Løsningsforslag eksamen R2 - Høst 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^3+\sin(\pi x) \Rightarrow f'(x)=3x^2+\cos(\pi x)\cdot\pi=\underline{\underline{3x^2+\pi\cos(\pi x)}}$

b) $g(x)=\ln(2+\cos x) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)=\underline{\underline{-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}}}$

Oppgave 2

a) $\int\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-e^{-x}+1\right)dx=\underline{\underline{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+e^{-x}+x+C}}$

b) Finner først det ubestemte integralet ved hjelp av variabelskifte:

$u=x^2$ gir $\dfrac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2x}$.

$\int x\cdot\sin x^2 dx=\int x\cdot\sin u\dfrac{du}{2x}=\dfrac{1}{2}\int\sin u\,du=-\dfrac{1}{2}\cos u+C=-\dfrac{1}{2}\cos x^2+C$.

Det bestemte integralet blir da:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cdot\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}\left(\cos(\pi)-\cos 0\right)=-\frac{1}{2}(-1-1)=-\frac{1}{2}(-2)=\underline{\underline{1}}$$

Oppgave 3

a) Vi har en separabel differensiallikning.

$$y'=\frac{2x^2}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{y}$$

$$y\ dy=2x^2dx$$

Integrerer på begge sider:

$$\frac{1}{2}y^2+c_1=\frac{2}{3}x^3+c_2$$

$$y^2=\frac{4}{3}x^3+C \qquad (c_2-c_1=C)$$

Generell løsning:

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^3 + C}$$

$y(0) = 3$ gir $C = 9$, så $\underline{\underline{y = \sqrt{\frac{4}{3}x^3 + 9}}}$

b) $y = 2\sin(3x) + x \Rightarrow y' = 6\cos(3x) + 1 \Rightarrow y'' = -18\sin(3x)$.

Dette gir:

$$y'' + 9y = -18\sin(3x) + 9\left(2\sin(3x) + x\right)$$

$$y'' + 9y = -18\sin(3x) + 18\sin(3x) + 9x$$

$$y'' + 9y = 9x$$

$y = 2\sin(3x) + x$ er altså en løsning av differensiallikningen $y'' + 9y = 9x$, <u>som skulle avgjøres</u>.

Oppgave 4

a) $d = \dfrac{68-8}{23-3} = \dfrac{60}{20} = 3$

Dette gir:

$a_1 = a_3 - 2d = 8 - 6 = 2$ og $a_{100} = a_1 + 99d = 2 + 297 = 299$.

Da har vi:

$$s_{100} = \frac{2+299}{2} \cdot 100 = 301 \cdot 50 = \underline{\underline{15050}}$$

b) Starter med å bestemme a_1.

Når $a_2 = a_1 + 4$, har vi $d = 4$, slik at $a_{10} = a_1 + 9 \cdot 4 = a_1 + 36$.

$$s_{10} = 240$$

$$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 240$$

$$\frac{a_1 + a_1 + 36}{2} \cdot 10 = 240$$

$$(a_1 + 18) \cdot 10 = 240$$

$$a_1 + 18 = 24$$

$$a_1 = 6$$

Bestemmer så a_{20} og videre s_{20}:

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot 4 = 6 + 76 = 82$$

så

$$s_{20} = \frac{6+82}{2} \cdot 20 = 88 \cdot 10 = \underline{\underline{880}}$$

Oppgave 5

a) Ut fra figuren kan vi se at likevektslinja er $y = -1$, men kan også regne ut:

$$d = \frac{3+(-5)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ser videre at avstanden, i y-retning, mellom likevektslinja og topp- og bunnpunktene er 4, så amplituden er 4.

Avstanden, i x-retning, mellom bunnpunktene er 2π, så perioden er 2π.

Siden perioden er gitt ved $\frac{2\pi}{c}$, vet vi da at $c = 1$.

Grafen er stigende og krysser likevektslinja for $x = \frac{\pi}{3}$, så vi har en forskyvning $\frac{\pi}{3}$ mot høyre. Det gir her $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

$$\underline{\underline{f(x) = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1}}$$

b)

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \qquad (k \in Z)$$

$x \in [0, 3\pi]$ gir: $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{3}}}$

Oppgave 6

a)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z = 11$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = 11 + 4 + 1 + 9$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

Vi ser ut fra likningen at sentrum i kuleflaten er $S(2,-1,3)$, <u>som skulle vises</u>.

Vi ser også ut fra likningen at <u>radiusen til kuleflaten er 5</u>.

b) Når planet tangerer kuleflaten i *P*, vil $\overrightarrow{PS}$ stå normalt på planet, og dermed være en normalvektor for planet.

$\overrightarrow{PS} = [2-6, -1-(-4), 3-3] = [-4,3,0]$.

Bruker denne normalvektoren og punktet *P* til å bestemme en likning for planet:

$$-4(x-6) + 3(y-(-4)) + 0 \cdot (z-3) = 0$$
$$-4x + 24 + 3y + 12 = 0$$
$$-4x + 3y + 36 = 0$$
$$-4x + 3y = -36$$
$$4x - 3y = 36$$

$$\underline{\underline{\alpha: \quad 4x - 3y = 36}}$$

c) Bruker at $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PS}$ og bestemmer posisjonsvektoren til *Q*.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = [6,-4,3] + 2[-4,3,0] = [6-8, -4+6, 3+0] = [-2,2,3]$$

$$\underline{\underline{Q = (-2,2,3)}}$$

d) Lar *C* være sentrum i skjæringssirkelen og *B* være et skjæringspunkt mellom β og kuleflaten.

Da vil sentrum i kuleflaten, sentrum i skjæringssirkelen og skjæringspunktet *B* danne en rettvinklet trekant SCB.

Når avstanden fra β til *Q* er 3, må avstanden fra β til *S* være 2.

Da har vi at en ene kateten CS har lengde 2.

SB er hypotenus i trekanten og har lengde 5 (radius i kuleflaten).

Den siste kateten er da CB, og lengden av denne er radius til skjæringssirkelen mellom β og kuleflaten.

$$CB = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$$

$$\underline{\underline{\text{Radius i skjæringssirkelen mellom } \beta \text{ og kuleflaten er } \sqrt{21}}}$$

Oppgave 7

a) Når Oline har satt inn *a* for *x* i utregningen av det bestemte integralet har hun fått
$a^3 - \ln a + 3a$ (de tre første leddene i løsningen hennes).
Tar vi utgangspunkt i dette, og setter inn 1 for *x* istedenfor *a*, får vi
$1^3 - \ln 1 + 3 \cdot 1 = 1 - 0 + 3 = 4$.
Siste leddet i Oline sin løsning skulle altså ha vært 4, ikke -3.
(gitt at resten av oppgaven var løst riktig).
Olines svar kan altså ikke være riktig. Som skulle forklares.

b) Når de første tre leddene i Oline sin besvarelse er riktige, kan vi si at
$\int f(x)\,dx = x^3 - \ln x + 3x + C$.
Da kan vi derivere, ledd for ledd, for å bestemme $f(x)$.

$$\underline{\underline{f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + 3}}$$

Oppgave 8

a) Linjestykket *OP* ligger langs grafen til funksjonen $f(x) = \frac{3}{2}x$.

$$\pi \cdot \int_0^h f(x)^2\,dx = 48\pi$$

$$\int_0^h \frac{9}{4}x^2\,dx = 48$$

$$\frac{9}{4}\int_0^h x^2\,dx = 48$$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = 48$$

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3}h^3 = 48$$

$$\frac{3h^3}{4} = 48$$

$$h^3 = \frac{48 \cdot 4}{3}$$

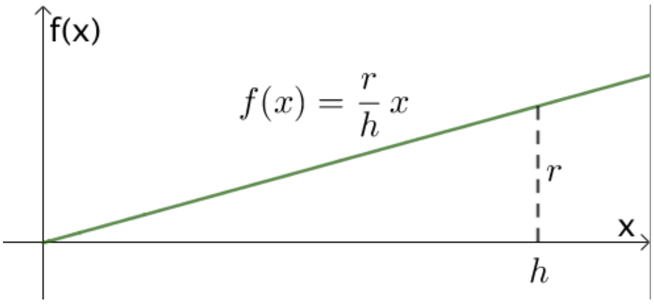
$$h^3 = 16 \cdot 4$$

$$h^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$h = 4$$

$$\underline{\underline{V \text{ blir } 48\pi \text{ når } h = 4}}$$

b)



Kjeglen blir dannet ved at man dreier flatestykket avgrenset av grafen til *f*, *x*-aksen og linja $x = h$ $360°$ om *x*-aksen.

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{r^2\pi}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{r^2\pi}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{r^2\pi}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

som skulle vises.

Del 2

Oppgave 1

a)

$$\overrightarrow{AB} = [t-2, 3, 2t] \text{ og } \overrightarrow{AC} = [0, 0, t]$$

så

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3t, -(t-2)t, 0] = [3t, 2t - t^2, 0] = t[3, 2-t, 0]$$

$\vec{n} = [3, 2-t, 0]$ er en normalvektor for planet gjennom *A, B* og *C*.

Bruker $\vec{n}$ og koordinatene til *A* og bestemmer en likning for planet.

$$3(x-2) + (2-t)(y+3) + 0(z-0) = 0$$
$$3x - 6 + 2y + 6 - t\cdot y - 3t = 0$$
$$3x + 2y - t\cdot y = 3t$$
$$3x + (2-t)y = 3t$$

Likningen for planet gjennom punktene *A, B* og *C* kan skrives som

$$3x + (2-t)y = 3t$$

Som skulle vises.

b) $\overrightarrow{AB} = [t-2, 3, 2t]$, $\overrightarrow{AC} = [0, 0, t]$ og $\overrightarrow{BC} = [2-t, -3, -t]$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = [t-2, 3, 2t]\cdot[0, 0, t] = 2t^2$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = [t-2, 3, 2t]\cdot[2-t, -3, -t] = 2t - t^2 - 4 + 2t - 9 - 2t^2 = -3t^2 + 4t - 13$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left[0,0,t\right]\cdot\left[2-t,-3,-t\right]=-t^2$$

Vi ser at to av skalarproduktene blir 0 for $t=0$
Dersom vi har $t=0$, vil imidlertid punktene *A* og *C* sammenfalle, slik at vi ikke har noen trekant.
(Det er oppgitt i oppgaveteksten at $t\neq 0$, så dette er allerede avklart).
Vi må derfor se nærmere på $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

CAS

1 $-3t^2+4t-13=0$
Løs: $\{\}$

Det finnes altså ingen *t* som gjør at $\angle ABC=90^\circ$.

ΔABC er *ikke* rettvinklet for noen verdier av *t*.
<u>Som skulle avgjøres</u>.

c) Har fra deloppgave a) at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left[3t,2t-t^2,0\right]$.

$$\overrightarrow{AT}=\left[1-2,-3-(-3),1-0\right]=\left[-1,0,1\right].$$

Bestemmer *t* slik at volumet av pyramiden blir 10:

$$\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AT}\right|}{6}=10$$

$$\frac{\left|\left[3t,2t-t^2,0\right]\cdot\left[-1,0,1\right]\right|}{6}=10$$

$$\frac{\left|-3t\right|}{6}=10$$

$$\left|-3t\right|=60$$

$$t=\pm 20$$

$$\underline{\underline{\text{Volumet av pyramiden blir 10 når } t=\pm 20}}$$

Oppgave 2

a) A' beskriver endringen i antallet ansatte. Når man har satt opp differensiallikningen $A'=0{,}1A-1$ for å beskrive endringen, kan ledelsen ha antatt at man antall nye ansettelser hvert år vil tilsvare 10 % av det til enhver tid antallet ansatte i bedriften. I tillegg kan man ha antatt at én ansatt slutter per år, for eksempel ved at vedkommende går av med pensjon.

b) Løser differensiallikningen $A' = 0{,}1A - 1$, med initialbetingelsen $A(0) = 158$.

(Bruker y og y' for A og A' når jeg løser i CAS)

CAS

1 LøsODE(y'=0.1y−1, (0,158))

→ $y = 148\,e^{\frac{x}{10}} + 10$

Dette gir modellen $A(t) = 148e^{\frac{t}{10}} + 10$.

2 A(t):=148e^(t / 10) + 10

→ $A(t) := 148\,e^{\frac{1}{10}t} + 10$

3 A(10)

≈ 412.306

I følge modellen vil det være omtrent 412 ansatte om 10 år.

<u>Bedriftens antagelse om at antallet ansatte vil overstige 400 i løpet av 10 år kan stemme.</u>

Oppgave 3

a) Vi skal her finne summen av de fire første leddene i ei geometrisk rekke der

$a_1 = 24$ og $k = \frac{3}{4}$.

CAS

1 24*((3/4)⁴−1)/((3/4)−1)

✓ $24 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1}{\frac{3}{4} - 1}$

2 24((3 / 4)⁴ − 1) / (3 / 4 − 1)

→ $\frac{525}{8}$

3 525 / 8

≈ 65.625

$$\underline{\underline{\text{De fire første halvkvadratene har samlet sidelengde } \frac{525}{8} \approx 65{,}125}}$$

b) Vi tar utgangspunkt i rekka fra forrige deloppgave, og ser hvor mange ledd denne må ha for at summen skal overstige 90.

CAS

1 24*((3/4)^x-1)/((3/4)-1)=90

✓ $24 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 90$

2 24((3 / 4)^x - 1) / (3 / 4 - 1) = 90,x=1

NLøs: $\{x = 9.638\}$

Det må altså være 10 ledd i rekka for at summen skal overstige 90.

<u>Vi må ha minst 10 halvkvadrater for at samlet sidelengde skal bli mer enn 90.</u>

c) Vi har nå ei geometrisk rekke der $k = \frac{3}{4}$ og summen av de 20 første leddene er 120.

CAS

1 a_1*((3/4)^20-1)/((3/4)-1)=120

✓ $a_1 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{20} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 120$

2 a_1 ((3 / 4)^20 - 1) / (3 / 4 - 1) = 120

Løs: $\left\{a_1 = \frac{6597069766656}{219204968675}\right\}$

3 {a_1 = 6597069766656 / 219204968675}

≈ $\{a_1 = 30.095\}$

Summen av sidelengdene i det første halvkvadratet må være 30,095 for at samlet sidelengde i de 20 første halvkvadratene skal være 120.

<u>Det betyr at det første halvkvadratet må ha to kortsider med lengde ca.7,5 og lengden til langsiden må være omtrent 15.</u>

d) Når vi regner ut arealet av et halvkvadrat multipliserer vi to sidelengder.

Når sidelengdene i et halvkvadrat er $\frac{3}{4}$ av sidelengdene i det forrige halvkvadratet, vil arealet av et halvkvadrat være $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ av arealet til det forrige halvkvadratet.

Vi skal altså her bestemme summen av ei uendelig geometrisk rekke der $a_1 = 72$ og $k = \frac{9}{16}$.

1	72/(1-(9/16)) ✓ $\frac{72}{1-\frac{9}{16}}$
2	72 / (1 - 9 / 16) → $\frac{1152}{7}$
3	1152 / 7 ≈ 164.571

Summen av arealene blir $\frac{1152}{7} \approx 164{,}6$ når vi tar med uendelig mange halvkvadrater.

Oppgave 4

a)

CAS

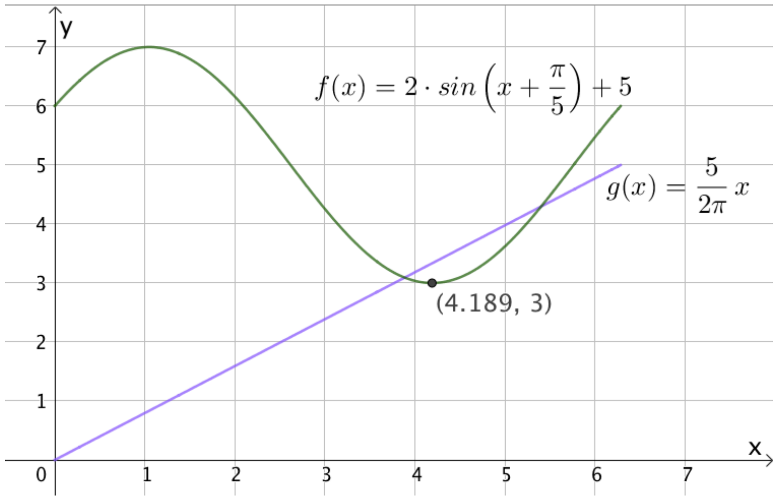
1	f(x):=2*sin(x+pi/6)+5 → $f(x) := 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) + 5$
2	pi*Integral(f², 0, 2pi) ✓ $\pi \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx$
3	π Integral(f(x)²,0,2π) → $54\pi^2$

M har volum $54\pi^2 \approx 533$

b) Grafen som må dreies $360°$ om x-aksen for å lage kjeglen, kan være ei rett linje gjennom origo med stigningstall $\frac{5}{2\pi}$.

Tegner grafen til $g(x) = \frac{5}{2\pi}x$ sammen med grafen til f.

(Se øverst neste side).

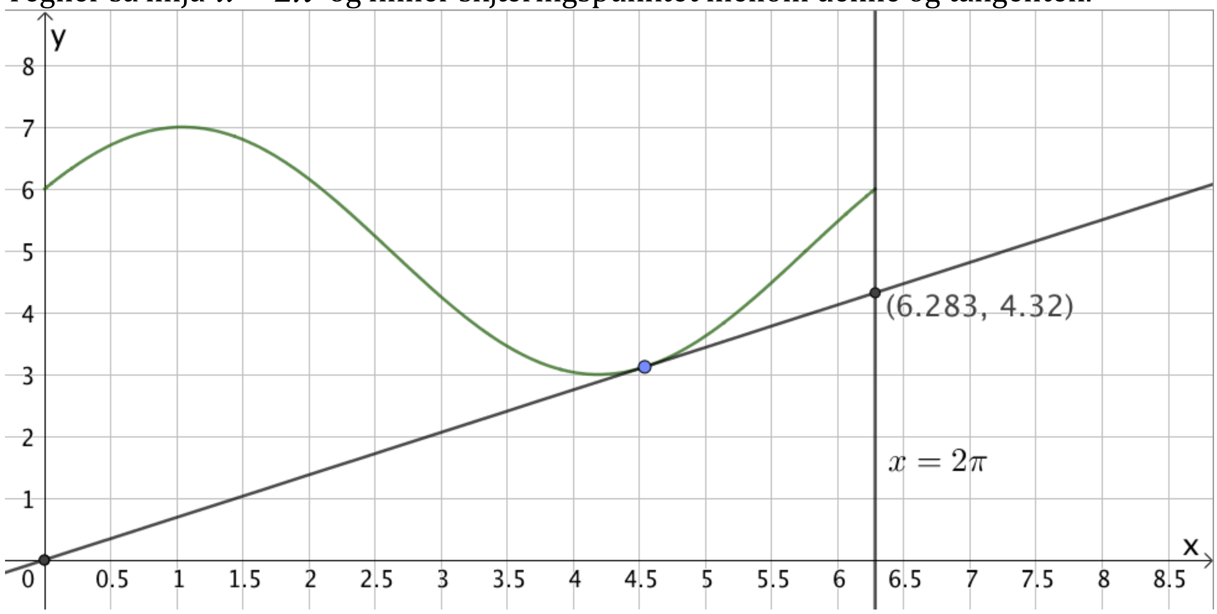


Vi kan se klart av bildet over at grafen til *g* skjærer grafen til *f*, og da vil ikke omdreiningslegemet gitt ved å dreie grafen til *g* $360°$ om *x*-aksen få plass inni omdreiningslegemet gitt ved å dreie grafen til *f* $360°$ om *x*-aksen (krukken).

<u>Kjeglen får *ikke* plass i krukken dersom radiusen til kjeglen er 5 dm.</u>

c) Hvis kjeglen skal få plass inni krukken, kan grafen som må dreies $360°$ om *x*-aksen for å lage kjeglen være ei rett linje gjennom origo som tangerer grafen til *f*.

Lager en tangent på grafen til *f* og justerer tangeringspunktet slik at tangenten går gjennom origo.
Tegner så linja $x = 2\pi$ og finner skjæringspunktet mellom denne og tangenten.



<u>Den største radiusen kjeglen kan ha for å få plass i krukken er ca.4,3 desimeter.</u>