Utdannings-
direktoratet

# Eksamen

24.05.2023

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

# Nynorsk

| **Eksamensinformasjon** | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | Eksamen varer i 5 timar.<br>Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes.<br>Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar.<br>Etter 2 timar kan kandidaten bruke hjelpemiddel.<br>Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar. |
| **Del utan hjelpemiddel** | Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar. |
| **Del med hjelpemiddel** | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte** | Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver.<br>Delen med hjelpemiddel har 6 oppgåver.<br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing.<br>Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast. |
| **Rettleiing om vurderinga** | Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du<br>– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing<br>– gjennomfører logiske resonnement<br>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar<br>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel<br>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar<br>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar<br>– vurderer om svar er rimelege |
| **Om vekting av oppgåvene** | Alle deloppgåvene vert vekta likt. |
| **Andre opplysningar** | Teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet |

# Del 1
## Utan hjelpemiddel

## Oppgåve 1

Rekn ut integrala

a) $\int_{-1}^{1}(4x^3 - x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

## Oppgåve 2

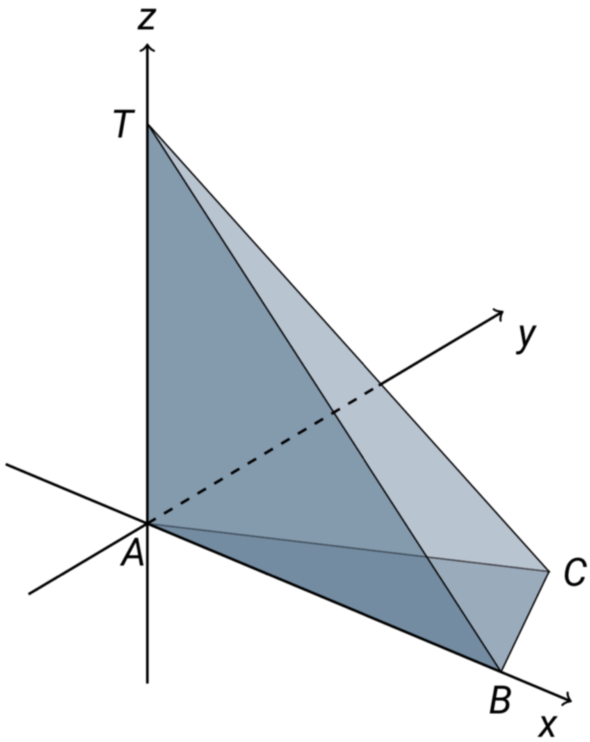
a) Vis at dersom $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Rekn ut

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x .$$

## Oppgåve 3

Punkta $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ dannar ein pyramide, slik figuren viser.




a) Rekn ut volumet av pyramiden.

b) Rekn ut arealet av $\triangle BCT$.

c) Bestem avstanden frå $A$ til planet som går gjennom $B$, $C$ og $T$.

## Oppgåve 4

Ein elev har skrive følgjande kode:

```
1  a = 3
2  d = 4
3
4  N = 10
5  S = 0
6
7  for i in range(N):
8      S = S + a
9      a = a + d
10
11 print(S)
```

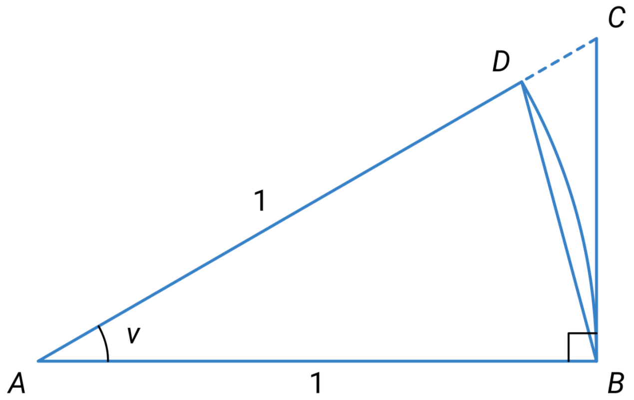
a) Forklar kva eleven vil rekne ut.

b) Kva blir resultatet når ein køyrer programmet, dersom N blir sett til 100 i linje 4?

## Oppgåve 5

I denne oppgåva skal du vise at $\lim\limits_{v\to 0^+}\dfrac{\sin v}{v}=1$.

I figuren nedanfor er $AB=AD=1$, og bogen $BD$ er del av ein sirkel med sentrum i $A$. Vi lar $\angle BAC=v$ (målt i radianar).




a) Bruk arealbetraktningar til å grunngi at

$$\frac{1}{2}\sin v<\frac{1}{2}v<\frac{1}{2}\tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1<\frac{v}{\sin v}<\frac{1}{\cos v}$$

c) Bruk ulikskapane frå oppgåve b til å grunngi at $\lim\limits_{v\to 0^+}\dfrac{\sin v}{v}=1$.

# Del 2
## Med hjelpemiddel

## Oppgåve 1

Tabellen nedanfor viser kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming av musikk i Noreg nokre år i perioden 2008–2018.

| År | 2008 | 2010 | 2012 | 2014 | 2016 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Strøyming | 2 | 70 | 246 | 456 | 582 | 655 |

a) Lag ein modell $F$ som du kan bruke til å bestemme kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming i Noreg per år i perioden 2008–2018 og åra etterpå. Vel *x*-verdiar slik at $F(0)$ gir kor mange millionar kroner som blei brukte i 2008. Grunngi valet av modell.

Nedanfor ser du fire formlar.

$$I = \int_{-0,5}^{10,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad G = \frac{1}{5}\int_{2,5}^{7,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad S = \sum_{i=0}^{10} F(i) \ , \qquad D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001}$$

b) Bestem $I$, $G$, $S$ og $D$.

c) Gi ei praktisk tolking av svara i oppgåve b.

## Oppgåve 2

Planet $\alpha$ er bestemt av punkta $A(1,0,3)$, $B(0,1,2)$ og $C(2,3,2)$.

a) Bestem ei likning for planet $\beta$ som er parallelt med $\alpha$ og går gjennom punktet $P(2,-5,5)$.

Ei kule tangerer $\alpha$ i punktet $A$ og $\beta$ i eit punkt $Q$.

b) Bestem eksakte verdiar for koordinatane til $Q$.

## Oppgåve 3

Ein fabrikk lagar krokar ved hjelp av ein 3D-printer. Posisjonen til dysa i 3D-printeren etter *t* sekund er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t)=\left[1+e^{\frac{t}{20}}\ ,1-\sin t,\ \frac{1}{10}e^{-2t+2}+\cos t\right]\quad,\quad t\in[0\ ,5]$$

Her er cm eininga langs aksane.

a) Bestem banefarten til 3D-printeren etter 1 sekund.

b) Ved kva for eit tidspunkt er banefarten lågast?

c) Avgjer om fartsretninga nokon gong er parallell med *xy*-planet eller parallell med *yz*-planet. Hugs å grunngi svaret.

## Oppgåve 4

Foreldra til David vil gi han vekepengar. Han får to ulike tilbod. I tilbod 1 får han 100 kroner den første veka. Beløpet $a_n$ som han får i veke $n$, er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + 10.$$

I tilbod 2 får han 100 kroner den første veka. Beløpet $b_n$ som han får i veke $n$, er gitt ved den rekursive formelen

$$b_n = b_{n-1} \cdot 1{,}05.$$

a) Bestem det beløpet han får kvar veke dei fire første vekene med kvart av dei to tilboda.

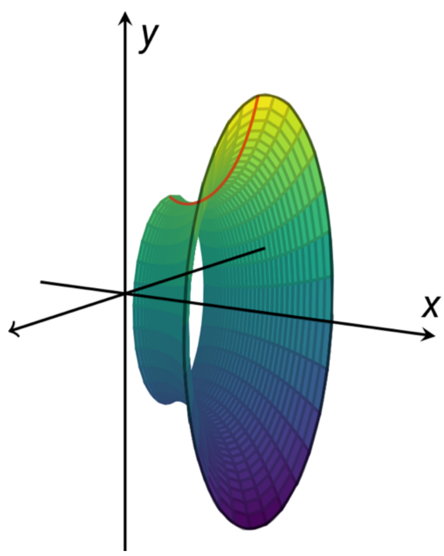
b) Kor mange veker tek det før tilbod 2 vil gi meir vekelønn enn tilbod 1?

c) Kor mange veker tek det før tilbod 2 til saman vil gi meir lønn enn tilbod 1?

## Oppgåve 5

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x} \quad , \qquad D_f = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$




Vi roterer grafen til $f$ om $x$-aksen.

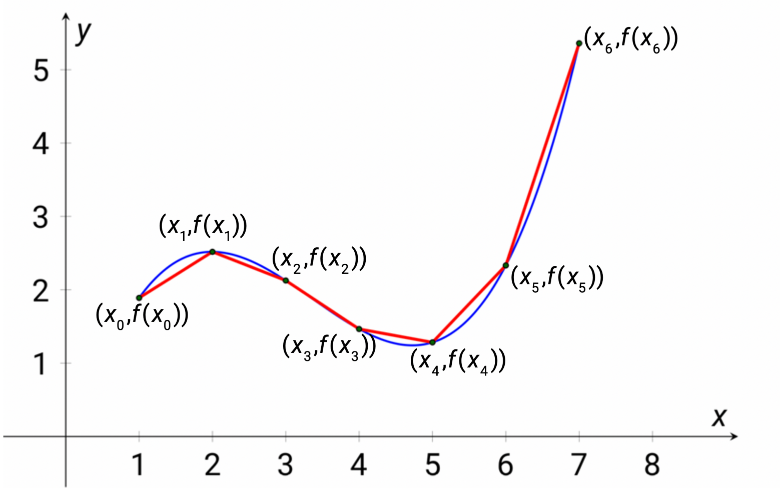
a) Bestem volumet av omdreiingslekamen vi då får.

Omdreiingslekamen skal plasserast i ei rett kjegle med radius 4 og volum 45.

b) Avgjer om omdreiingslekamen får plass i kjegla.

## Oppgåve 6

For ein deriverbar funksjon $f$ kan vi finne ein tilnærma verdi for lengda av grafen mellom to x-verdiar ved å bruke ei polylinje, slik figuren nedanfor illustrerer.

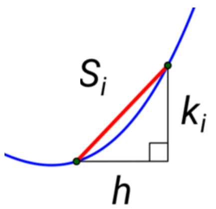



Dersom vi skal finne lengda av grafen i eit intervall $[a, b]$, kan vi dele dette intervallet i $N$ like store delintervall $[x_i,\ x_{i+1}]$ med breidd $h = \dfrac{b-a}{N}$ og $x_i = a + i \cdot h$ .

Vi reknar då ut lengdene av linjestykka som går mellom punkta $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Summen av desse lengdene vil då vere ein tilnærma verdi for lengda av grafen frå $x = a$ til $x = b$.

a) Forklar at lengda av linjestykket som går frå punktet $(x_i, f(x_i))$ til punktet $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, er gitt ved

$$S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2}\ ,\ \text{der } k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)\ .$$




Funksjonen $g$ er gitt ved

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\ , \quad D_g = [-1, 1].$$

b) Rekn ut ein god tilnærma verdi for lengda av grafen til $g$ ved å bruke framgangsmåten som er beskriven ovanfor. Vurder om svaret er rimeleg.

# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | Eksamen varer i 5 timer.<br>Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig.<br>Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer.<br>Etter 2 timer kan kandidaten bruke hjelpemidler.<br>Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer. |
| **Del uten hjelpemidler** | Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. |
| **Del med hjelpemidler** | Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte** | Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver.<br>Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver.<br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling.<br>Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres. |
| **Veiledning om vurderingen** | Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du<br>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse<br>– gjennomfører logiske resonnementer<br>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner<br>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler<br>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar<br>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger<br>– vurderer om svar er rimelige |
| **Om vekting av oppgavene** | Alle deloppgavene vektes likt. |
| **Andre opplysninger** | Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet |

# Del 1
## Uten hjelpemidler

## Oppgave 1

Regn ut integralene

a) $\int_{-1}^{1}(4x^3-x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{0}^{\ln 2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

## Oppgave 2

a) Vis at dersom $f(x)=\tan x$, så er $f'(x)=1+\tan^2 x$.

b) Regn ut

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

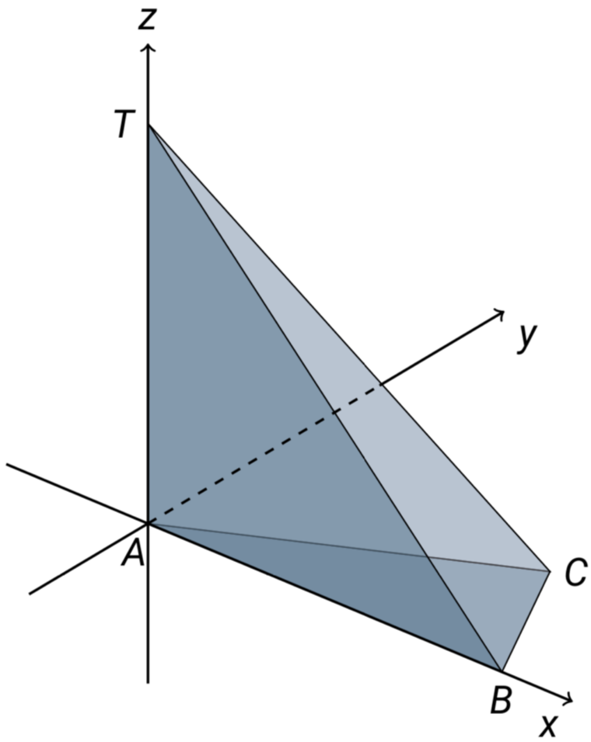
## Oppgave 3

Punktene $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ danner en pyramide, slik figuren viser.

a) Regn ut volumet av pyramiden.

b) Regn ut arealet av $\triangle BCT$.

c) Bestem avstanden fra $A$ til planet som går gjennom $B$, $C$ og $T$.




## Oppgave 4

En elev har skrevet følgende kode:

```
1  a = 3
2  d = 4
3
4  N = 10
5  S = 0
6
7  for i in range(N):
8      S = S + a
9      a = a + d
10
11 print(S)
```

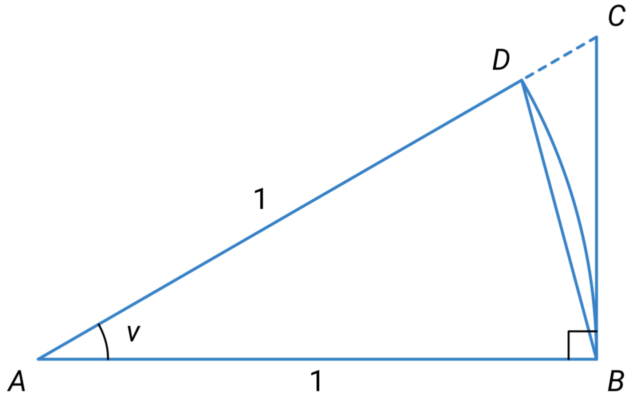
a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir resultatet når programmet kjøres, dersom N settes til 100 i linje 4?

# Oppgave 5

I denne oppgaven skal du vise at $\lim\limits_{v\to 0^+}\dfrac{\sin v}{v}=1$.

I figuren nedenfor er $AB=AD=1$, og buen $BD$ er del av en sirkel med sentrum i $A$. Vi lar $\angle BAC=v$ (målt i radianer).




a) Bruk arealbetraktninger til å begrunne at

$$\frac{1}{2}\sin v<\frac{1}{2}v<\frac{1}{2}\tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1<\frac{v}{\sin v}<\frac{1}{\cos v}$$

c) Bruk ulikhetene fra oppgave b til å begrunne at $\lim\limits_{v\to 0^+}\dfrac{\sin v}{v}=1$.

# Del 2
## Med hjelpemidler

## Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge noen år i perioden 2008–2018.

| År | 2008 | 2010 | 2012 | 2014 | 2016 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Strømming | 2 | 70 | 246 | 456 | 582 | 655 |

a) Lag en modell $F$ som du kan bruke til å bestemme hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming i Norge per år i perioden 2008–2018 og årene etterpå. Velg $x$-verdier slik at $F(0)$ gir hvor mange millioner kroner som ble brukt i 2008. Begrunn valget av modell.

Nedenfor ser du fire formler.

$$I = \int_{-0,5}^{10,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \quad G = \frac{1}{5}\int_{2,5}^{7,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \quad S = \sum_{i=0}^{10} F(i) \ , \quad D = \frac{F(5,001) - F(5)}{0,001}$$

b) Bestem $I$, $G$, $S$ og $D$.

c) Gi en praktisk tolkning av svarene i oppgave b.

## Oppgave 2

Planet $\alpha$ er bestemt av punktene $A(1,0,3)$, $B(0,1,2)$ og $C(2,3,2)$ .

a) Bestem en likning for planet $\beta$ som er parallelt med $\alpha$ og går gjennom punktet $P(2,-5,5)$.

En kule tangerer $\alpha$ i punktet $A$ og $\beta$ i et punkt $Q$.

b) Bestem eksakte verdier for koordinatene til $Q$.

## Oppgave 3

En fabrikk lager kroker ved hjelp av en 3D-printer. Posisjonen til dysen i 3D-printeren etter *t* sekunder er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t)=\left[1+e^{\frac{t}{20}}\,,1-\sin t,\,\frac{1}{10}e^{-2t+2}+\cos t\right]\quad,\quad t\in[0\,,5]$$

Her er cm enheten langs aksene.

a) Bestem banefarten til 3D-printeren etter 1 sekund.

b) Ved hvilket tidspunkt er banefarten lavest?

c) Avgjør om fartsretningen noen gang er parallell med *xy*-planet eller parallell med *yz*-planet. Husk å begrunne svaret.

## Oppgave 4

Foreldrene til David vil gi ham ukepenger. Han får to ulike tilbud. I tilbud 1 får han 100 kroner den første uken. Beløpet $a_n$ som han får i uke $n$, er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + 10$$

I tilbud 2 får han 100 kroner den første uken. Beløpet $b_n$ som han får i uke $n$, er gitt ved den rekursive formelen

$$b_n = b_{n-1} \cdot 1{,}05$$

a) Bestem det ukentlige beløpet han får de fire første ukene med hvert av de to tilbudene.

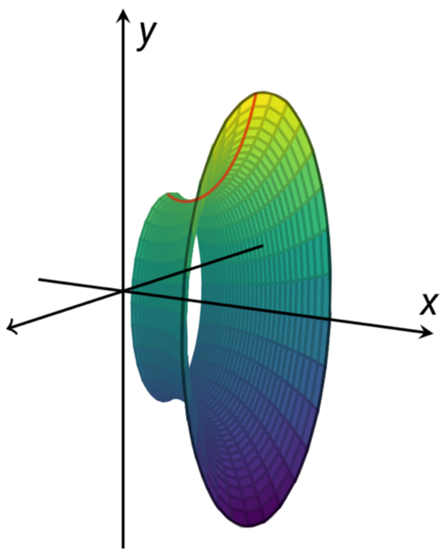
b) Hvor mange uker tar det før tilbud 2 vil gi mer ukelønn enn tilbud 1?

c) Hvor mange uker tar det før tilbud 2 til sammen vil gi mer lønn enn tilbud 1?

## Oppgave 5

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x} \quad , \qquad D_f = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$




Vi roterer grafen til $f$ om $x$-aksen.

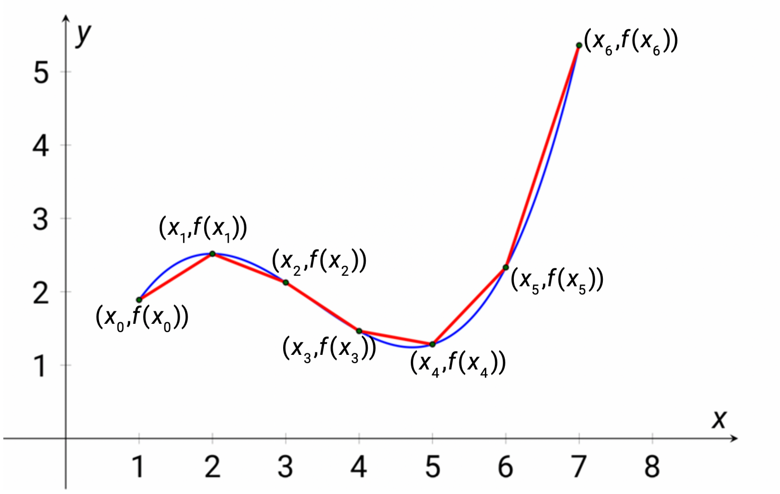
a) Bestem volumet av omdreiingslegemet vi da får.

Omdreiingslegemet skal plasseres i en rett kjegle med radius 4 og volum 45.

b) Avgjør om omdreiingslegemet får plass i kjeglen.

# Oppgave 6

For en deriverbar funksjon $f$ kan vi finne en tilnærmet verdi for lengden av grafen mellom to $x$-verdier ved å bruke en polylinje, slik figuren nedenfor illustrerer.

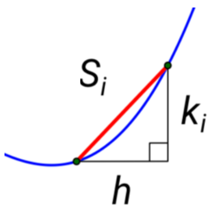



Dersom vi skal finne lengden av grafen i et intervall $[a, b]$, kan vi dele dette intervallet i $N$ like store delintervall $[x_i,\ x_{i+1}]$ med bredde $h = \dfrac{b-a}{N}$ og $x_i = a + i \cdot h$ .

Vi regner da ut lengdene av linjestykkene som går mellom punktene $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Summen av disse lengdene vil da være en tilnærmet verdi for lengden av grafen fra $x = a$ til $x = b$.

a) Forklar at lengden av linjestykket som går fra punktet $(x_i, f(x_i))$ til punktet $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, er gitt ved

$$S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2}\ ,\ \text{der}\ k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$




Funksjonen $g$ er gitt ved

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}\ , \quad D_g = [-1, 1]$$

b) Regn ut en god tilnærmet verdi for lengden av grafen til $g$ ved å bruke framgangsmåten beskrevet ovenfor. Vurder om svaret er rimelig.

Blank side

Blank side

Utdannings-
direktoratet

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

## TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**