Utdanningsdirektoratet

Løsningsforslag med kommentarer til Eksempelsett

Høsten 2022

REA3062 Matematikk S2

Del 1

Oppgave 1
Regn ut integralene

a) $\displaystyle\int_0^1 (4x^2+3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 4x\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

Løsning:

a) $\displaystyle\int_0^1 (4x^2+3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3+3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}+3 = \frac{13}{3}$

b) Bruker variabelskiftet $u = x^2+2$. Da er $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ og

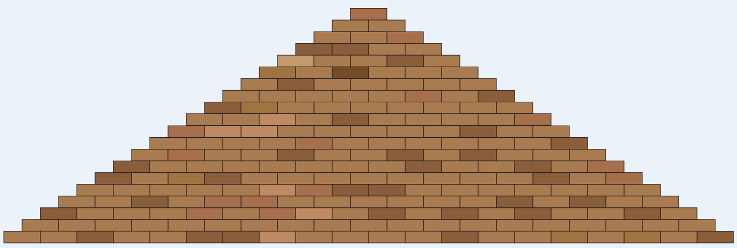
$$\int 4x\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{4}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}+C$$

Merk at svaret i oppgave b) kan uttrykkes på flere måter. Svaret $\dfrac{4}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}+C$ godtas selvsagt også.

Oppgave 2

a) Forklar hva det vil si at en rekke $a_1+a_2+\cdots+a_n$ er aritmetisk.

b) En murer skal lage en vegg slik figuren viser. Bruk teorien om rekker til å bestemme hvor mange murstein mureren trenger, når han vet at det er totalt 20 rader med murstein.



Løsning:

a) En rekke $a_1+a_2+\cdots+a_n$ er aritmetisk dersom differansen $a_{k+1}-a_k = d$ er den samme for alle k-verdiene.

b) Dette blir en aritmetisk rekke med 20 ledd. Vi får derfor

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{1+20}{2} \cdot 20 = 210$$

Han trenger 210 mursteiner.

Oppgave 3
En uendelig geometrisk rekke $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$ konvergerer mot 6.

Summen av de seks første leddene er $\frac{38}{9}$.

Bestem summen av de fire første leddene.

Løsning:

Ut fra opplysningene får vi følgende to likninger:

$$\frac{b_1}{1-k} = 6$$

$$b_1 \cdot \frac{1-k^6}{1-k} = \frac{38}{9}$$

Dette gir oss $1 - k^6 = \frac{38}{9 \cdot 6}$. Det vil si at $k^6 = 1 - \frac{19}{27} = \frac{2^3}{3^3}$. Altså må $k^2 = \frac{2}{3}$.

Da har vi nok til å finne s_4:

$$\begin{aligned} s_4 &= b_1 \cdot \frac{1-k^4}{1-k} = \frac{b_1}{1-k} \cdot (1-(k^2)^2) \\ &= 6 \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{30}{9} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 4
En sannsynlighetsfordeling er gitt ved tabellen nedenfor.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,2	k	$2k$	$5k$

a) Forklar hvorfor k må være 0,1. Bestem forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$.

b) Bestem variansen $\mathrm{Var}(X)$.

Løsning:

a) Summen av alle sansynlighetene må være 1 til sammen. Vi får derfor

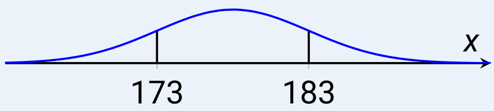
$$0{,}2 + k + 2k + 5k = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}2 + 8k = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 0{,}1$$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 = 2$$

b) $$\mathrm{Var}(X) = 2^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 1{,}4$$

Oppgave 5

I en gruppe elever er høyden tilnærmet normalfordelt, med forventningsverdi μ og standardverdi σ.



I denne fordelingen er 15,9 % av elevene lavere enn 173 cm og 15,9 % er høyere enn 183 cm.

a) Bestem μ og σ.

b) Hvor stor andel av elevene er høyere enn 180 cm?

Løsning:

a) Vi ser at 173 og 183 ligger symmetrisk om μ siden det er samme sansynlighet for at en tilfeldig elev er mindre enn 173 cm som over 183 cm. Altså må $\mu = 178$ cm.

Vi ser at 5 cm svarer til 1.0 standardavvik (ved å lese av i Standard normalfordelingstabell). Altså er $\sigma = 5$ cm.

b) Bruker standard normalfordeling $Z = \dfrac{X - 178}{1{,}0} = X - 178$:

$$\begin{aligned} P(X > 180) &= P(X \leq 176) \\ &= P\left(Z \leq -\frac{2}{5}\right) \\ &= P(Z \leq -0{,}40) \\ &= 0{,}3446 \end{aligned}$$

Ca. 34 prosent av elevene er høyere enn 180 cm.

Oppgave 6

Forklar hvorfor vi kan sette grensekostnad lik grenseinntekt, $K'(x) = I'(x)$, når vi skal finne det største overskuddet.

Løsning:

Vi har at overskuddsfunksjonen er $O(x) = I(x) - K(x)$. Der den har et ekstremalpunkt vil den deriverte være 0 (om vi ikke regner med endepunkt og andre punkt der funksjonen ikke er deriverbar). Altså må $O'(x) = I'(x) - K'(x) = 0$. Det vil si at $I'(x) = K'(x)$.

Oppgave 7
En elev har skrevet følgende kode:

```
1  from math import sqrt #Importerer kvadratrotfunksjonen
2  a = 0
3  b = 2
4  n = 1000
5
6  def f(x):
7      return x**2 + 2 #Definerer funksjonen f(x)=x^2+2
8
9  I = 0
10 h = (b-a)/n
11
12 for i in range(n): #Lar i gjennomløpe tallene 0,1,...,n-1
13     I = I + f(a + i*h)*h
14
15 print(round(I, 3))
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir det eksakte svaret på oppgaven eleven ønsker å regne ut?

Løsning:

a) Eleven ønsker å regne ut $\int_0^2 \left(x^2+2\right)\,dx$ ved å summere arealet til $n = 1000$ rektangler i dette intervallet. Hvert intervall har bredde h definert på linje 10. Høyden i rektanglene er $f(a + i \cdot h)$, der $i \in \{0, 1, \ldots, 999\}$. Det er for-løkken som legger til alle disse arealene til variabelen I. På linje 15 blir svaret printet ut med tre desimaler.

b) Vi regner ut integralet.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(x^2+2\right)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3} + 4 \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Del 2

Oppgave 1
Tabellen nedenfor viser markedsverdien (i milliarder kroner) til Statens pensjonsfond utland, «Oljefondet», for noen år.

År	2000	2004	2008	2012	2016	2020	2021
Markedsverdi (milliarder kroner)	386	1016	2275	3816	7510	10914	12340

a) Lag en logistisk modell g som gir oss markedsverdien x år etter 2000.

b) Vil markedsverdien noen gang bli mer enn 20 000 milliarder kroner ifølge modellen?

c) I hvilket år vokste markedsverdien raskest ifølge modellen g?

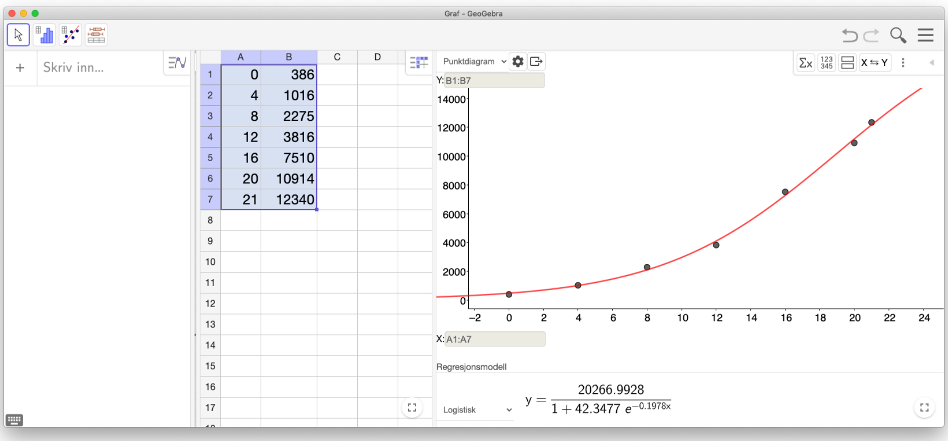
En politiker mener at en logistisk modell ikke er realistisk, siden det er rimelig å anta at verdien av fondet ikke vil stagnere i framtiden.

d) Foreslå en annen modell h som du mener kan være rimelig å bruke for verdien av fondet, dersom antagelsen til politikeren legges til grunn.

e) Hvor mye raskere vil verdien av fondet øke per år i 2023 ifølge modellen h sammenliknet med modellen g?

Løsning:

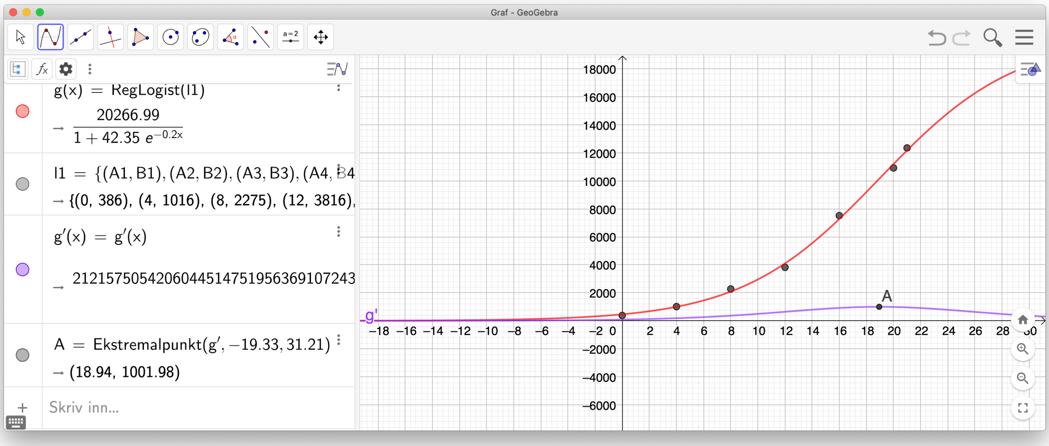
a) Bruker GeoGebra. Fører tallene inn i regnearket og bruker regresjonsanalyseverktøyet. Vi ser at $g(x) = \dfrac{20267}{1 + 32{,}34 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}198x}}$



b) Vi ser at $\lim_{x\to\infty} g(x) = 20\,267 > 20\,000$. Derfor vil marketsverdien passere 20 000 milliarder kroner ifølge modellen.

Vi kunne også forsøke å løse likningen, for eksempel i GeoGebra og se at det er en løsning.

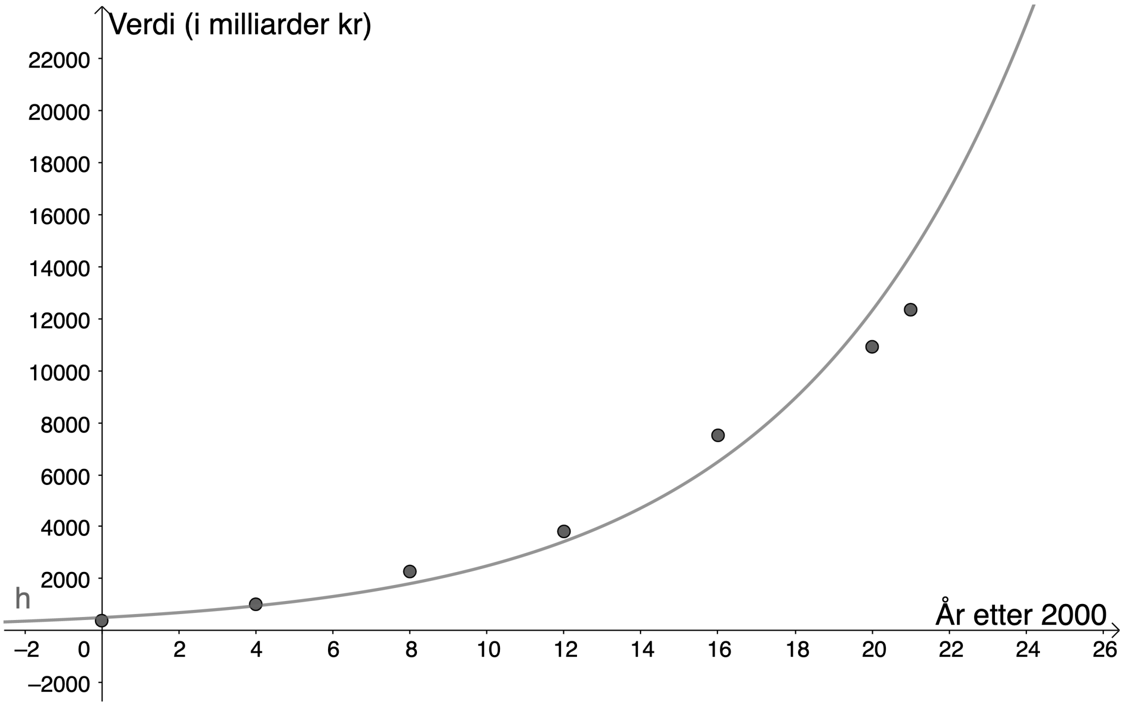
c) Jeg finner når den deriverte har sin største verdi. Det gjør jeg ved å deriver g og så finne toppunktet ved å bruke verktøyet Ekstremalpunkt. Vi ser at fondet vil vokse raskest i 2019 siden toppunktet er i $(18{,}9, 1001{,}98)$.



d) Det er rimelig å anta at det er en prosentvis vekst fra år til år. Det vil si at det er en eksponentiell vekst. Jeg bruker kommandoen RegEksp(l1) og får modellen

$$h(x) = 504 \cdot 1{,}174^x$$

Vi ser av den grafiske framstillingen at modellen passer sånn noenlunde.



e) Jeg regner ut $h'(23) - g'(23) = 2317$. Det vil si at fondet vil øke med 2317 milliarder kroner mer i 2023 ifølge modellen h sammenliknet med modellen g.

Oppgave 2

Levetiden T (i timer) til en tilfeldig lyspære av en bestemt type er en stokastisk variabel. Det viser seg at

$$P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

der tetthetsfunksjonen f er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} k \cdot \mathrm{e}^{-0{,}005t} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

a) Vis at $k = 0{,}005$.

b) Hva er sannsynligheten for at lyspærens levetid er mer enn 400 timer?

Forventningsverdien μ til en kontinuerlig stokastisk variabel med tetthetsfunksjon f er gitt ved

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Bestem forventningsverdien til T.

Løsning:

a) Vi må ha at $P(T < \infty) = 1$:

$$1 = \int_0^\infty k\, e^{-0.005x}\, dx$$

NLøs: $\{k = 0.005\}$

b) Regner ut sannsynligheten i GeoGebra CAS:

$$\int_{400}^\infty 0.005\, e^{-0.005x}\, dx$$

$\approx$ **0.1353**

Vi ser at sannsynligheten er ca 13,5 prosent for at en tilfeldig lyspære vil lyse mer enn 400 timer.

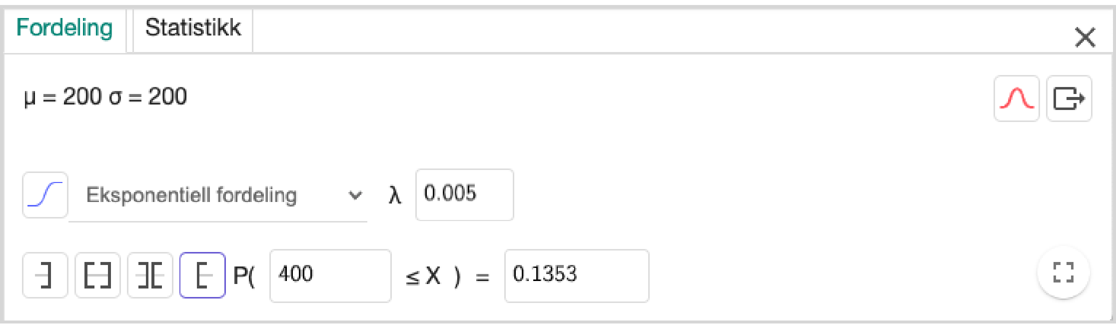
c) Regner ut integralet i GeoGebra CAS. Siden tetthetsfunksjonen er null når x er mindre enn 0, så er det nok å regne ut integralet fra 0 til ∞:

$$\int_0^\infty x \cdot 0.005\, e^{-0.005x}\, dx$$

$\approx$ **200**

Vi ser at forventningsverdien er $\mu = 200$.

Merk at vi kunne også funnet svarene til oppgave b) og c) ved å bruke Eksponentiel fordeling i GeoGebra CAS. Vi regner ikke med at elevene kjenner til dette verktøyet.



Oppgave 3
Sigrid har to terninger som hun syntes mistenkelig ofte gav seksere. Hun testet derfor de to terningene ved å kaste dem 100 ganger og telle opp antall ganger begge terningene gav seksere. Det viste seg begge terningene gav seksere sju ganger.

Bruk det du har lært om hypotesetesting og sannsynlighet til å avgjøre om Sigrid kan ha grunn til mistanken. Synliggjør de forutsetningene du mener er nødvendige for utregningene dine.

Løsning:

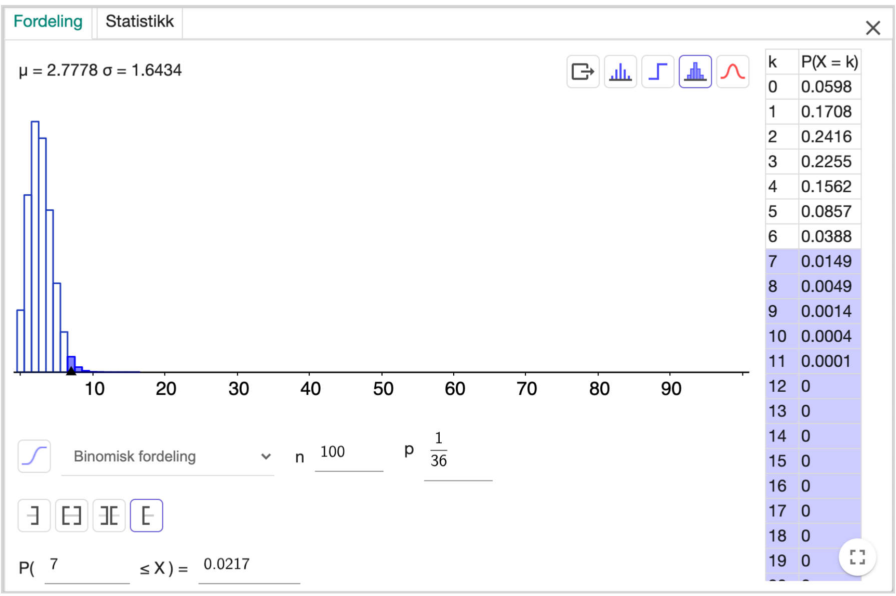
Dersom de to terningene er rettferdige, vil sannsynligheten for å få to seksere i et kast være $p = \frac{1}{36}$.

Jeg setter opp hypotesene

$$H_0 : \ p = \frac{1}{36}$$
$$H_1 : \ p > \frac{1}{36}$$

Jeg lar X være antall ganger vi får to seksere når vi kaster de to terningene 100 ganger. Jeg antar at nullhypotesen er sann. Det vil si X er binomisk fordelt med $p = \frac{1}{36}$. På dette grunnlaget regner jeg ut $P(X \geq 7)$. Jeg bruker GeoGebra Sannsynlighetskalkulator til å regne ut sannsynligheten. Vi ser at $P(X \geq 7) = 0{,}0217$.

Dersom vi bruker et signifikansnivå på 5 prosent, så må vi forkaste nullhypotesen og konkludere med at det er stor sannsynlighet for at terningene viser for ofte to seksere.



Oppgave 4
Bjarne skal kjøpe et hjemmekinoanlegg. Anlegget koster 20 000 kroner. Han velger å kjøpe det på avbetaling. Han må da betale 729 kroner per måned i 36 måneder. Første avbetaling er én måned etter kjøpsdatoen.

Bestem renten per måned for dette avbetalingstilbudet. Hva er årsrenten?

Løsning: Anta vekstfaktoren er x. Vi kan summere opp alle de 36 nåverdiene. Disse skal til sammen bli 20 000.

Det vil si at

$$20000 = \frac{729}{x} + \frac{729}{x^2} + \cdots + \frac{729}{x^{36}}$$

Jeg løser likningen i GeoGebra CAS:

1 $20000 = \sum_{k=1}^{36} \frac{729}{x^k}$

Løs: $\{\mathbf{x = -0.8956, x = 1.0155}\}$

2 $\mathrm{Element}(\$1, 2)^{12}$

$\approx \ \mathbf{x^{12} = 1.2026}$

Vi ser at den månedlige renten er 1,55 prosent. Vi ser også (på rad 2) at dem årlige renten er på 20,26 prosent.

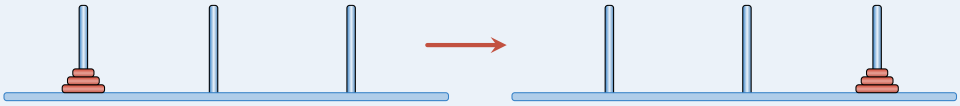
Oppgave 5
Spillet «Hanois tårn» består av tre pinner og en mengde disker med ulik radius som skal tres på pinnene.

Når spillet starter, skal alle diskene være plassert på samme pinne. Ingen av diskene skal ha en større disk liggende oppå seg.

Målet er å flytte alle diskene over på én av de to ledige pinnene. Det er bare lov å flytte én disk av gangen. Diskene som ikke flyttes, må ligge på en pinne. Det er aldri lov å plassere en større disk oppå en mindre disk.

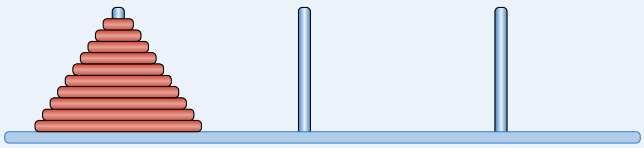
Det minste antallet forflytninger du må gjøre ved å forflytte n disker kaller vi $F(n)$.

a) Bestem $F(3)$



Det er en rekursive sammenhengen mellom $F(n)$ og $F(n-1)$.

b) Bestem denne reursive sammenhengen. Bruk denne til å bestemme $F(10)$.



Det finnes også en eksplisitt formel for F.

c) Undersøk og finn denne formelen.

Løsning:

a) Jeg ser at jeg først må flytte disk 1 på stolpe 3, så tar jeg disk 2 på stolpe 2, flytter disk 1 over disk 2, så disk 3 på stolpe 3, disk 1 over på stople 1, så disk 2 på stolpe 3 (over disk3) og til slutt disk 1 over disk 2. Til sammen 7 flytt. Altså er $F(3) = 7$.

b) Etter å ha utforsket litt hvordan jeg flytter, ser jeg at jeg først kan flytte de $n-1$ øverste diskene over på stople 2. Det er $F(n-1)$ flytt. Så flytter jeg disk n over på stolpe 3 og til slutt de $n-1$ diskene over disk n på stolpe 3. Vi får med andre ord:

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + 1 + F(n-1) \\ &= 2F(n-1) + 1 \end{aligned}$$

For å finne $F(10)$ lager jeg et lite program:

```python
F = 0  # vi trenger 0 flytt dersom n = 0
for i in range(10):
    F = 2*F+1
print(F)
```

Vi får at $F(10) = 1023$.

c) Jeg endrer litt på programmet, slik at jeg ser $F(n)$ for de ulike verdiene av n.

```python
F = 0  # vi trenger 0 flytt om n = 0
for i in range(10):
    F = 2*F+1
    print(F, end=",")

```

Resultatet blir tallene 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023. Det ser ut til at

$$F(n) = 2^n - 1$$

Oppgave 6

På en skole er det 323 jenter og 301 gutter. La X være høyden til en tilfeldig valgt jente og Y være høyden til en tilfeldig valgt gutt. Vi kan anta at X og Y er normalfordelte med $\mu_X = 168$ cm, $\mu_Y = 180$ cm, $\sigma_X = 6$ cm og $\sigma_Y = 8$ cm.

Lag et program som du kan bruke til å simulere sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er høyere enn 175 cm. Bestem denne sannsynligheten.

Løsning:

```python
import numpy as np
N = 100000

def Trekk():
    a = np.random.randint(323+301)  # a < 323 er jente
    if a < 323:    # har trukket en jente
        høyde = np.random.normal(168, 6)
    else:          # ellers er det en gutt
        høyde = np.random.normal(180, 8)
    return høyde

# Så gjør vi N trekk:

L = []
for i in range(N):
    høyde = Trekk()
    L.append(høyde)

```

```python
# Så teller vi opp hvor mange av elementene i L som er
# større enn 175:

g = 0
for i in L:
    if i > 175:
        g = g + 1

# Til sutt regner vi ut andelen større enn 175:

print(g/N)
```

Vi får at sannsynligheten er ca. 0,42. Vi får samme tall om vi gjør simuleringen flere ganger. Dette viser at N er stor nok.

Merk: vi kunne regnet ut denne sannsynligheten ved å bruke scipy.stats sin norm.sf-funksjon:

```python
from scipy.stats import norm
d = 323
m = 301
p = d/(d+m)*norm.sf(175,168,6)+m/(d+m)*norm.sf(175,180,8)
print(p)
```

Vi får p = 0.41704899797093953. Denne måten å gjøre det på er fin, men ikke i samsvar med det oppgaven spør etter. Programmet skulle bruke simuleringer til å bestemme sannsynligheten.

Utdannings-
direktoratet