1T Eksamen H2022 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

22. desember 2022

Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

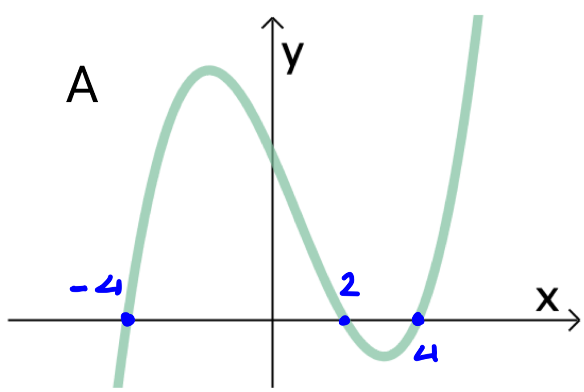
Oppgave 1 (2 poeng)

$$\begin{aligned}
\sin u &= \frac{4}{5} \\
cos u &= \frac{3}{5} \\
tan u &= \frac{4}{3} \\
\frac{sin u}{\cos u} &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}.5}{\frac{3}{5}.5} = \frac{4}{3} = tan u
\end{aligned}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$f(x) = (x-4)(x-2)(x+4)$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = 2 \vee x = -4$$



Figur 2

Graf A er den riktige siden den har to symmetriske løsninger (x=4, x=-4) og en annen løsning x=2 mellom y-aksen og x=4

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-4)(x-2)(x+4) \\
(x-4)(x-2)(x+4) &> 0 \\
f(x) &> 0 \Rightarrow x \in (-4, 2) \cup (4, \rightarrow)
\end{aligned}
$$

Løsningen er x verdiene der grafen ligger over x-aksen

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

Han ønsker å finne funksjonsverdier for x verdier mellom -8 og 8 . Han får feilmelding fordi funksjonen er ikke definert i x= 2 (nevneren blir null).

b)

Vi presenterer 3 mulig måter for å unngå feilmeldingen.

```python
def f(x):
    return (1-2*x)/(x-2)
x=8
while x>=-8:
    if x==2:
        print( " Funksjonen er ikke definert i x=2")
    else:
        print(x,f(x))
    x=x-1
```

```
8 -2.5
7 -2.6
6 -2.75
5 -3.0
4 -3.5
3 -5.0
 Funksjonen er ikke definert i x=2
1 1.0
0 -0.5
-1 -1.0
-2 -1.25
-3 -1.4
-4 -1.5
-5 -1.5714285714285714
-6 -1.625
-7 -1.6666666666666667
-8 -1.7
```

Figur 3: Bruk if setning

```python
def f(x):
    return (1-2*x)/(x-2)
x=8
while x>=-8:
    if x==2:
        pass
    else:
        print(x,f(x))
    x=x-1
```

```
8 -2.5
7 -2.6
6 -2.75
5 -3.0
4 -3.5
3 -5.0
1 1.0
0 -0.5
-1 -1.0
-2 -1.25
-3 -1.4
-4 -1.5
-5 -1.5714285714285714
-6 -1.625
-7 -1.6666666666666667
-8 -1.7
```

Figur 4: Bruke if med pass kommando

```
def f(x):
    return (1-2*x)/(x-2)
for x in range(-8,2):
    print(x,f(x))
for x in range (3,9):
    print(x,f(x))
```

```
-8 -1.7
-7 -1.6666666666666667
-6 -1.625
-5 -1.5714285714285714
-4 -1.5
-3 -1.4
-2 -1.25
-1 -1.0
0 -0.5
1 1.0
3 -5.0
4 -3.5
5 -3.0
6 -2.75
7 -2.6
8 -2.5
```

Figur 5: Lag to for-løkke

c)

En skysse trenger ikke å være nøyaktig men de viktige punktene og egenskapene skal markeres.

$$f\left(x\right)=\frac{1-2x}{x-2}$$

$$f\left(x\right)=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow (0.5,0)\,2\quad \text{nullpunkt}$$

$$f\left(0\right)=1\Rightarrow \left(0,-\frac{1}{2}\right)2\quad \text{skjæring med y-aksen}$$

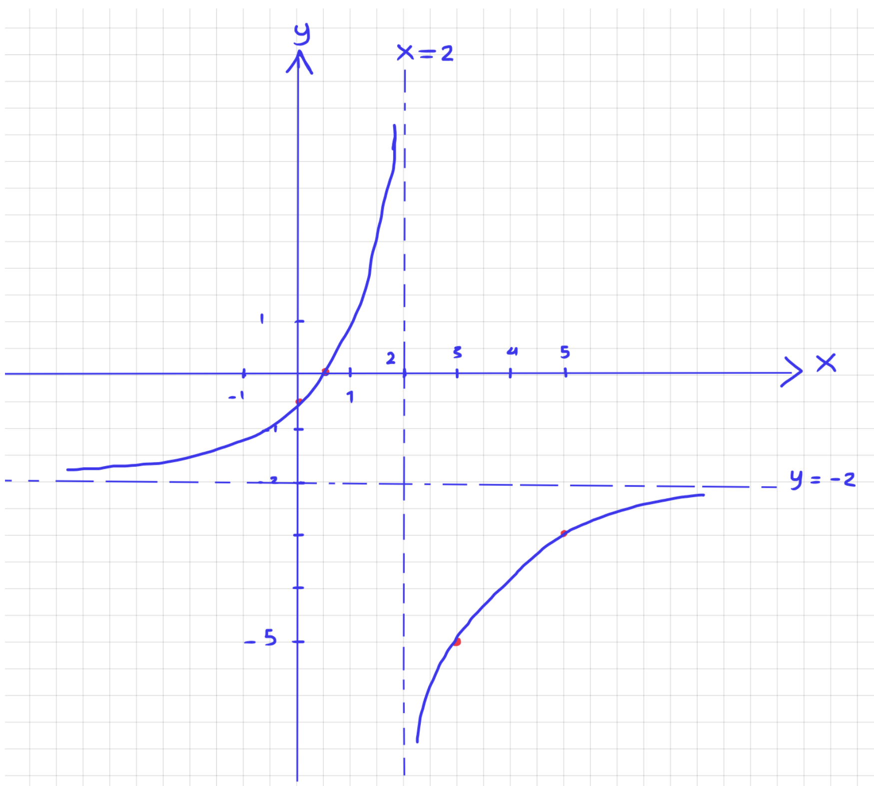
$$x=2\quad \text{er vertikal asymptote fordi nevneren blir null}$$

$$y=\frac{-2}{1}=-2\quad \text{er horisontal asymptote fordi grafen nærmer seg til når x går mot}\pm\infty$$

$$x=3\Rightarrow y=-5$$

$$x=5\Rightarrow y=-3$$

Skissen er vist nedenfor:



Figur 6

Oppgave 4 (3 poeng)

Vi skriver et generelt utrykk for andregradsfunksjon så bruker at
Den deriverte av en funksjon i et punkt er stigningstallet til tangenten til grafen til funksjonen i punktet.
til å finne den deriverte ved å løse et to-ligningssystem.

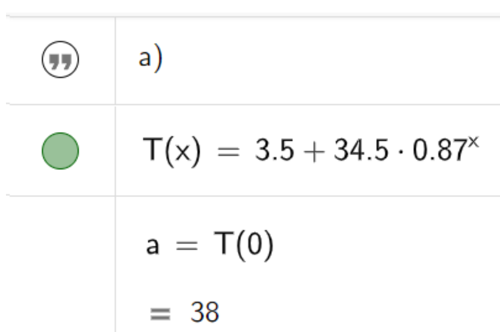
$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f'(x) &= 2ax + b \\
f'(-2) &= 9 \Rightarrow 2a \cdot (-2) + b = 9 \Rightarrow -4a + b = 9 \Rightarrow b = 9 + 4a \\
f'(8) &= -11 \Rightarrow 2a \cdot (8) + b = -11 \Rightarrow 16a + b = -11 \\
16a + 9 + 4a &= -11 \\
20a &= -11 - 9 \Leftrightarrow 20a = -20 \Rightarrow a = \frac{-20}{20} = -1 \\
b &= 9 + 4a = 9 + 4 \cdot (-1) - 9 - 4 = 5 \\
f'(x) &= 2 \cdot (-1)\, x + 5 \\
&= -2x + 5
\end{aligned}
$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (9 poeng)

a)

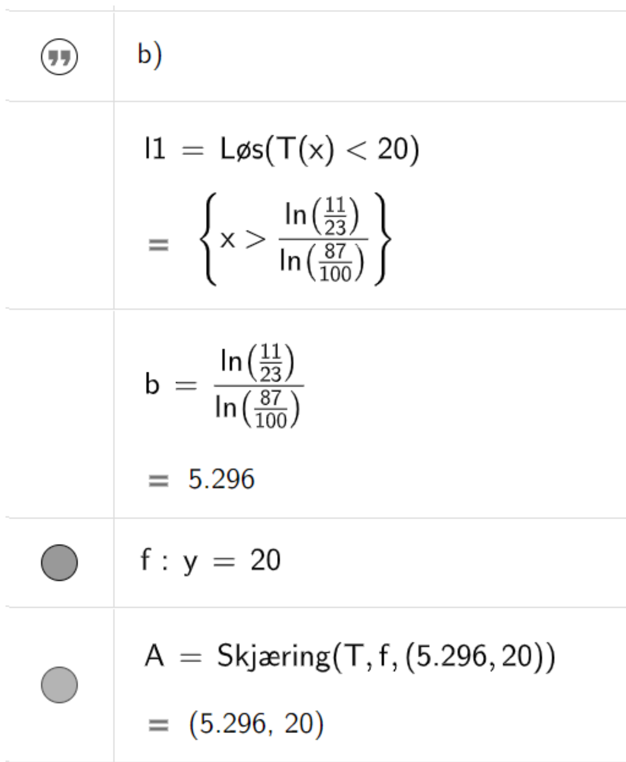
Temperaturen i vannet når strømmen blir slått av er $38°C$



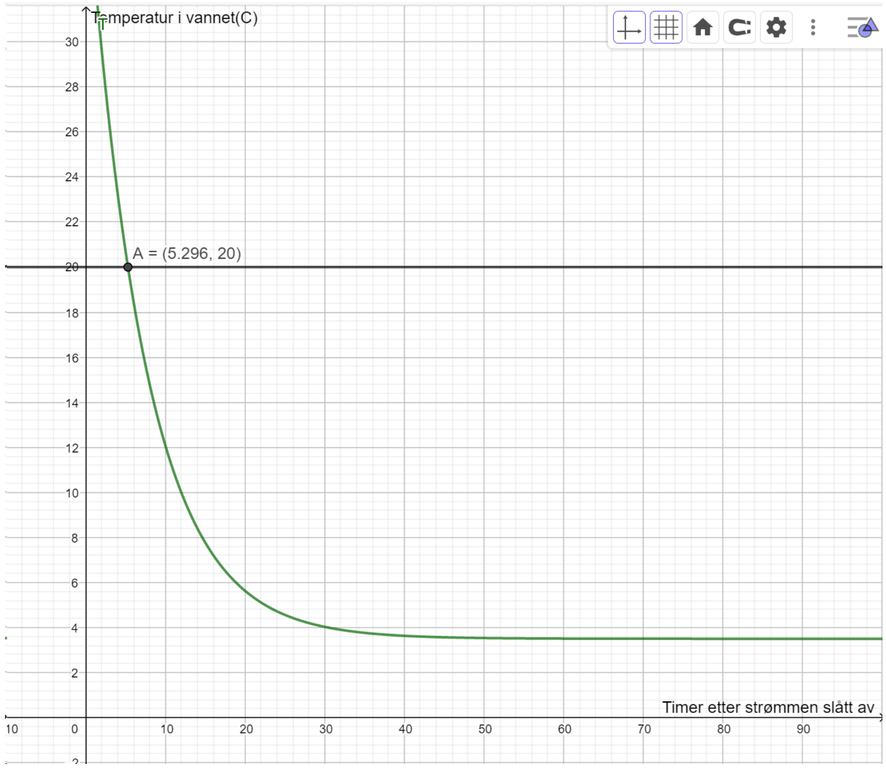
Figur 7

b)

Det vil ta $5,3$ timer for at temperaturen skal synke under $20°C$.



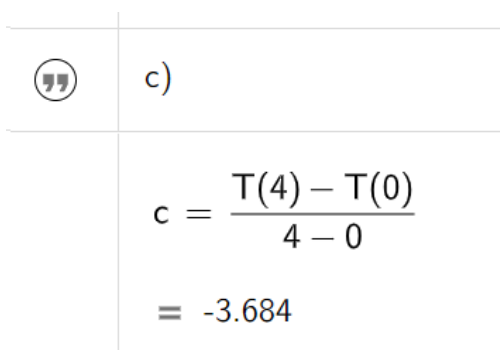
Figur 8



Figur 9

c)

Temperaturen synker med $3,7°C$ per time i gjennomsnitt i løpet av de første 5 timene etter strømmen blir slått av.



Figur 10

d)

Temperaturen kommer ikke til å synke med mer $5°C$ i løpet av en time. Vi finner ut ved å sjekke gjennomsnittlig vekstfart mellom to tilfeldige punkter som har avstand 1. Løsningen blir negativt som ikke er gyldig siden x er tid.

1 $\frac{T(x+1)-T(x)}{x+1-x} = -5, x = 1$

NLøs: $\{x = -0.781\}$

Figur 11

e)

Etter lang tid vil temperaturen i vannet bli $3,5°C$ og kommer ikke til å bli mindre enn det.

e)

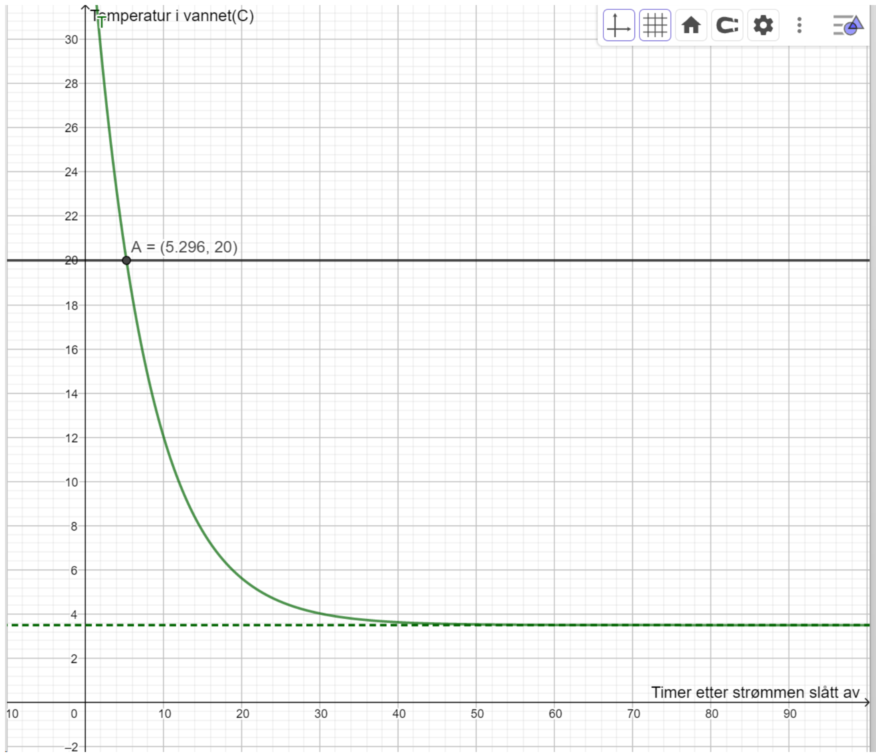
$l2 = \text{Asymptote}(T)$

$= \{y = 3.5\}$

$d = \text{Grenseverdi}(T, \infty)$

$= 3.5$

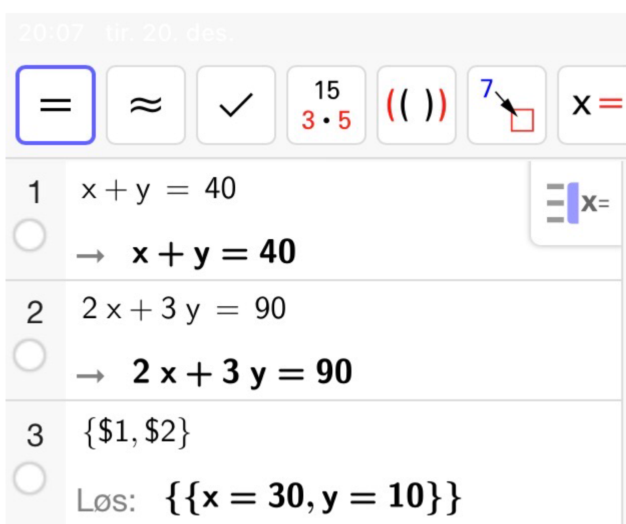
Figur 12



Figur 13

Oppgave 2 (3 poeng)

La x være antall leiligheter med 2 rom og y antall leiligheter med 3 rom:



Figur 14

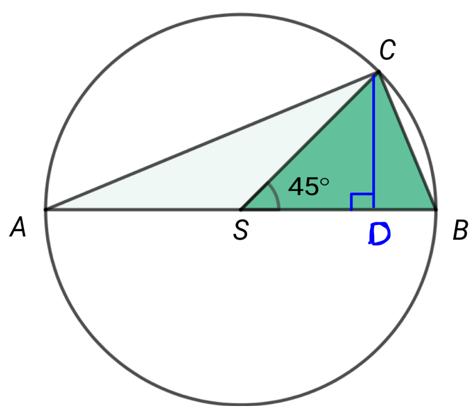
Det er 30 leiligheter med 2 rom og 10 leiligheter med 3 rom.

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
SB &= SC \quad \text{radius i sirkelen} \\
\angle SCB &= \angle CBS = \frac{180-45}{2} = \frac{135}{2} = 67,5^\circ \quad \text{trekanten SBC er likebeint trekant} \\
Areal_{\Delta SBC} &= \frac{1}{2} SB \cdot CD \\
\sin 45^\circ &= \frac{CD}{SC} \Rightarrow CD = SC \cdot \sin 45^\circ = SC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
3\sqrt{2} &= \frac{1}{2} \cdot SB \cdot SC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
3\sqrt{2} &= \frac{1}{2} \cdot (SB)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\
6 &= \frac{1}{2} (SB)^2 \\
SB &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

b)



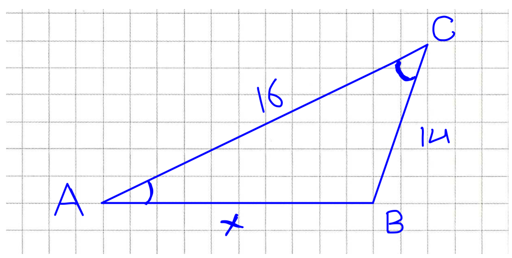
Figur 15

$$\begin{aligned}
CD &= SC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= SC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} \\
Areal_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot SB \cdot CD \\
&= SB \cdot CD = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \\
&= 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (5 poeng)

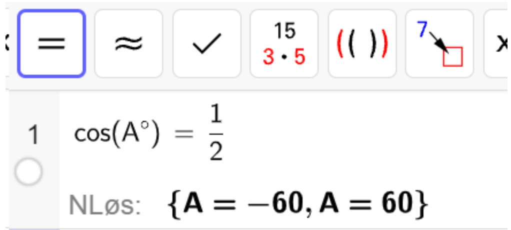
a)

De har fatt at lengdene på sidene i trekanten er $14, 16$ og x og vinkelen til siden som er 14 er $60°$



Figur 16

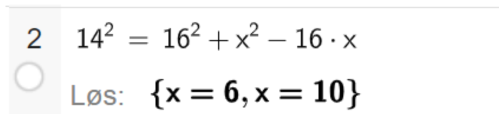
$$\begin{aligned}
14^2 &= 16^2 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot cos(A) \\
14^2 &= 16^2 + x^2 - 16x \\
2 \cdot 16 \cdot x \cdot cos(A) &= 16x \\
2 \cdot cos(A) &= 1 \\
cos(A) &= \frac{1}{2} \Leftarrow A = 60°
\end{aligned}$$



Figur 17

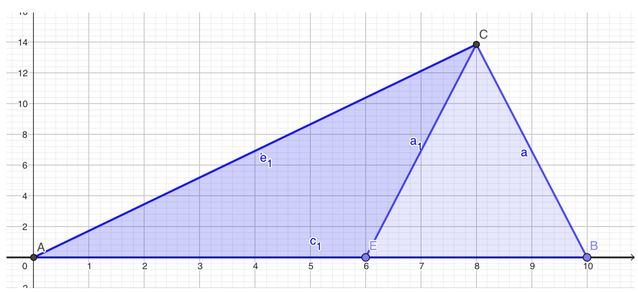
b)

Vi bruker Cas i Geogebra og finner at de to løsningene er $x = 6, x = 10$.



Figur 18

En skisse er vist på figuren nedenfor og da får vi to mulige trekanter: $\Delta ABC\, og\, \Delta AEC$



Figur 19

c)

Det er uendelig mange muligheter for at ligningen skal få bare e løsning. Vi referer til to tilfeller her (rad 6 og 8):

3 $a^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x\,\cos(60°)$

Løs: $\left\{x = \dfrac{b - \sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2}}{2}, x = \dfrac{b + \sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2}}{2}\right\}$

4 $4\,a^2 - 3\,b^2 = 0$

Løs: $\left\{a = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\,b, a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,b\right\}$

5 $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16$

$\rightarrow\ 8\sqrt{3}$

6 ByttUt$\left(\$3, \left\{b = 16, a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16\right\}\right)$

$\rightarrow\ \{x = 8, x = 8\}$

7 ByttUt$\left(\$3, \left\{b = 14, a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14\right\}\right)$

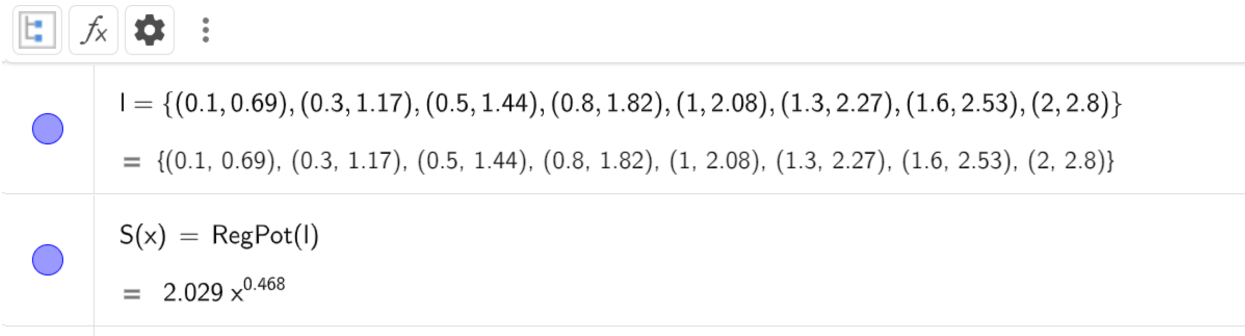
$\rightarrow\ \{x = 7, x = 7\}$

Figur 20

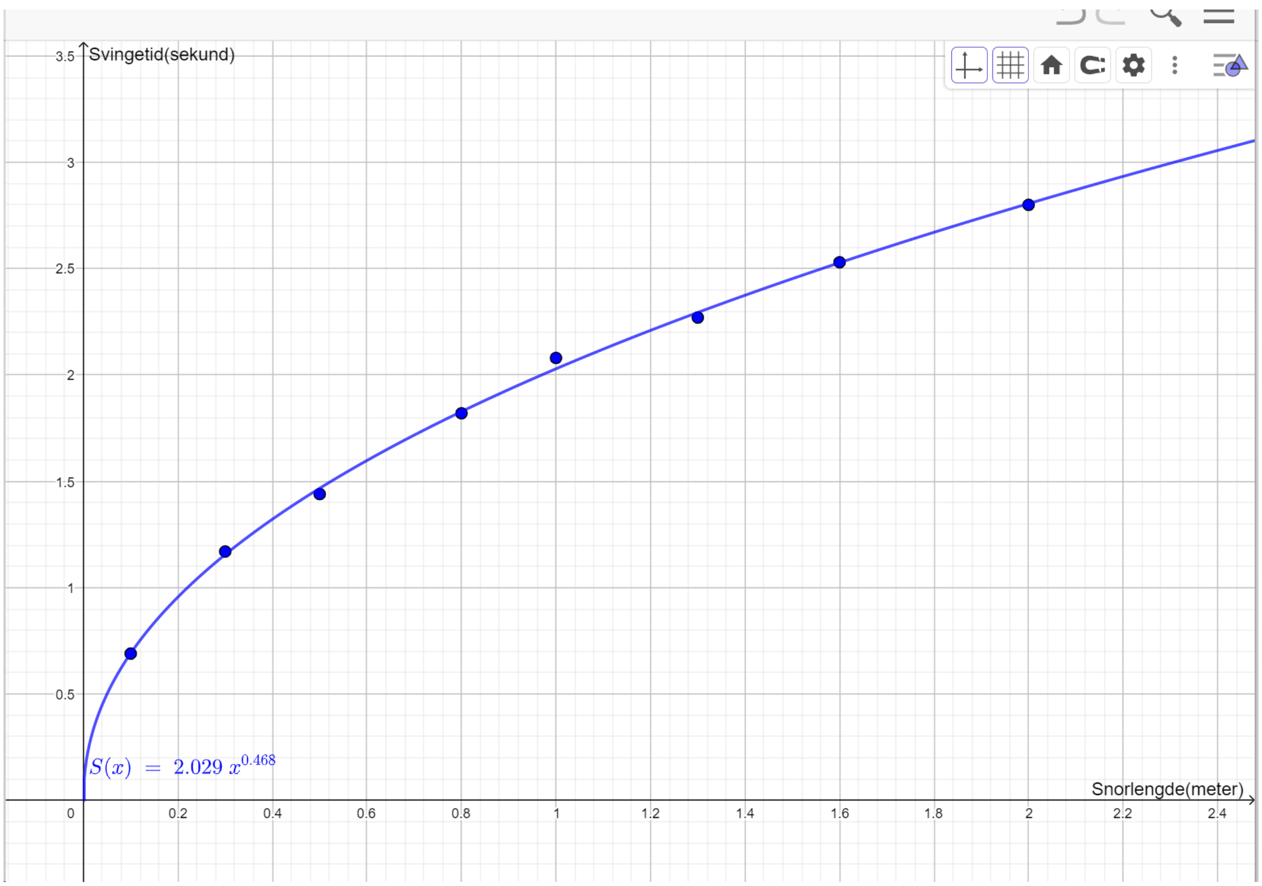
Oppgave 5 (5 poeng)

a)

Vi lager liste med punkter i Geogebra (algebrafelt) ,x som snorlengde og y som svingetid så bruker vi potens regresjon for å finne funksjonen(rad 2). Se skjermbilder nedenfor.



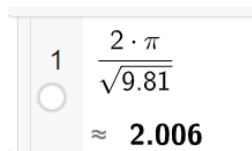
Figur 21



Figur 22

b)

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \\
&= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{x}{9,81}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{9,81}} \cdot \sqrt{x} \\
&= 2,006 \cdot x^{0,5}
\end{aligned}
$$



Figur 23

Vi ser at $S(x)$ og $T(X)$ er ganske like

Oppgave 6 (7 poeng)

a)

La

A=Areal av rektangelet

O= omkrets av rektangelet

x= lengden av rektangelet

y=bredden av rektangelet

$$
\begin{aligned}
A &= x \cdot y \\
O &= 2x + 2y \\
64 &= 2x + 2y \\
x + y &= 32 \\
y &= 32 - x
\end{aligned}
$$

Vi lager oversikt i Excel:

	A	B	C	D
1	Lengde	Bredde	Omkrets	Areal
2	1	31	64	31
3	2	30	64	60
4	3	29	64	87
5	4	28	64	112
6	5	27	64	135
7	6	26	64	156
8	7	25	64	175
9	8	24	64	192
10	9	23	64	207
11	10	22	64	220
12	11	21	64	231
13	12	20	64	240
14	13	19	64	247
15	14	18	64	252
16	15	17	64	255
17	16	16	64	256
18	17	15	64	255
19	18	14	64	252
20	19	13	64	247
21	20	12	64	240
22	21	11	64	231
23	22	10	64	220
24	23	9	64	207
25	24	8	64	192
26	25	7	64	175
27	26	6	64	156
28	27	5	64	135
29	28	4	64	112
30	29	3	64	87
31	30	2	64	60
32	31	1	64	31
33	32	0	64	0
34				

Figur 24

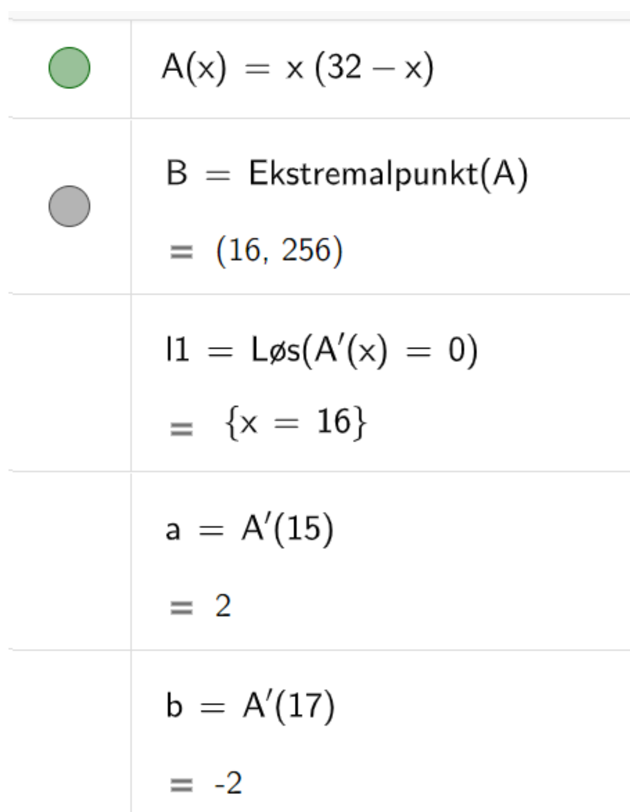
	A	B	C	D
1	Lengde	Bredde	Omkrets	Areal
2	1	=32-A2	=2*A2+2*B2	=A2*B2
3	2	=32-A3	=2*A3+2*B3	=A3*B3
4	3	=32-A4	=2*A4+2*B4	=A4*B4
5	4	=32-A5	=2*A5+2*B5	=A5*B5
6	5	=32-A6	=2*A6+2*B6	=A6*B6
7	6	=32-A7	=2*A7+2*B7	=A7*B7
8	7	=32-A8	=2*A8+2*B8	=A8*B8
9	8	=32-A9	=2*A9+2*B9	=A9*B9
10	9	=32-A10	=2*A10+2*B10	=A10*B10
11	10	=32-A11	=2*A11+2*B11	=A11*B11
12	11	=32-A12	=2*A12+2*B12	=A12*B12
13	12	=32-A13	=2*A13+2*B13	=A13*B13
14	13	=32-A14	=2*A14+2*B14	=A14*B14
15	14	=32-A15	=2*A15+2*B15	=A15*B15
16	15	=32-A16	=2*A16+2*B16	=A16*B16
17	16	=32-A17	=2*A17+2*B17	=A17*B17
18	17	=32-A18	=2*A18+2*B18	=A18*B18
19	18	=32-A19	=2*A19+2*B19	=A19*B19
20	19	=32-A20	=2*A20+2*B20	=A20*B20
21	20	=32-A21	=2*A21+2*B21	=A21*B21
22	21	=32-A22	=2*A22+2*B22	=A22*B22
23	22	=32-A23	=2*A23+2*B23	=A23*B23
24	23	=32-A24	=2*A24+2*B24	=A24*B24
25	24	=32-A25	=2*A25+2*B25	=A25*B25
26	25	=32-A26	=2*A26+2*B26	=A26*B26
27	26	=32-A27	=2*A27+2*B27	=A27*B27
28	27	=32-A28	=2*A28+2*B28	=A28*B28
29	28	=32-A29	=2*A29+2*B29	=A29*B29
30	29	=32-A30	=2*A30+2*B30	=A30*B30
31	30	=32-A31	=2*A31+2*B31	=A31*B31
32	31	=32-A32	=2*A32+2*B32	=A32*B32
33	32	=32-A33	=2*A33+2*B33	=A33*B33

Figur 25: Med formler

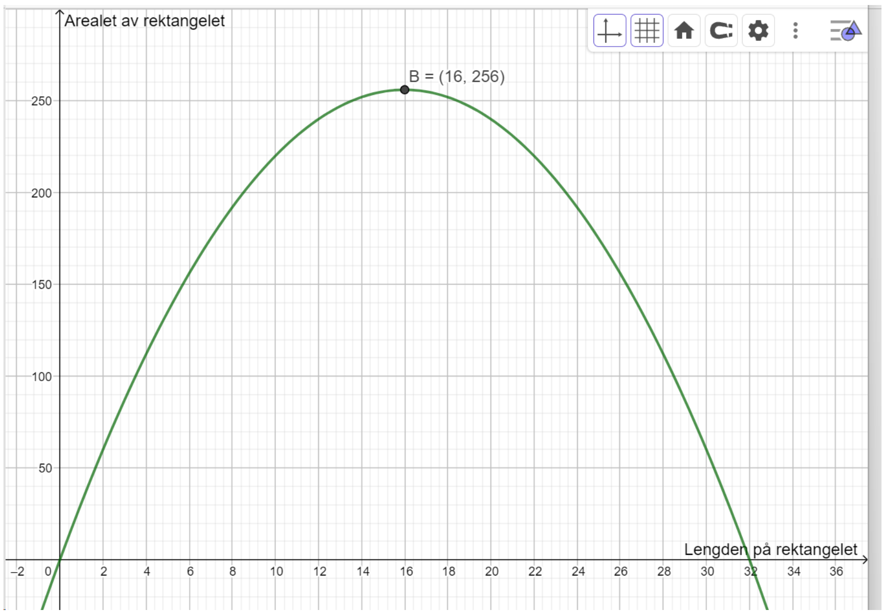
Fra tabellen ser vi at når lengden og bredden er 16 m er arealet størst. Så Per påstand er riktig.

b)

$$
\begin{aligned}
A &= x \cdot y \\
O &= 2x + 2y \\
64 &= 2x + 2y \\
x + y &= 32 \\
y &= 32 - x \\
A &= x \cdot (32 - x) \\
&= 32x - x^2 \\
A' &= 32 - 2x \\
A' &= 0 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = 32 - 16 = 16 \\
A'(15) &= 32 - \cdot 15 = 2 > 0 \\
A'(17) &= 32 - \cdot 17 = -2 < 0
\end{aligned}
$$



Figur 26

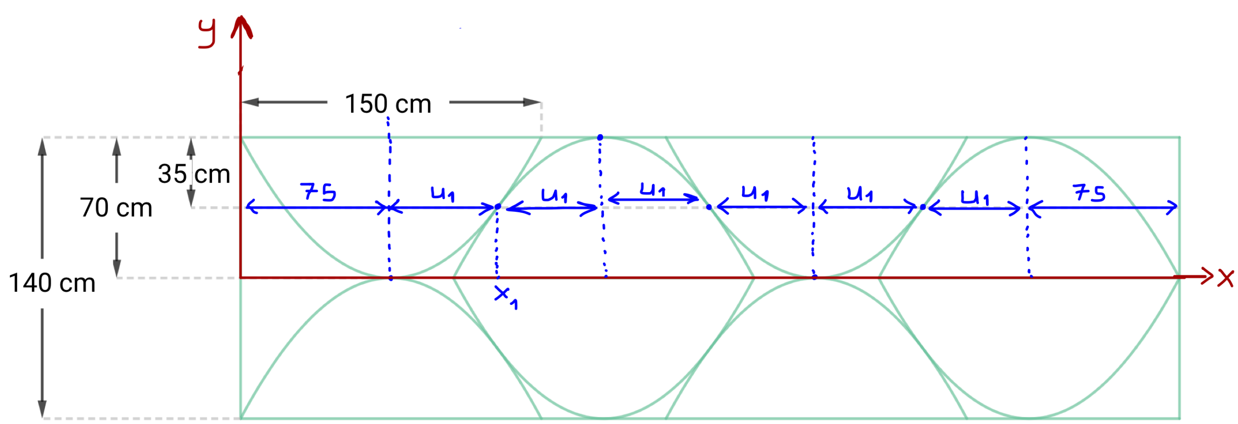


Figur 27

Vi ser at den deriverte skifter fortegn så $x = 16$ er et topppunkt og dermed arealet er størst mulig. Vi ser at x=y=16 så alle sidene er like. Resultatet er bekreftet grafisk også.Igjen Per påstand er riktig.

Oppgave 7 (10 poeng)

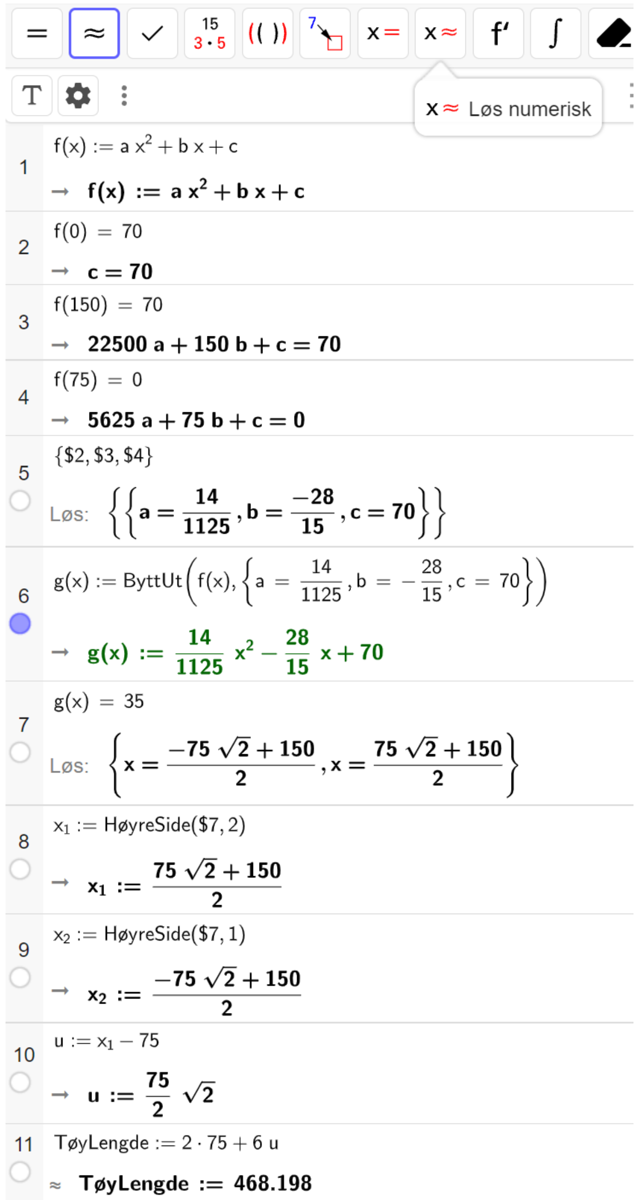
Vi setter figuren i et koordinatsystem slik vist i figuren nedenfor.



Figur 28

Vi bruker Cas til å finne en andregrads funksjon for for grafen helt til venstre og over x-aksen.

Vi lar u være avstanden fra bunnpunktet til tangeringspunktet mellom de to funksjoner (to gardiner) til venstre og over x-aksen. Vi bruker funksjonsuttrykket ($g(x)$) til å finne x verdien til tangeringspunktet (rad 7 og 8). Vi bruker også symmetri egenskapene av andregradsfunksjon for å finne minst tøylengde. Minst tøylengde for å lage 8 gardiner er $468,198m$



Figur 29