R2 EKSAMEN DEL 2

OPPGAVE 1

a)

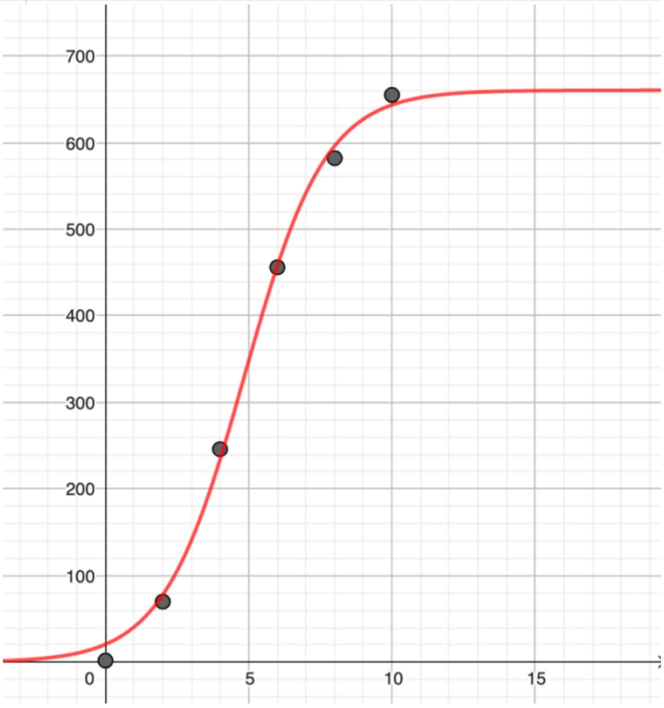
$F(x) = \text{RegLogist}(l1)$

$= \dfrac{660.36}{1 + 30.72\, e^{-0.71x}}$

Liste

$l1 = \{(A1, B1), (A2, B2), (A3, B3), (A4, B4), (A5, B5), (A6, B6)\}$

$= \{(0, 2), (2, 70), (4, 246), (6, 456), (8, 582), (10, 655)\}$



Hvor mange millioner kroner ble brukt på strømming av musikk i norge vil i starten følge en eksponensiell vekst, siden flere og flere mennesker bruker musikk i hverdagen og det smitter over på andre veldig raskt. Men i praksis så kan ikke pengebruken vokse ubegrenset. Etterhvert som tiden går, så blir det mer konkurranse blant musikkstrømming tjenestene som fører til en balansering av markedet. Det er også flere faktorer som påvirker pengebruken, dette kan være dårligere økonomiske tider og andre prioriteringer. Derfor velger jeg en logistisk modell. En logistisk modell tar høyde for at vekstfarten avtar etter hvert.

b)

1	$I = \displaystyle\int_{-0.5}^{10.5} F\,dx$ $\approx$ **$I = 3728.74$**
2	$G = \dfrac{1}{5} \cdot \text{Integral}(F, 2.5, 7.5)$ $\approx$ **$G = 344.45$**
3	$S = \text{Sum}(F(i), i, 0, 10)$ $\approx$ **$S = 3728.82$**
4	$D = \dfrac{F(5.001) - F(5)}{0.001}$ $\approx$ **$D = 116.31$**

c)

I er den totale pengebruken fra sommeren 2007 til sommeren 2018

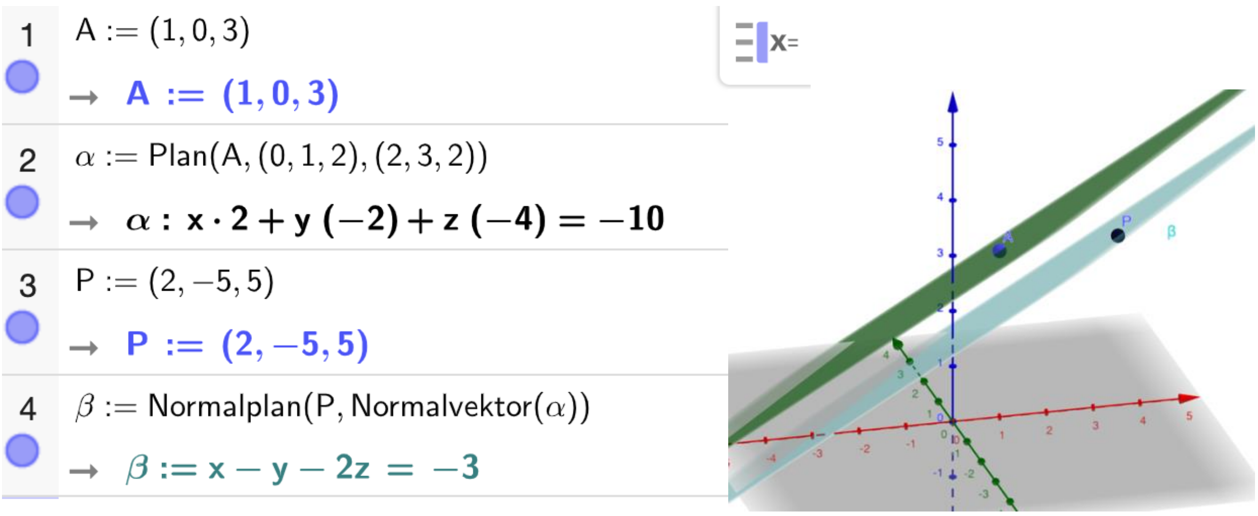
G er på formen $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ som gir gjennomsnitts funksjonverdien i et intervall
Det vil si at G er gjennomsnittspengebruk fra sommeren 2010 til sommeren 2015

S er summen av pengebruken fra 2008 til 2018 med intervall på et år. Dette vil si at S er summen av F(0)+F(1)+F(2)... og den gir ikke den totale pengebruken sånn som I

D er den tilnærming for den momentane vekstfarten i F(5), altså hvor mye holder pengebruken på å øke med.

Oppgave 2

a)



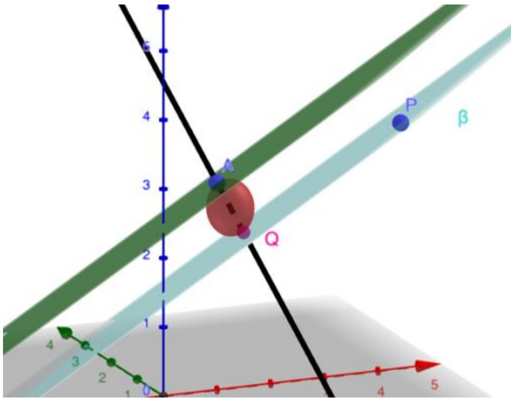
b)

5
$L(t) := A + \text{Normalvektor}(\alpha)\ t$
$\rightarrow\ \mathbf{L(t)\ :=\ (1 + 2\,t, -2\,t, 3 - 4\,t)}$

6
$\text{ByttUt}(\beta, \{x = x(L(t)), y = y(L(t)), z = z(L(t))\})$
$\rightarrow\ \mathbf{12\,t - 5 = -3}$

7
$6
Løs: $\left\{\mathbf{t = \frac{1}{6}}\right\}$

8
$Q := L\left(\frac{1}{6}\right)$
$\rightarrow\ \mathbf{Q\ :=\ \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)}$



Oppgave 3

a)

Banefarten til 3D-printeren etter 1 sek er 1.17cm/s

1
$r(t) := \left(1 + e^{\frac{1}{20}t}, 1 - \sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2} + \cos(t)\right)$
$\rightarrow\ \mathbf{r(t)\ :=\ \left(1 + e^{\frac{1}{20}t}, 1 - \sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2} + \cos(t)\right)}$

2
$|r'(1)|$
$\approx\ \mathbf{1.17}$

b)

2
$v(t) := |r'(t)|$
$\rightarrow$
$\mathbf{v(t)\ :=\ \sqrt{\frac{1}{400}}\ \sqrt{\left(e^{\frac{1}{20}t}\right)^2 + 400\ \cos^2(t) + 16\ \left(-e^{-2t+2} - 5\ \sin(t)\right)^2}}$

3
$v'(t) = 0, t = 1$
NLøs: $\{\mathbf{t = 3.54}\}$

4
$v''(3.54) > 0$
$\rightarrow$ **true**

Definerer funksjon v(t) for banefarten. Løser v’(t)=0 numerisk (det var et for vanskelig utrykk for cas å løse eksakt). Etter det sjekker jeg at den t-verdien jeg fikk faktisk er et bunnpunkt ved å ta v’’(t) > 0. <u>Banefarten er lavest når t = 3.54</u>

c)

For at fartsretningen skal være paralell med xy planet, må skalarproduktet mellom normalvektoren til xy-planet og v(t) være lik null, siden de skal stå ortogonal på hverandre. Det samme gjelder for xz-planet

1 $r(t) := \left(1 + e^{\frac{t}{20}}, 1 - \sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2} + \cos(t)\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{r(t) := \left(1 + e^{\frac{t}{20}}, 1 - \sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2} + \cos(t)\right)}$

2 $v(t) := r'(t)$

$\rightarrow\ \mathbf{v(t) := \left(\frac{1}{20}\ e^{\frac{t}{20}}, -\cos(t), \frac{-1}{5}\ e^{-2t+2} - \sin(t)\right)}$

3 $xy : z = 0$

$\rightarrow\ \mathbf{xy : z = 0}$

4 $xz : y = 0$

$\rightarrow\ \mathbf{xz : y = 0}$

5 v Normalvektor(xy) $= 0$

NLøs:
$\{\mathbf{t = 3.14, t = 6.28, t = 9.42, t = 12.57, t = 15.71, t = 18.85, t = 21.99, t = 25.13, t = 28.27, t = 31.42,}$

6 L := BrukDersom($0 \le x \le 5$, HøyreSide($5))

$\approx\ \mathbf{L := \{3.14\}}$

7 Skalarprodukt(v(t), Normalvektor(xz)) $= 0$

$\rightarrow\ \mathbf{-\cos(t) = 0}$

8 $\{\$7, t \ge 0, t \le 5\}$

$\rightarrow\ \mathbf{\{-\cos(t) = 0, t \ge 0, t \le 5\}}$

9 $8

Løs: $\left\{\mathbf{t = \frac{1}{2}\ \pi, t = \frac{3}{2}\ \pi}\right\}$

Linje3-4: definerer xy og xz planet Linje 5.

løser for t skalarproduktet (Her var utrykket for vanskelig for å løse eksakt for cas. Fikk ut mange ulike t-verdier.

I linje 6 tok jeg ut den t-verdien som gjaldt for definisjonsmengden.Linje 7-8-9, Fikk to t-verdier som passet i det intervallet.

Så for å svare på oppgaven: Fartsretningen er paralell med xy-planet ved t = 3.14 og paralell med xz-planet når $t = \frac{1}{2}\pi \ \ eller\ t = \frac{3}{2}\pi$

Oppgave 4:

a)

1 $T_1 := \text{IterasjonListe}(x + 10, 100, 4)$

$\rightarrow \; T_1 := \{100, 110, 120, 130, 140\}$

2 $T_2 := \text{IterasjonListe}(x \cdot 1.05, 100, 4)$

$\rightarrow \; T_2 := \left\{100, 105, \frac{441}{4}, \frac{9261}{80}, \frac{194481}{1600}\right\}$

2 $T_2 := \text{IterasjonListe}(x \cdot 1.05, 100, 4)$

$\approx \; T_2 := \{100, 105, 110.25, 115.76, 121.55\}$

Ved bruk av iterasjonsliste() får jeg beløpet han får hver uke i de 2 Tilbudene

b)

1 $T_1(n) := 100 + (n - 1) \cdot 10$

$\rightarrow \; T_1(n) := 10\,n + 90$

2 $T_2(n) := 100 \cdot 1.05^{n-1}$

$\rightarrow \; T_2(n) := 100 \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$

3 $T_2 > T_1$

Løs: $\left\{ n < \frac{-\text{LambertW}\left(-10\, e^{\frac{-10}{\frac{1}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)}}} \ln\left(\frac{21}{20}\right)\right) - 9 \ln\left(\frac{21}{20}\right)}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)}, n > \frac{-\text{LambertW}\left(-10\, e^{\frac{-10}{\frac{1}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)}}} \ln\left(\frac{21}{20}\right), -1\right) - 9 \ln\left(\frac{21}{20}\right)}{\ln\left(\frac{21}{20}\right)} \right\}$

4 $3

$\approx \; \{n < 1, n > 27.58\}$

Definerer først begge rekkene og i linje 3 setter $T_2 > T_2$ og løser for n.

Dette gir en svært rar eksakt verdi. Så i linje 4 referer jeg til linje 3 med $3 og trykker tilnærmet lik. Ser bort i fra n<1 siden n må være i de naturlige tallene. Da står det at n > 27.58 Og det vil si når vi runder opp til nærmeste heltall får vi at <u>det tar 28 uker før tilbud 2 gir mer ukeslønn enn tilbud 1</u>

c)

1. $T_1(n) := 100 + (n-1) \cdot 10$

   $\rightarrow \quad T_1(n) := 10\,n + 90$

2. $T_2(n) := 100 \cdot 1.05^{n-1}$

   $\rightarrow \quad T_2(n) := 100 \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$

3. $\sum_{n=1}^{n} T_2 > \sum_{n=1}^{n} T_1$

   Løs: $\{6.76 \cdot 10^{-12} \leq n \leq 1, n > 38.39\}$

Ser bort ifra n-verdi som ikke er med i definisjonsmengden n≥1 og ser da at $n \geq 38.39$. Runder opp til 39 og får da at det tar 39 uker før tilbud 2 tilsammen gir mer ukeslønn

Oppgave 5

a)

1. $f(x) := \frac{2 - \cos(x)}{\sin(x)}$

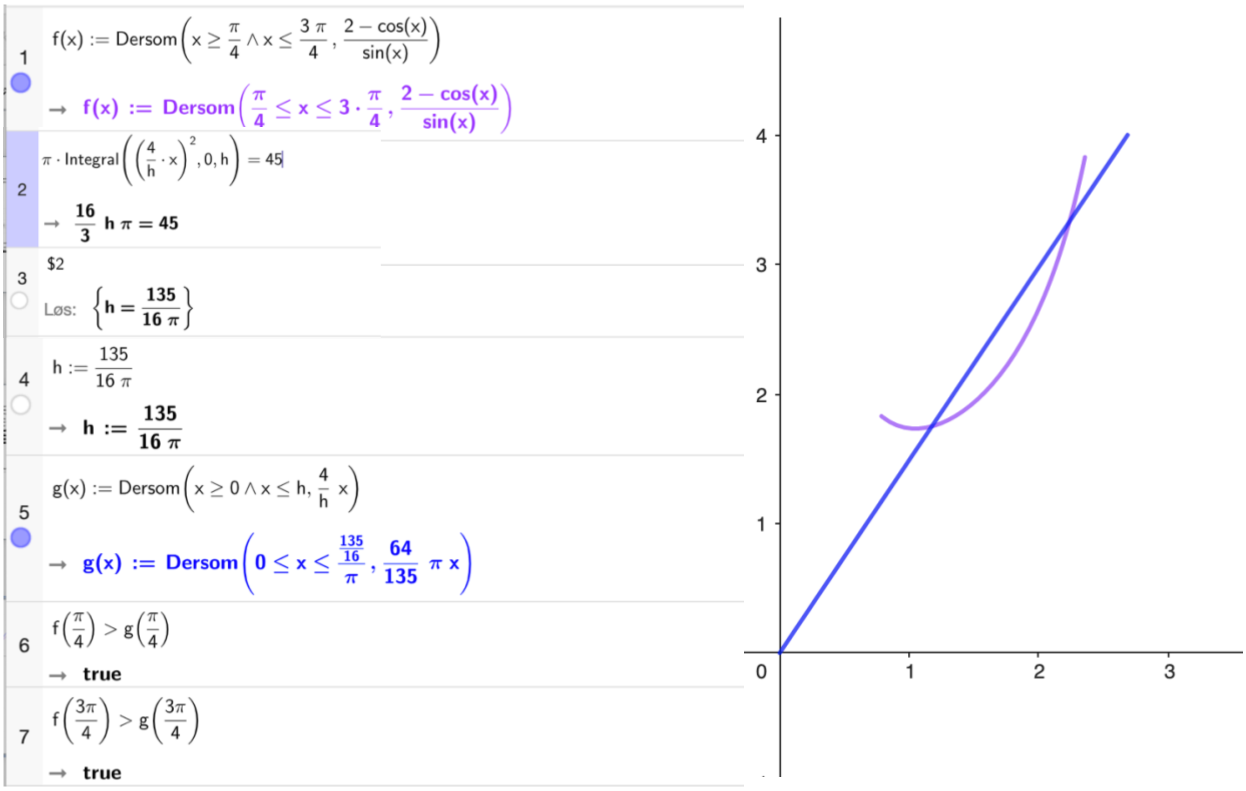
   $\rightarrow \quad f(x) := \frac{-\cos(x) + 2}{\sin(x)}$

2. $V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f^2 \, dx$

   $\rightarrow \quad V = \frac{-1}{2} \pi^2 + 10\,\pi$

Volumet av omdreiningslegeme vi da får er $V = -\frac{1}{2}\pi(\pi - 20)$

b)

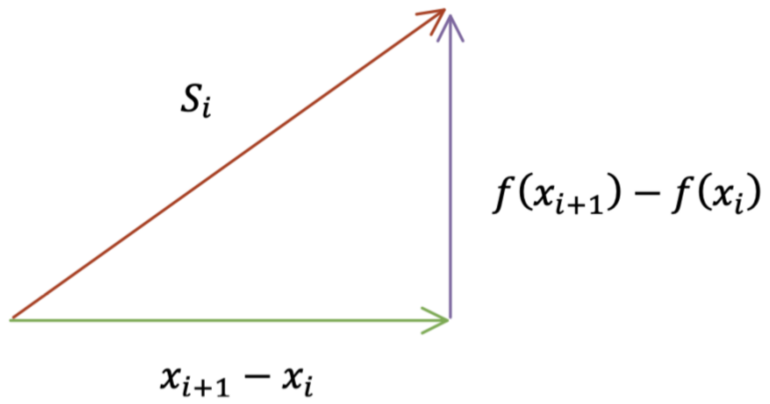


finner linja som blir kjegla når det er dreiet om x-aksen. Stigningstallet for linja er $\frac{r}{h}$ og med det kan vi finne h siden volumet er 45.

I graftegner ser vi tydelig at omdreiningslegeme ikke vil passe, siden f(x) kryssser g(x) og ikke alltid har lavere funksonsverdi enn g(x)

Deretter dobbeltsjekker jeg med $g\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{4}\right) gir\ True$ dette forteller at f har høyere verdi i x=π/4 som er i definisjonsmengden til f. Med dette kan vi konkludere med at omdreiningslegeme Ikke får plass i kjegla.

Oppgave 6:



Lengda S_i som går fra punktet $(x_i, f(x_i)\ til\ (x_{i+1}, f(x_{i+1})$ kan vi finne ved å bruke pythagors setningen. Der den horisontale kateten er $x_{i+1} - x_i$ og den vertikale kateten er $f(x_{i+1}) - f(x_i)$.

Da får vi $S_i^2 = (x_{i+1} - x_i)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2$

Også har vi at $h = \frac{b-a}{N} = \frac{x_{i+1}-x_i}{1}$ og oppgaveteksten gir $k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$

Erstatter dette inn i utrykket og får: $S_i^2 = h^2 + k_i^2$

Til slutt løser vi for $S_i\ og\ får: S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2}$

c)

```
1   import math
2
3   a=-1
4   b=1
5   N=1000
6   h=(b-a)/N
7   S=0
8
9   def g(x):
10      return math.sqrt(1-x**2)
11
12  for i in range(N+1):
13      x=a+i*h
14      if i < N:
15          k=g(x+h)-g(x)
16          S=S+math.sqrt(h**2+k**2)
17
18  print(S)
19
```

Lager et program for å finne tilnærmingsverdien for buelengden på g(x) fra -1 til 1.

Linje 3-4: Setter grensene for intervallet

Linje 5-6: velger antall delintervaller. Beregner bredden h på hvert delintervall

Linje 9-10: Definerer g(x)

Linje 12: Går gjennom hvert delintervall

På linje 14-16: Beregner stigningen mellom dette punktet og det neste, så lenge vi ikke er ved det siste punktet
Linje 16: Legger til lengden av linjestykket mellom dette punktet og neste til summen S
Og skriver til slutt ut den totale lengden.

OUTPUT. 3.141566356216478
Dette stemmer veldig bra, siden g(x) er en halvsirkel med radius som da har buelengde lik π.