cdot u_2 = 0\,\text{kgm/s} \Leftrightarrow u_2 = \frac{10{,}0}{348}\ \text{m/s}$
>
> Hastighet ift.is blir $u_2 + u_1 = \underline{\underline{\frac{10{,}0}{348}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{349}\ \text{m/s} = 0{,}0574\,\text{m/s}}}$
>
> Bevaring av bevegelsesmengde i det tredje kastet gir i forhold til sleden:
>
> $1{,}00\,\text{kg} \cdot 10{,}0\,\text{m/s} - 347\,\text{kg} \cdot u_2 = 0\,\text{kgm/s} \Leftrightarrow u_2 == \frac{10{,}0}{347}\ \text{m/s}$
>
> Hastighet ift.is blir $u_2 + u_1 = \underline{\underline{\frac{10{,}0}{347}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{348}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{349}\ \text{m/s} = 0{,}0862\,\text{m/s}}}$

ii) En annen måte julenissen kan gjøre det på er å kaste alle gavene ut samtidig med farten 10,0 m/s i forhold til sleden. Hvilket alternativ av de under er korrekt? Forklar hvorfor.

(I) Julenisse+slede får større fart til slutt hvis gavene blir kastet ut en og en.

(II) Julenisse+slede får større fart til slutt hvis alle gavene blir kastet ut samtidig.

(III) Julenisse+slede får samme fart i begge tilfellene.

> **En løsning:**
>
> Alternativ **(II)** er det korrekte.
>
> Ved å fortsette som i **i)** får vi at slutthastigheten i forhold til is når han kaster gavene en og en blir
> $\frac{10{,}0}{349}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{348}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{347}\ \text{m/s} + \frac{10{,}0}{346}\ \text{m/s} + \ldots + \frac{10{,}0}{300}\ \text{m/s} = 1{,}54\,\text{m/s}$
>
> Hvis alle kastes på en gang gir bevaring av bevegelsesmengde
>
> $50{,}0\,\text{kg} \cdot 10{,}0\,\text{m/s} - 300\,\text{kg} \cdot u = 0\,\text{kgm/s} \Leftrightarrow u = \frac{500}{300}\ \text{m/s} = 1{,}67\,\text{m/s}$
>
> I det andre tilfellet vil alle pakkene bevege seg med 10,0 m/s ift. isen, mens i det første tilfellet vil bare den første ha det. Siden sleden er i bevegelse i de 49 siste kastene vil pakkenes hastighet ift. til isen bli litt lavere. Dermed vil litt lavere bevegelsesmengde følge pakkene og litt lavere følge sleden. Hastigheten til sleden må bli større når alle kastes samtidig.