Del 1

Oppgave 1

a) 42 kr - 40 kr = 2 kr

$$\frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 5\%$$

b) Argument 2 er riktig.

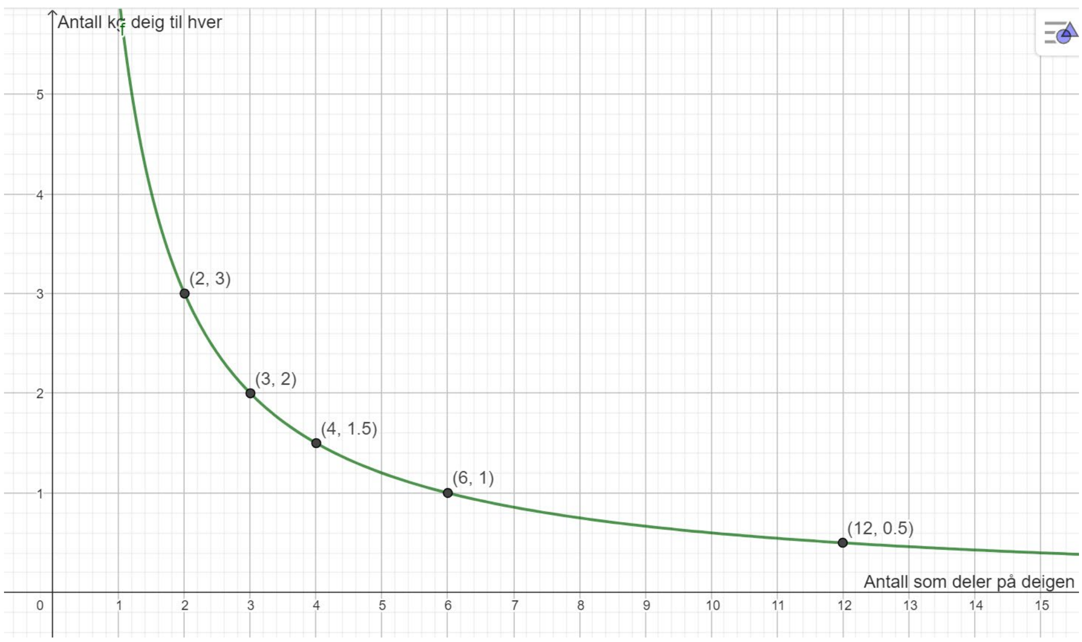
2 av 42 er mindre enn 5%. Dette kan vi også regne ut ved å sette stykket opp om vi ønsker. Jo større prisen blir jo mindre del vil 2 kroner utgjøre, og derfor vil prisen stige med mindre og mindre prosent hvert år om den øker lineært.

Oppgave 2

Her kan vi bare plotte inn noen punkter og sette dette inn et koordinatsystem. Vi kan godt starte med å lage en tabell også. Y-aksen representerer antall kg deig hver person får, og x-aksen representerer antall personer.

Mengde deig i kg	Antall som skal dele deig
3	2
2	3
1,5	4
1	6
0,5	12

Fordelingen av deig er omvendt proporsjonal med antall som skal dele deigen. Under ser du en graf som fremstiller dette som kan plottes for hånd etter punktene:



Oppgave 3

a) At den relative frekvensen for to søsken er 0,4 betyr at 40% av elevene i klassen har to søsken.

At den kumulative frekvensen for to søsken er 16 betyr at 16 av elevene i klassen har 2 søsken eller mindre.

b) Siden alle de spurte elevene har søsken så kan vi bruke opplysningene vi får om antall som har kun en bror eller søster til å finne ut hvor mange elever det er i klassen.

Siden 4 elever kun har 1 søsken må resten ha 2 eller flere.

Siden det er 16 elever som har 2 eller mindre søsken må det da være 16-4=12 elever som har nøyaktig 2 søsken.

Siden disse 12 tilsvarer 40% av klassen kan vi regne ut hvor mange elever det er til sammen i klassen:

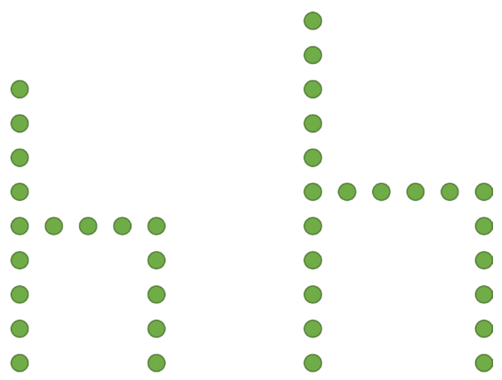
Regner ut hvor mange elever 10% tilsvarer: 12/4 = 3 elever

100% (altså antall elever i klassen) blir da: 3*10 = 30 elever.

Det er altså 30 elever til sammen i klassen.

Oppgave 4

a) For å beskrive mønsteret og finne antall sirkler i figurene F_4 og F_5 så kan vi tegne de to figurene:

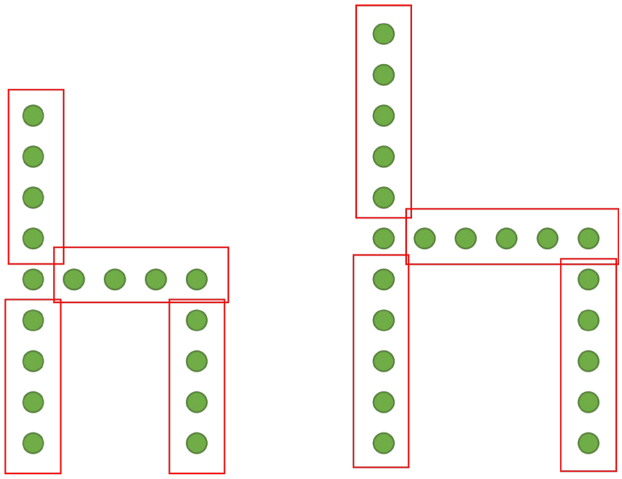


F_4 F_5

Vi ser da at det må være 17 sirkler i figur 4 og 21 sirkler i figur 5. Et annet mønster som kan beskrives er at hver figur vokser med 4 sirkler, så man trenger nødvendigvis ikke å tegne figurene.

Av: Jon Bjarne Bø

b) For å bestemme et uttrykk for figurene kan det hjelpe å bryte ned figurene i mindre deler. Om vi ser på eksempelvis figur 4 og 5, kan vi se at selve figurtallet gjentar ser flere steder i figurene:



F_4 F_5

Det er altså 4 grupper med n sirkler i hver figur i tillegg til én ekstra sirkel. Dette gir oss formelen:

$$F_n = 4n + 1$$

Del 2

Oppgave 1

91kg per person per år gir oss $91kg \cdot 10 = 910\ kg$ ris per person ila. 10 år.

Multipliserer mengden ris med antall personer i Kina og India og gjør om til standardform:

$910\ kg \cdot 2\,860\,000\,000 = 9{,}1 \cdot 10^2 \cdot 2{,}86 \cdot 10^9 = 9{,}1 \cdot 2{,}86 \cdot 10^{2+9} = 26{,}026 \cdot 10^{11} = \underline{\underline{2{,}6026 \cdot 10^{12}}}$

I løpet at 10 år blir risforbruket altså $2{,}6026 \cdot 10^{12}$ kg ris i India og Kina til sammen.

Oppgave 2

Det er 12 tall på arket. Om gjennomsnittet skal være 4 må summen av de 12 tallene være $12 \cdot 4 = 48$. Om vi summerer alle de synlige 11 tallene i oppgaven får vi:

$$4 + 5 + 0 + 4 + 2 + 6 + 5 + 7 + 5 + 5 + 3 = 46$$

Det betyr at om tallet det er sølt på enten er 0 eller 1 så er gjennomsnittet mindre enn 4. Hvis tallet er større enn, eller lik 2 så blir gjennomsnittet 4 eller mer.

Om vi ser på antall kaffekopper som blir drukket av de ulike kollegene til Tore så er det kun én av kollegene som har mindre enn 2 kopper kaffe dagen før, så sannsynligheten for at det tallet som er blitt sølt på er 2 eller høyere er ganske stor. Jeg støtter derfor antakelsen til Tore.

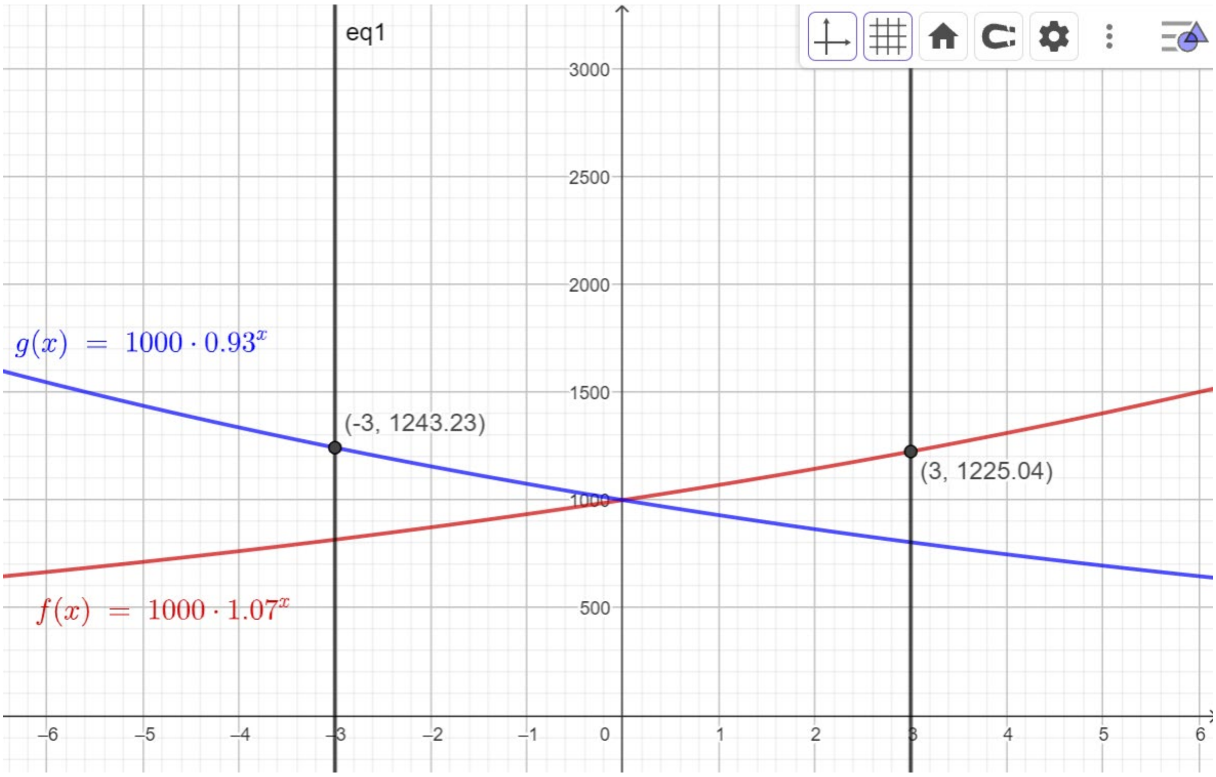
Oppgave 3

Det letteste her er å bestemme en verdi som begge varene nå har. Vi kan late som varene nå koster 1000 kroner.

Varen som øker i verdi, kan representeres med uttrykket $1000 \cdot 1{,}07^x$.

Varen som synker i verdi, kan representeres med uttrykket $1000 \cdot 0.93^x$.

Vi kan ga lage funksjoner i geogebra og se prisen på de ulike varene om vi går frem eller tilbake i tid.



Her er x=0 mai, så x=-3 gir oss verdiene for 3 måneder siden, og x=3 gir oss verdiene om 3 måneder. Om vi ser etter så vil ikke Malins påstand stemme, men det vil være ganske nære. Vare B hadde en litt høyere verdi for tre måneder siden enn det vare A vil ha om tre måneder.

Oppgave 4

Denne oppgaven er åpen og kan tolkes og illustreres på flere ulike måter. Dette er kun mitt forslag til løsning.

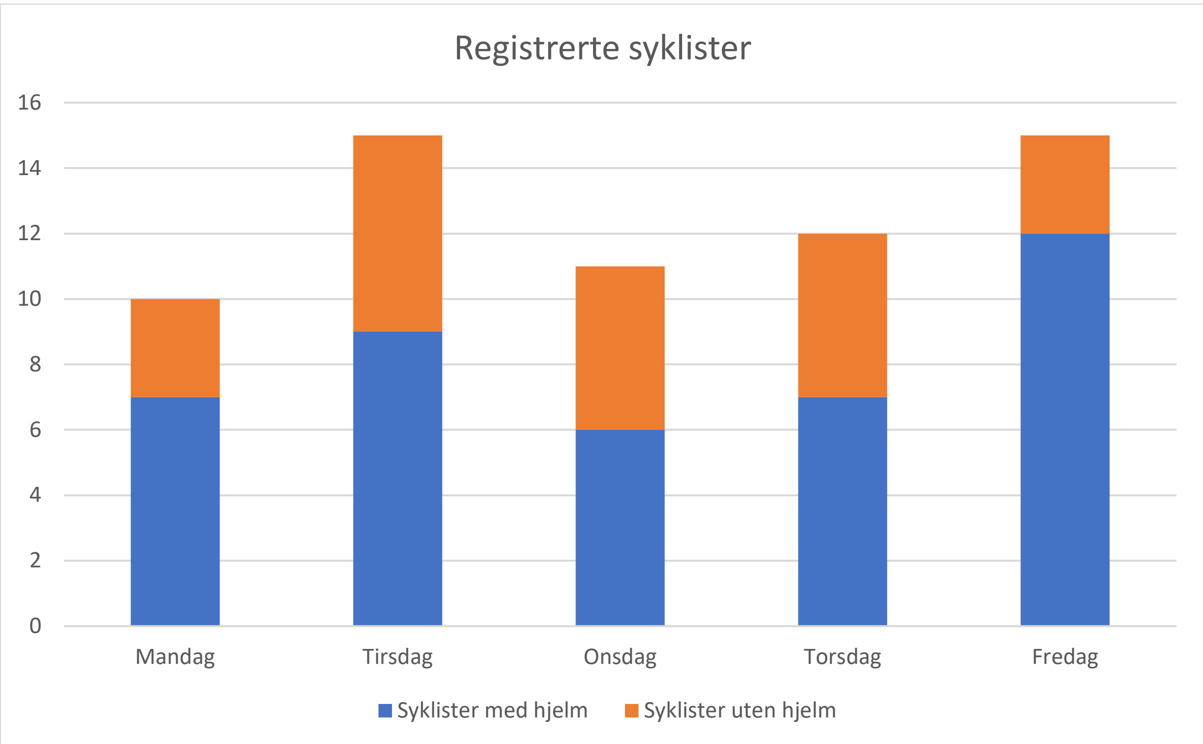
Utvidelse av tabell med utregninger som kan være av interesse:

Ukedag	Syklister	Syklister med hjelm	Syklister uten hjelm	Andel syklister med hjelm i prosent	Andel syklister uten hjelm i prosent
Mandag	10	7	3	70,0	30,0
Tirsdag	15	9	6	60,0	40,0
Onsdag	11	6	5	54,5	45,5
Torsdag	12	7	5	58,3	41,7
Fredag	15	12	3	80,0	20,0
SUM	**63**	**41**	**22**	**65,1**	**34,9**

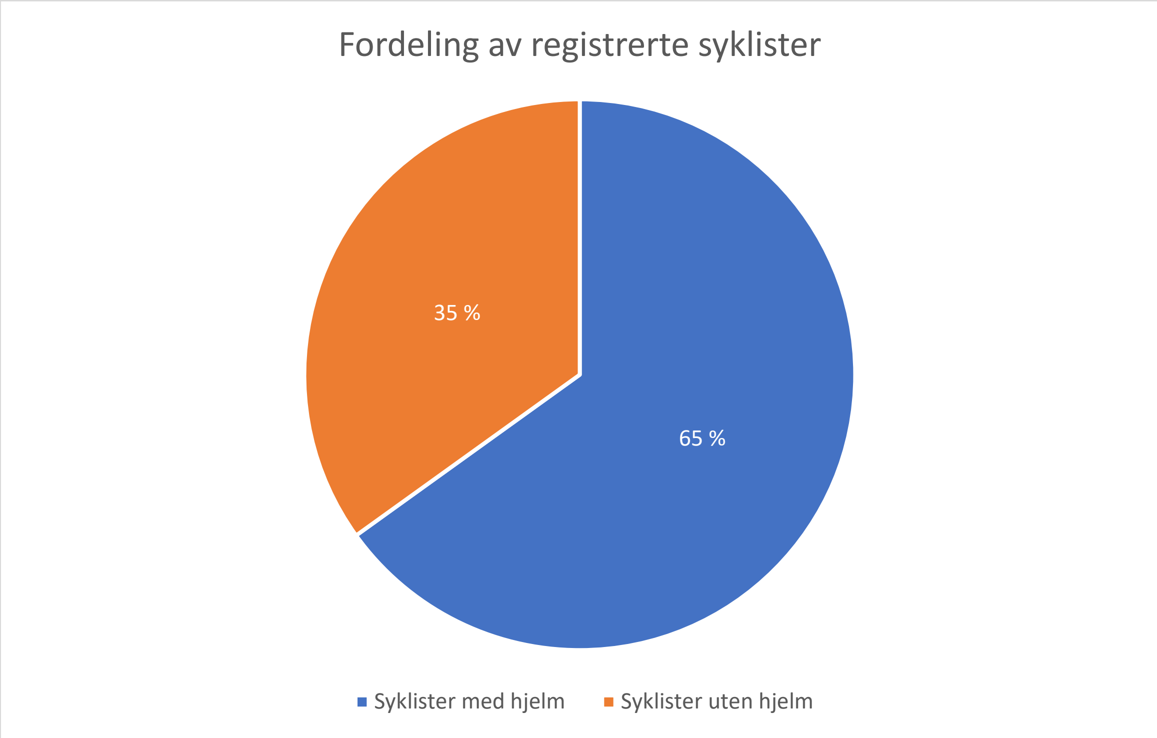
Gjennomsnittlig antall syklister per dag:	12,6	syklister
Gjennomsnittlig antall syklister med hjelm per dag:	8,2	syklister

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Ukedag	Syklister	Syklister med hjelm	Syklister uten hjelm	Andel syklister med hjelm i prosent	Andel syklister uten hjelm i prosent
3		Mandag	10	7	=C3-D3	=D3/C3*100	=100-F3
4		Tirsdag	15	9	=C4-D4	=D4/C4*100	=100-F4
5		Onsdag	11	6	=C5-D5	=D5/C5*100	=100-F5
6		Torsdag	12	7	=C6-D6	=D6/C6*100	=100-F6
7		Fredag	15	12	=C7-D7	=D7/C7*100	=100-F7
8		**SUM**	**=SUMMER(C3:C7)**	**=SUMMER(D3:D7)**	**=SUMMER(E3:E7)**	**=D8/C8*100**	**=100-F8**
9							
10				Gjennomsnittlig antall syklister per dag:	=C8/5	syklister	
11				Gjennomsnittlig antall syklister med hjelm per dag:	=D8/5	syklister	
12							

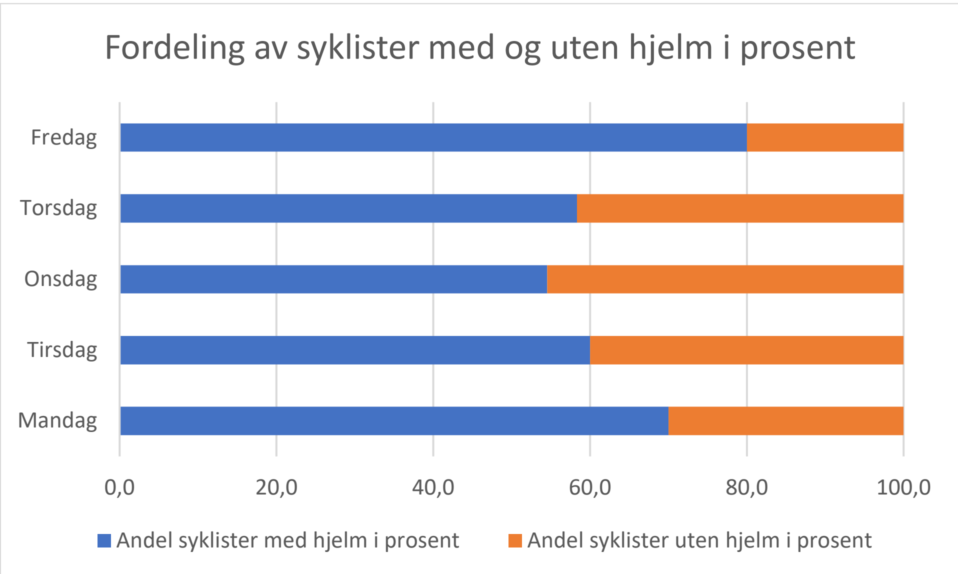
Jeg har valgt å sette opp tre ulike diagrammer for å vise frem dataene på ulike måter. Det første diagrammet er et stablet stolpediagram som viser tydelig fordelingen av de som bruker og ikke bruker hjelm samtidig som vi ser det totale antallet syklister på en oversiktlig måte:



Det neste diagrammet tydeliggjør forskjellene mellom de som bruker og ikke bruker hjelp totalt sett i løpet av uka ved å sammenlikne dem i et sektordiagram:



Til slutt kan det også være av interesse å ikke tenke på hvor mange som syklet hver dag, men heller sette søkelys på fordelingen av hjelm og ikke hjelm hver dag. Da kan man for eksempel sette opp et liggende stolpediagram med andelsfordelingen av de to gruppene hver dag:



Andre beregninger som kan være interessante kan være beregninger for spredning som standardavvik, varians eller variasjonsbredde, men det går jeg ikke noe mer innpå her.

Av: Jon Bjarne Bø

Oppgave 5

a) Fordi vi ikke vet fordelingen av årslønnene innad i intervallene må vi anta at dataene er jevnt fordelt når vi skal regne.

Gjennomsnitt

Om vi gjør denne antakelsen kan vi ta utgangspunkt i middelverdien i hvert intervall for å regne ut et estimat for gjennomsnittslønnen:

Uten formler:

Årslønn (i tusen kroner)		Klassemidtpunkt	Frekvens	Frekvens * klassemidtpunkt
Startverdi	Sluttverdi			
250	350	300	8	2400
350	450	400	42	16800
450	500	475	40	19000
500	550	525	20	10500
550	600	575	15	8625
600	650	625	3	1875
650	750	700	2	1400
750	1000	875	1	875
1000	2000	1500	15	22500
SUM			146	83975

Estimert gjennomsnittslønn (i tusen kroner): 575,171

Med formler:

	B	C	D	E	F
1					
2	Årslønn (i tusen kroner)		Klassemidtpunkt	Frekvens	Frekvens * klassemidtpunkt
3	Startverdi	Sluttverdi			
4	250	=B5	=(B4+C4)/2	8	=D4*E4
5	350	=B6	=(B5+C5)/2	42	=D5*E5
6	450	=B7	=(B6+C6)/2	40	=D6*E6
7	500	=B8	=(B7+C7)/2	20	=D7*E7
8	550	=B9	=(B8+C8)/2	15	=D8*E8
9	600	=B10	=(B9+C9)/2	3	=D9*E9
10	650	=B11	=(B10+C10)/2	2	=D10*E10
11	750	=B12	=(B11+C11)/2	1	=D11*E11
12	1000	2000	=(B12+C12)/2	15	=D12*E12
13	SUM			=SUMMER(E4:E12)	=SUMMER(F4:F12)
14					
15	Estimert gjennomsnittslønn (i tusen kroner):			=F13/E13	
16					

Vi kan regne ut at et godt estimat for gjennomsnittslønnen er 575 171 kroner. Det er kun et estimat for gjennomsnittet fordi vi har gjort en antakelse om at lønningene er jevnt fordelt.

Av: Jon Bjarne Bø

Median

For å regne ut medianen må vi først finne ut hvilken klasse medianen ligger i. Vi vet at medianverdien er den verdien i midten når vi har datamaterialet sortert i stigende rekkefølge, så medianen her må være verdi nummer $\frac{146}{2} = 73$. Altså vil lønning nummer 73 være medianlønnen. Om vi så tar for oss gruppe for gruppe ser vi at de to øverste gruppene i tabellen (med de laveste lønningene) til sammen utgjør 50 personer. Det betyr at medianen må befinne seg i det neste intervallet: $[450 - 500\,\rangle$.

For å regne oss frem til en nøyaktig median må vi finne ut verdien i intervallet som svarer til person nummer 23 (siden 73 – 50 = 23, når vi trekker fra de første intervallene).

Siden det er 40 personer i intervallet så vet vi også at medianen er omtrent midt i intervallet når det er jevnt fordelt siden 23 er nesten halvparten av 40, men vi kan også estimere mer nøyaktig ved regning:

$$\frac{klassebredde}{frekvens} = \frac{50}{40} = 1{,}25$$

Det betyr at hver person i intervallet tjener 1 250 kroner mer for hver person man teller oppover om årslønnene er jevnt fordelt. Vi kan da legge dette til startlønnen i dette intervallet og multiplisere med antall vi skal telle oss bortover for å finne medianen:

$$450 + 1{,}25 \cdot 23 = 450 + 28{,}75 = 478{,}75$$

Medianlønnen kan vi altså anslå til å være 478 750 kroner. Dette er også kun et estimat basert på at alle årslønnene er jevnt fordelt.

b) Som vist i forrige deloppgave så gir de to sentralmålene veldig forskjellig verdi. Grunnen til at gjennomsnittet er så mye høyere enn medianen er fordi at det trekkes veldig opp av lønningene i den høyeste gruppen (de som tjener over én million). Her er lønningene så mye høyere enn det de fleste andre i bedriften tjener og derfor trekkes gjennomsnittet opp.
Jeg mener derfor at median er det sentralmålet som passer best til å beskrive årslønnene i bedriften da det ikke påvirkes i noen særlig grad av de få høye lønningene.

Oppgave 6

Funksjonen som er brukt som modell er:

$$P(x) = 1600 \cdot 1{,}045^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 9$$

a) Denne modellen forteller oss at elevene har planlagt å samle inn 1600 kroner i August, for så å øke innsamlingen hver måned med 4,5% for å nå målet. Dette skal de gjøre i 9 måneder.

b) og c)

Oppgave b kan fint løses i Geogebra ved å sette inn funksjonsuttrykket, men siden vi uansett skal programmere i oppgave c, så velger jeg å ta utgangspunkt i programmet der og utvide det litt:

Oppgave_6_eksamen_2py_2023.py > ...

```python
def P(x):
    return 1600 * 1.045 ** x

sum_pant = 0
maaneder = ["August", "September", "Oktober", "November", "Desember", "Januar", "Februar", "Mars", "April", "Mai"]

x = 0

while x <= 9:

    sum_pant = sum_pant + P(x)
    print(f"I {maaneder[x]} skal elevene samle inn: {round(P(x))} kroner")
    x = x + 1

print(f"Totalt har elevene samlet inn {round(sum_pant)} kroner")
```

TERMINAL PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE COMMENTS Code

```
I August skal elevene samle inn: 1600 kroner
I September skal elevene samle inn: 1672 kroner
I Oktober skal elevene samle inn: 1747 kroner
I November skal elevene samle inn: 1826 kroner
I Desember skal elevene samle inn: 1908 kroner
I Januar skal elevene samle inn: 1994 kroner
I Februar skal elevene samle inn: 2084 kroner
I Mars skal elevene samle inn: 2177 kroner
I April skal elevene samle inn: 2275 kroner
I Mai skal elevene samle inn: 2378 kroner
Totalt har elevene samlet inn 19661 kroner
```

Her ser vi at elevene regnet med å samle inn 2378 kroner i mai (rundet av til hele kroner siden det er urealistisk å regne med desimaler her).

Som vi også ser når programmet over kjøres så samler elevene inn en del for lite. Det som kan endres er å enten velge å starte august med å samle inn mer den første måneden. Da vil alt det andre også tilpasse seg (og dette er muligens den enkleste endringen. Om vi skal gjøre dette kan vi bare endre i formelen fra 1600 til 2000 f.eks. For så å kjøre programmet på nytt og se hvordan det ser ut nå. Testet ut å bruke 2000, så at det var litt for lite, endret til 2040 da var vi litt over og justerte ned til 2035. Da ser vi at vi treffer ganske eksakt (men det står ingenting i oppgaven om at det ikke er greit å gå over):

Oppgave_6_eksamen_2py_2023.py > ...

```python
def P(x):
    return 2035 * 1.045 ** x

sum_pant = 0
maaneder = ["August", "September", "Oktober", "November", "Desember", "Januar", "Februar", "Mars", "April", "Mai"]

x = 0

while x <= 9:

    sum_pant = sum_pant + P(x)
    print(f"I {maaneder[x]} skal elevene samle inn: {round(P(x))} kroner")
    x = x + 1

print(f"Totalt har elevene samlet inn {round(sum_pant)} kroner")
```

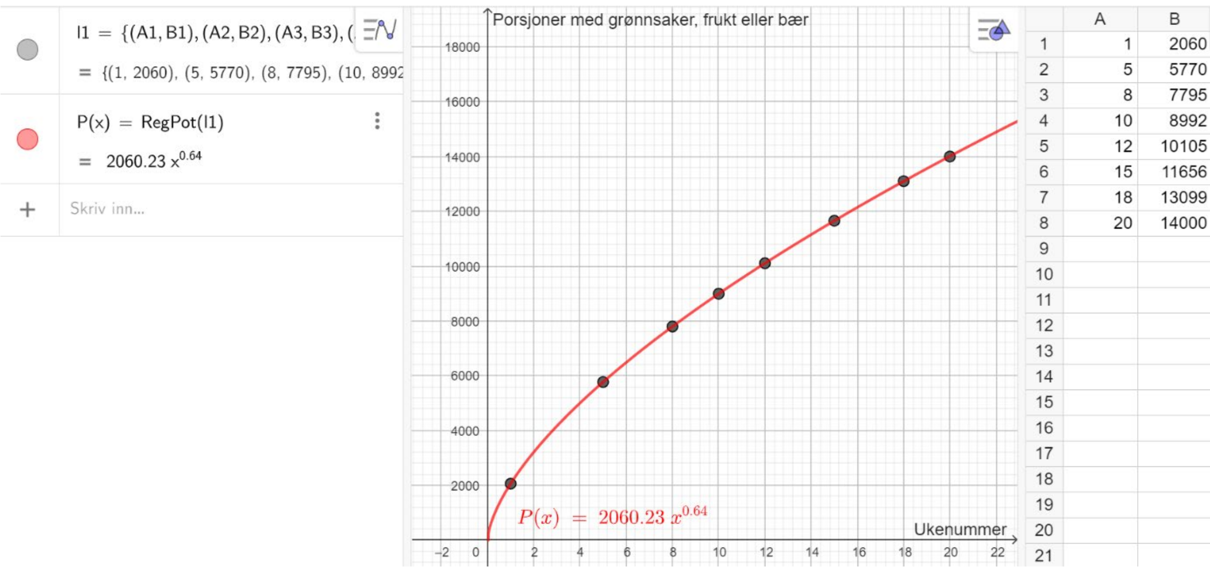
TERMINAL PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE COMMENTS Code

```
I August skal elevene samle inn: 2035 kroner
I September skal elevene samle inn: 2127 kroner
I Oktober skal elevene samle inn: 2222 kroner
I November skal elevene samle inn: 2322 kroner
I Desember skal elevene samle inn: 2427 kroner
I Januar skal elevene samle inn: 2536 kroner
I Februar skal elevene samle inn: 2650 kroner
I Mars skal elevene samle inn: 2769 kroner
I April skal elevene samle inn: 2894 kroner
I Mai skal elevene samle inn: 3024 kroner
Totalt har elevene samlet inn 25007 kroner
```

Andre justeringer en kunne ha gjort er å endre på den prosentvise veksten, og altså da endre vekstfaktoren i funksjonen til noe annet.

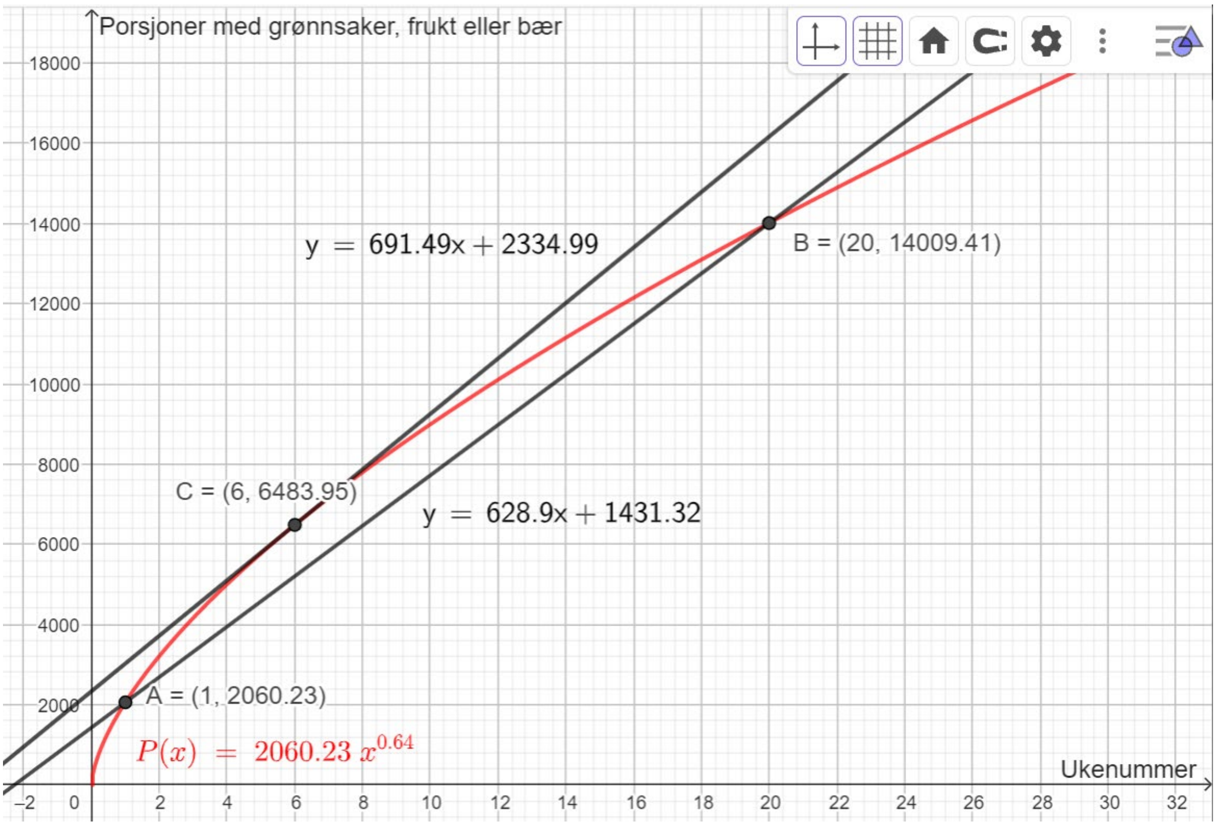
Oppgave 7

a) Ser at funksjonen skal være en potensfunksjon, så legger inn tabellen med verdier i Geogebra, velger regresjonsanalyse og potensfunksjon. Kommer frem til følgende modell: $P(x) = 2060{,}23x^{0.64}$



b) og c)

Siden jeg allerede har grafen i geogebra velger jeg å gjøre begge disse deloppgavene grafisk der. Jeg legger inn punktene som er spesifisert i oppgaven, lager en linje mellom punktene hvor x=1 og x=20, og lager en tangent i punktet på grafen hvor x=6:



Stigningstallet til den nederste rette linjen (gjennom punktene hvor x=1 og x=20) forteller oss at antall porsjoner med grønnsaker, frukt og bær i gjennomsnitt har vokst med 628,9 hver uke mellom uke 1 og uke 20.

Stigningstallet til den øverste linjen forteller oss om den momentane vekstfarten i uke 6, og gir et anslag på hvor mye økning i antall porsjoner det var akkurat denne uka. Siden stigningstallet her er 691,49 betyr det at det i uke 6 vokste med så mange porsjoner.