Eksamen R2 våren 2023, LK06

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a) $f(x) = x \sin x$, produktregel

$f'(x) = [x']\sin x + x[\sin x]' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \underline{\underline{\sin x + x\cos x}}$

b) $g(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$, brøkregel

$$g'(x) = \frac{[\cos 2x]' \cdot \sin x - \cos 2x \cdot [\sin x]'}{(\sin x)^2} = \frac{-2\sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot \sin x - (1 - 2\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \cos x + 2\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} = \underline{\underline{\frac{-\cos x\,(2\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x}}}$$

Oppgave 2

a) $$\int_{-1}^{1} (4x^3 - x)\,dx = \left[4 \cdot \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 1^4 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \left((-1)^4 - \tfrac{1}{2}(-1)^2\right)$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} - \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = \underline{\underline{0}}$$

b) $$\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \tfrac{1}{2}e^{2\ln 2} - \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\ln 2^2} - e^0\right) = \tfrac{1}{2}(2^2 - 1) = \underline{\underline{\tfrac{3}{2}}}$$

Oppgave 3

a) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]' \cdot \cos x - \sin x \cdot [\cos x]'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x , \quad \text{qed!}$$

b) $$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cancel{1+\tan^2 x}}{u}\,\frac{du}{\cancel{1+\tan^2 x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$
$$= \underline{\underline{\ln|\tan x| + C}}$$

$\boxed{u = \tan x}$ (variabelskifte) $\boxed{\dfrac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x \quad (\text{fra a})}$ $\boxed{dx = \dfrac{du}{1+\tan^2 x}}$

Oppgave 4

a) Ser at $a_1 = 2$, og $d = 8-2=6$, da er $s_n = 2+(n-1)6 = 6n-4$

$S_n = 296$
$6n-4 = 296$
$6n = 300$
$n = 50$

$S_{50} = \frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50 = \frac{2+296}{2}\cdot 50 = 149\cdot 50 = \underline{\underline{7450}}$

b) $a_1 = 5$, $k = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$, rekka er uendelig (og konvergent, $-1<\frac{1}{3}<1$) $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$

Oppgave 5

Integrerende faktor: $e^{\int 3dx} = e^{3x}$

Multipliserer med IF på begge sider:

$$\underbrace{y'e^{3x} + y\cdot 3e^{3x}}_{\text{produktregel}} = 3e^{3x}$$

$$[ye^{3x}]' = 3e^{3x}$$

integrerer

$$\int [ye^{3x}]'dx = \int 3e^{3x}dx$$

$$ye^{3x} = 3\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+C \quad |\cdot e^{-3x}$$

$$y = 1+Ce^{-3x}$$

og så startverdien:

$y(0) = 5$

$1+C\cdot e^{0} = 5$

$C = 5-1 = 4$

$$\underline{\underline{y = 1+4e^{-3x}}}$$

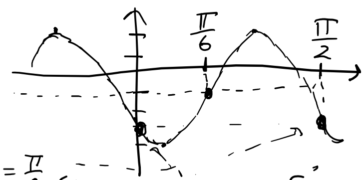
Test: $y' = -3Ce^{-3x}$

$y'+3y = -3Ce^{-3x}+3(1+Ce^{-3x}) = 3$

Oppgave 6

$A = \frac{y_{max}-y_{min}}{2} = \frac{2-(-4)}{2} = \frac{6}{2} = \underline{3}$

$d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{-1}$

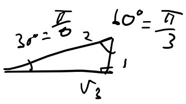


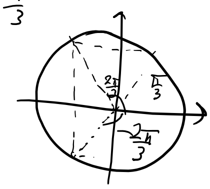
Ser at $f(x)$ er i samme fase ved $x=\frac{\pi}{2}$ som $x=0$, så $p=\frac{\pi}{2}$ og $c = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \underline{4}$

og første oppadstigende skjæring med $y=-1$ er $x_0 = \frac{\pi}{6}$, så $\varphi = -cx_0 = -4\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$

$f(x) = 3\sin(4x-\frac{2\pi}{3})-1$

$f'(x) = 3\cdot 4\sin(4x-\frac{2\pi}{3})-0$





$f'(0) = 12\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -12\cos\frac{\pi}{3} = -12\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{-6}}$

Oppgave 7

a) (jeg tar disse vektorene fordi de trengs i b) og c) også)

$\vec{BC} = [4-5,\ 2-0,\ 0-0] = [-1, 2, 0]$

$\vec{BT} = [0-5,\ 0-0,\ 5-0] = [-5, 0, 5]$

$\vec{BA} = [0-5,\ 0-0,\ 0-0] = [-5, 0, 0]$

$$\vec{BC} \times \vec{BT} = \begin{array}{cccccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 5 \end{array}$$

$$= [2\cdot 5 - 0\cdot 0,\ 0\cdot(-5) - (-1)\cdot 5,\ -1\cdot 0 - (2\cdot(-5))]$$

$$= \underline{[10, 5, 10]}$$

Tetraeder:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{BC} \times \vec{BT})\cdot \vec{BA}\right| = \frac{1}{6}\left|[10,5,10]\cdot[-5,0,0]\right| = \frac{1}{6}\left|-50+0+0\right| = \frac{50}{6} = \underline{\underline{\frac{25}{3}}}$$

b) Trekanten er spent ut av $\vec{BC}$ og $\vec{BT}$, så

$$\text{areal} = \frac{1}{2}\left|\vec{BC} \times \vec{BT}\right| = \frac{1}{2}\left|[10,5,10]\right| = \frac{1}{2}\left|5[2,1,2]\right| = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{9} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

c) ΔBCT er grunnflaten i pyramiden, og avstanden vi vil finne er høyden. I pyramiden er $V = \frac{1}{3}Gh$,

så $$h = \frac{3V}{G} = \frac{3\cdot\frac{25}{3}}{\frac{15}{2}} = \frac{25\cdot 2}{15} = \frac{5\cdot 2}{3} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

Eller med vektorer: har $\vec{n} \parallel \vec{BC}\times\vec{BT} = 5[2,1,2]$ så jeg kan $\vec{n}_\alpha = [2,1,2]$ og bruker punkt B, så planet blir

$$\alpha:\ 2(x-5) + 1(y-0) + 2(z-0) = 0$$

$$2x - 10 + y + 2z = 0$$

avstand fra punkt til plan:, der $A(x_0, y_0, z_0)$

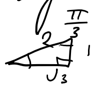
$$q = \frac{|2x_0 + y_0 + 2z_0 - 10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|2\cdot 0 + 0 + 2\cdot 0 - 10|}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

Oppgave 8

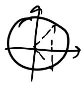
a) må først finne skjæringer

$f(x) = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



$\cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$

$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \pi k \\ -\frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}$

innenfor D_f er $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6}$

arealet blir da likt integralet:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} - \left(\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}}$$

b) ~~$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$~~

~~$f(x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (\cos^2 x)^2 \; 2\cos^2 x \sin^2 x + (\sin^2 x)^2$~~

Blindvei! jeg prøver noe annet!

$f(x)^2 = \cos^2 2x$

$\cos 4x = \cos(2x + 2x) = \cos 2x \cos 2x - \sin 2x \sin 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$= \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) = \underline{2\cos^2 2x - 1}$

$\frac{1}{2}(\cos 4x + 1) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 + 1) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos^2 2x = \underline{\cos^2 2x = f(x)^2}$

qed!

c) Skjæringer er de samme, legemet er differansen mellom legemet til $f(x)$ og til $y = \frac{1}{2}$ i området, så:

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)^2 dx - \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}(\cos 4x + 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos 4x + \frac{1}{2}\right)dx$$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\frac{\pi}{6}}{2} - \left(\frac{1}{4}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi(3\sqrt{3} + 2\pi)}{24}}}$$

Oppgave 9

Sjekker $P(1)$: $1\cdot 6 = \frac{1\cdot 2\cdot 9}{3}$ ✓ $P(1)$ stemmer

$P(k+1)$: $\underbrace{1\cdot 6 + 2\cdot 7 + \dots + k\cdot(k+5)} + (k+1)\cdot(k+1+5) = \frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+8)}{3}$

antar at $P(k)$ er sann

$$\frac{k(k+1)(k+8)}{3} + (k+1)(k+6) = \frac{(k+1)(k+2)(k+9)}{3} \;\Big|\cdot 3$$

ser en felles $k+1$, den kan deles bort:

$$k(k+1)(k+8) + 3(k+1)(k+6) = (k+1)(k+2)(k+9) \;\Big|\cdot\frac{1}{k+1}$$

$$k(k+8) + 3(k+6) = (k+2)(k+9)$$

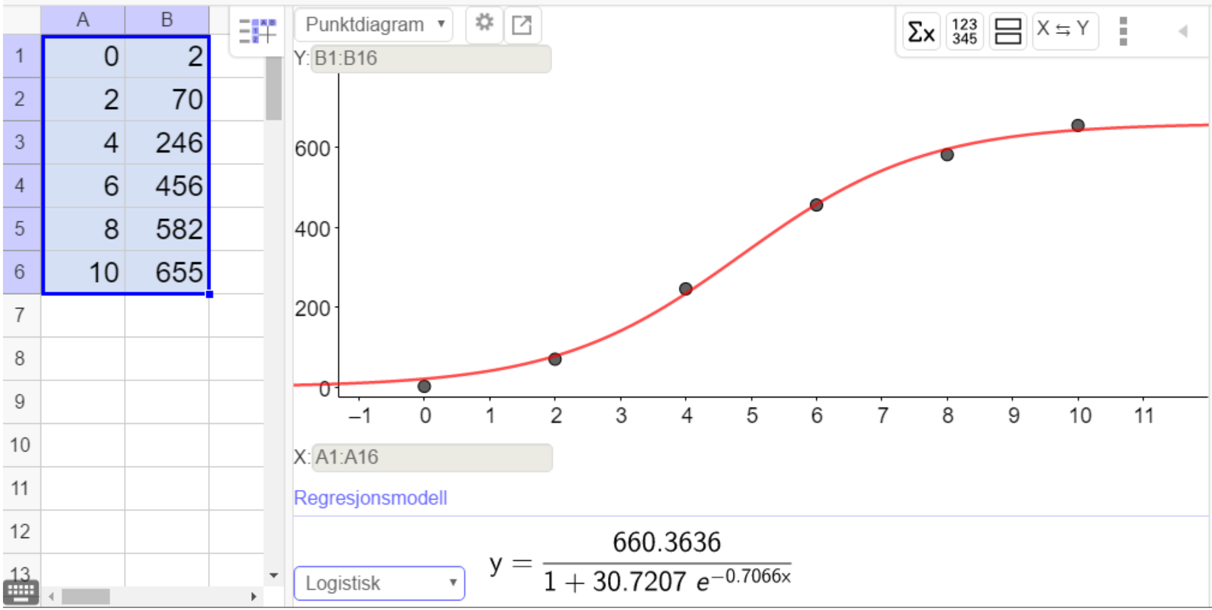
$$k^2 + 8k + 3k + 18 = k^2 + 9k + 2k + 18 \quad ✓$$

Har vist at $P(1)$ stemmer, og at hvis $P(k)$ stemmer, så stemmer $P(k+1)$, altså stemmer formelen for alle $n \in \mathbb{N}$, qed!

Del 2, alle hjelpemidler

Oppgave 1

a) Jeg setter verdiene inn i et GeoGebra-regneark, med $x = 0$ i 2008 slik at $F(0)$ gir antall millioner kroner i år 2008. Så markerer jeg punktene og velger en regresjonsanalyse. Jeg prøvde ulike modeller; en sinusmodell passer bra med punktene, men jeg synes det er usannsynlig at verdien av strømmingen vil begynne å falle igjen etter 2018. Så jeg velger en logistisk modell, som også passer bra med punktene, men som gir en mer sannsynlig utvikling framover i tid, dvs. at forbruket flater ut:



Overfører funksjonen til grafvinduet og endrer navn på den, til videre bruk:

$F(x) = \text{RegLogist}(l1)$

$\rightarrow \dfrac{660.36356}{1 + 30.72072\, e^{-0.70656x}}$

b) Gjennomfører beregningene i Algebrafeltet, det funker like bra som CAS:

$I = \text{Integral}(F(x), -0.5, 10.5)$

$\rightarrow 3728.73694$

$G = \dfrac{1}{5}\,\text{Integral}(F(x), 2.5, 7.5)$

$\rightarrow 344.44845$

$S = \text{Sum}(F(i), i, 0, 10)$

$\rightarrow 3728.8155$

$D = \dfrac{F(5.001) - F(5)}{0.001}$

$\rightarrow 116.30546$

c) Praktiske tolkninger:
I er integralet for å finne pengeforbruket over hele perioden; det går fra -0,5 til 10,5 fordi verdien F(0) er forbruket for hele året, så integralet fra -0,5 til 0,5 er en bedre tilnærming til forbruket i 2008 enn integralet fra 0 til 1, og tilsvarende for de andre årene.
S forteller det samme som I, men med en sum av verdiene for hele året; som nevnt, F(0) er verdien for hele 2008, osv.
G er integrasjonsformelen for et gjennomsnitt; $\frac{1}{5}$ er fordi snittet tas over en periode på 5 år, og grensene viser at det går fra året der x=3 (altså 2011) fram til året der x=7 (altså 2015). Så det er snittet for årene 2011-2015.
D er en numerisk derivert, så det viser sånn omtrent endringen i forbruk av strømming i året der x=5, altså 2013

Oppgave 2

a) Definerer alle punktene i CAS:

1 $A := (1, 0, 3)$
→ $\mathbf{A := (1, 0, 3)}$

2 $B := (0, 1, 2)$
→ $\mathbf{B := (0, 1, 2)}$

3 $C := (2, 3, 2)$
→ $\mathbf{C := (2, 3, 2)}$

4 $P := (2, -5, 5)$
→ $\mathbf{P := (2, -5, 5)}$

Definerer plan α som gitt i oppgaven, og plan β som et plan som er parallelt med α men går gjennom P:

5 $\alpha := \text{Plan}(A, B, C)$
→ $\boldsymbol{\alpha : x \cdot 2 + y\,(-2) + z\,(-4) = -10}$

6 $\beta := \text{Plan}(P, \alpha)$
→ $\boldsymbol{\beta := x - y - 2z = -3}$

b) α og β er parallelle plan, så hvis en kule skal tangere begge må kula ligge midt mellom planene, og ha en radius som er halvparten av avstanden mellom planene:

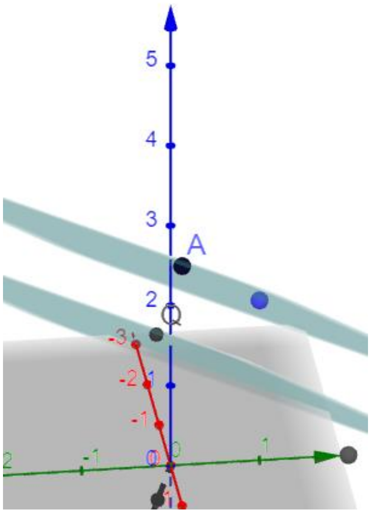
7 $r := \frac{1}{2}\ \text{Avstand}(P, \alpha)$
→ $\mathbf{r := \frac{1}{6}\sqrt{6}}$

(GeoGebra har ikke avstand mellom plan, så jeg tok avstand fra punkt til plan)
Kula tangerer α i A, så posisjonen til sentrum er i avstanden r fra A langs $\overrightarrow{n_\alpha}$, og punktet Q ligger da i avstanden $2r$ fra A langs $\overrightarrow{n_\alpha}$, og vi får at $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$:

8 $n := \text{Normalvektor}(\alpha)$
→ $\mathbf{n := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}}$

9 $AQ := 2\,r\,\frac{n}{|n|}$
→ $\mathbf{AQ := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}}$

10 $Q := A + AQ$
→ $\mathbf{Q := \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)}$



($\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ gir oss en vektor som står normal på α, men har lengde 1.
Så ganges den med $2r$ for å nå fra punktet A bort til planet β, som da gir oss $\overrightarrow{AQ}$.)

Over har jeg dobbeltsjekket at jeg gikk riktig vei, og Q faktisk ligger på β, det ser riktig ut, så svaret mitt er at kula tangerer β i $\underline{\underline{Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)}}$

(eller så kan man jo bare lage ei linje som går fra A med samme retningsvektor som planene, og finne når den skjærer planet β; men det må gjøres med en ligning så man får eksaktverdiene, ikke med Skjæring-kommandoen)

Oppgave 3

a) Setter inn $F = 250$ for motorkraften i ligningen, og løser den i GeoGebra, med $v(0) = 0$:

11 LøsODE$(350v' = 250 - 10v, v, t, (0,0))$

$\rightarrow\ \mathbf{v = -25\, e^{\frac{-t}{35}} + 25}$

Svar: farta i m/s, t sekunder etter start er $\underline{\underline{v(t) = 25\left(1 - e^{-\frac{t}{35}}\right)}}$

b) Dette løses rett fra formelen, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 25\left(1 - e^{-\frac{t}{35}}\right) = 25(1-0) = \underline{\underline{25m/s}}$

ELLER rett fra differensialligningen, ved maksimal fart endrer ikke farten seg, altså er $v' = 0$, altså blir ligningen redusert til $0 = 250 - 10v$, som løses til $\underline{\underline{v = 25m/s}}$

(det er 90 kilometer i timen, har mopedbiler lov til å kjøre så fort?)

c) Tar denne rett fra differensialligningen: igjen, $v' = 0$ ved toppfarten, så $0 = F - 10 \cdot v_{topp}$.

Da er $F = 10v_{topp} = 10 \cdot \frac{60}{3{,}6} = 166{,}66 \approx \underline{\underline{167N}}$.

(MERK at det er forventet at dere kan regne om mellom m/s og km/h: det er 1000m i en km, og 3600s i en time, så $1m/s = 3{,}6km/h$, og $1km/h = \frac{1}{3{,}6}m/s$).

Oppgave 4

12 $k := \frac{x}{2} - 3$

$\rightarrow\ \mathbf{k := \frac{1}{2}x - 3}$

13 løs$(-1 < k < 1)$

$\rightarrow\ \mathbf{\{4 < x < 8\}}$

a) Ser at rekka har $a_1 = 1$ og $k = \frac{x}{2} - 3$, og geometriske rekker konvergerer for $-1 < k < 1$.

Løser i CAS til høyre, og ser at rekka konvergerer for $\underline{\underline{x \in \langle 4, 8\rangle}}$

b) Jeg tenker k vil ha samme form som i rekka over. Vi vet at for $k = x$ får vi $x \in \langle -1, 1\rangle$, altså et intervall med bredde 2, sentrert rundt 0. For $k = \frac{x}{2} - 3$ ble $x \in \langle 4, 8\rangle$, som har bredde 4 og er sentrert rundt 6. Det indikerer at for en k på formen $k = ax + b$ så er bredden av intervallet invers proporsjonal med a ($a = \frac{1}{2}$ ga dobbel bredde), og midtpunktet av intervallet er bestemt av en kombinasjon av a og b ($\frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{\frac{1}{2}} = 6$).

For vår $x \in \langle -3, 5\rangle$ er bredden 8, som gir $a = \frac{1}{4}$, og midtpunktet skal være i 1, som gir $\frac{-b}{\frac{1}{4}} = -1$, som gir $b = -\frac{1}{4}$. Altså bør $\underline{k = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}}$, jeg sjekker det:

14 Løs$\left(-1 < \frac{x}{4} - \frac{1}{4} < 1\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{\{-3 < x < 5\}}$ det stemmer!

Så for $x = 4$ er $k = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (som gir konvergens, det er korrekt), og hvis rekka da skal konvergere mot 3 så må a_1 være:

15 løs$\left(\frac{a1}{1 - \frac{3}{4}} = 3\right)$

$\rightarrow\ \mathbf{\left\{a1 = \frac{3}{4}\right\}}$

Så, svar: rekka er $\underline{\underline{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x-1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \cdots}}$

(eller $\frac{3}{4} + \frac{3(x-1)}{4^2} + \frac{3(x-1)^2}{4^3} + \cdots$, som er litt «penere», men det er vanskeligere å se hva k er)

Oppgave 5

Definerer funksjonen i CAS
(uten grenser igjen, de roter med utregningene)

1 $f(x) := \dfrac{2-\cos(x)}{\sin(x)}$

$\rightarrow$ $f(x) := \dfrac{-\cos(x)+2}{\sin(x)}$

a) Finner volumet av omdreiningslegemet ved integrasjon:
Svar: volumet av omdreiningslegemet er $\underline{\underline{V = \frac{\pi(20-\pi)}{2}}}$

2 $\text{integral}\left(pi \cdot f(x)^2, \dfrac{pi}{4}, \dfrac{3pi}{4}\right)$

$\rightarrow$ $\dfrac{-\pi^2 + 20\,\pi}{2}$

b) Vi starter enkelt: kan den bredeste delen av omdreiningslegemet få plass i basen av kjegla?

3 $f\left(\frac{3pi}{4}\right)$

$\approx$ **3.82843**

$3{,}8 < 4$, så det går; men det betyr ikke at det får plass!

Så jeg finner formelen til den lineære funksjonen som gir oss et omdreiningslegeme med de ønskede egenskapene. Kjegler er spisse, så funksjonen starter i origo, altså er den på formen $k(x) = ax$, og den skal ha $r = 4$, så $k(h) = 4$ (der h er høyden til kjeglen, som går langs x-aksen, og omdreinings-legemet skal ha $V = 45$, så det gir de to ligningene:

4 $k(x) := a\,x$

$\rightarrow$ $k(x) := a\,x$

5 $k(h) = 4$

$\rightarrow$ $a\,h = 4$

6 $\displaystyle\int_0^h \pi\, k(x)^2\, dx = 45$

$\rightarrow$ $\dfrac{1}{3}\, a^2\, h^3\, \pi = 45$

7 Løs({$5, $6})

$\rightarrow$ $\left\{\left\{a = \dfrac{64}{135}\,\pi, h = \dfrac{135}{16\,\pi}\right\}\right\}$

Altså: $k(x) = \frac{64\pi}{135} x$ for $x \in \left[0, \frac{135}{16\pi}\right]$

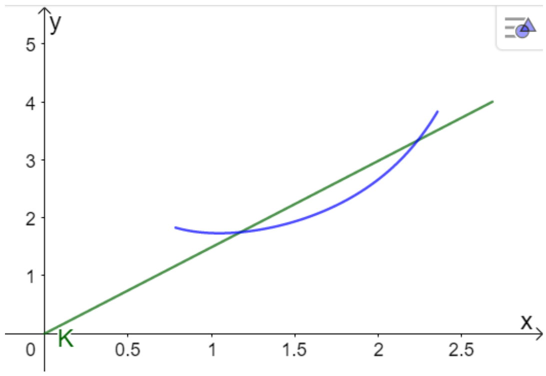
Jeg tegner den og sammenligner med omdreiningslegemets form:

8 $K(x) := \text{Dersom}\left(0 \le x \le \dfrac{135}{16\,\pi}, \dfrac{64\,\pi}{135}\, x\right)$

$\rightarrow$ $K(x) := \text{Dersom}\left(0 \le x \le 135 \cdot \dfrac{\frac{1}{16}}{\pi}, 64 \cdot \dfrac{\pi}{135}\, x\right)$

9 $f2(x) := f(x), \dfrac{pi}{4} \le x \le \dfrac{3pi}{4}$

$\rightarrow$ $f2(x) := \text{Dersom}\left(\dfrac{\pi}{4} \le x \le 3 \cdot \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{-\cos(x)+2}{\sin(x)}\right)$



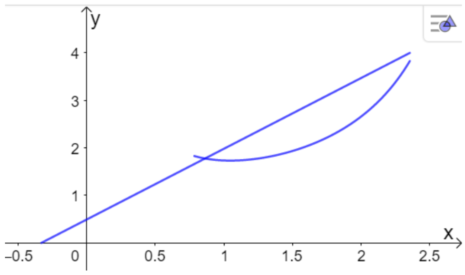
(jeg kalte kjeglen for K fordi jeg brukte k til ligningene, og jeg definerte en ny $f2$ fra f med grenser)

De overlapper, men de har ikke samme definisjonsområde, så jeg må forskyve en av dem. Jeg velger å forskyve $K(x)$ slik at den slutter i samme punkt som $f2(x)$
(merk: jeg kan IKKE bare endre definisjonsmengden, da endrer formen seg; jeg må trekke fra differansen mellom sluttpunktene til definisjonsområdene, da forskyves grafen)

10 $K2(x) := K\left(x - \left(\dfrac{3\,\pi}{4} - \dfrac{135}{16\,\pi}\right)\right)$

$\rightarrow$

$K2(x) := \text{Dersom}\left(x - 3 \cdot \dfrac{\pi}{4} + 135\right.$



De overlapper fremdeles, så nei, omdreiningslegemet får ikke plass inne i kjeglen