Eksamen
Matematikk R2
Løsningsforslag

Martin Ansnes

24. mai 2023

Del 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = \sin x + x\cos x$ (produktregel)

b) $g'(x) = \dfrac{-2\sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cos x}{\sin^2 x}$ (kjerne- og brøkregel)

Oppgave 2

a) $\int\limits_{-1}^{1} (4x^3 - x)\mathrm{d}x = \left[x^4 - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0.$

b) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^{2x}\ \mathrm{d}x \overset{u=2x}{=} \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\ln 2} e^u\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{2\ln 2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{2\ln 2} - e^0\right) = \dfrac{1}{2}(e^{\ln 4} - 1) = \dfrac{3}{2}.$

Oppgave 3

a) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Dette gir

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,\ \text{qed.}$$

b) Bruker resultatet fra **a)** til å gjennomføre variabelskiftet $u = \tan x$:

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x \overset{u=\tan x}{=} \int \frac{1+\tan^2 x}{u}\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2 x} = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|\tan x| + C.$$

Oppgave 4

a) Her ser vi at $a_1 = 2$ og $d = 6$. Vi trenger å finne ut hvor mange ledd det er i rekka, noe vi kan gjøre ved å løse følgende likning for n:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d(n-1) \\
a_n &= a_1 + dn - d \\
a_n + d - a_1 &= dn \\
n &= \frac{a_n + d - a_1}{d} = \frac{296 + 6 - 2}{6} = \frac{300}{6} = 50.
\end{aligned}$$

Summen blir

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\
S_{50} &= \frac{50}{2}(2 + 296) = 25 \cdot 298 = 7450.
\end{aligned}$$

b) Finner k ved å dele et ledd på det forrige. Her får vi $k = 1/3$. Formelen for summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er gitt ved

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{5}{1-1/3} = \frac{5}{2/3} = \frac{15}{2}.$$

Oppgave 5

$$\begin{aligned}
y' + 3y &= 3, \quad y(0) = 5 \\
\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, ye^{3t}\, \mathrm{d}t &= \int 3e^{3t}\, \mathrm{d}t \\
ye^{3t} &= e^{3t} + C \\
y(t) &= 1 + Ce^{-3t}
\end{aligned}$$

er den generelle løsningen. Setter inn for startbetingelsen og får

$$\begin{aligned}
1 + Ce^{-3\cdot 0} &= 5 \\
1 + C &= 5 \\
C &= 4.
\end{aligned}$$

Spesifikk løsning er dermed

$$y(t) = 1 + 4e^{-3t}.$$

Oppgave 6

Vi kan lese av grafen at likevektslinja d er -1, perioden er $\pi/2$, amplituden A er 3 og faseforskyvningen er $\pi/6$. Koeffisienten c foran x i sinusuttrykket er definert ved $c = 2\pi/p$, der p er perioden. Det gir at $c = 4$. Videre kan vi finne φ ved at $c(x - x_0) = cx + \varphi$, som gjør at $\varphi = -cx_0$, der x_0 er faseforskyvningen. Dette gir $\varphi = -4 \cdot \pi/6 = -2\pi/3$. Dermed har vi

$$f(x) = 3\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$$

og

$$f'(x) = 12\cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Det gir

$$f'(0) = 12\cos\left(4\cdot 0 - \frac{2\pi}{3}\right) = 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Oppgave 7

a) Finner volumet ved formelen $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{BA}\right|$, der $\overrightarrow{BC} = [-1, 2, 0]$, $\overrightarrow{BT} = [-5, 0, 5]$ og $\overrightarrow{BA} = [-5, 0, 0]$. Finner først vektorproduktet $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT} &= \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -5\end{vmatrix} = [2\cdot(-5) - 0\cdot 0, -(-1\cdot(-5) - (-5)\cdot 0), -1\cdot 0 - (-5)\cdot 2] \\ &= [-10, -5, 10].\end{aligned}$$

Regner deretter ut volumet:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}|[-10, -5, 10]\cdot[-5, 0, 0]| = \frac{25}{3}.$$

b) Arealet av trekanten finner jeg ved formelen

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + (10)^2} = \frac{15}{2},$$

der jeg bruker koordinatene fra vektorproduktet jeg fant i **a)**.

c) Fordi volumet av en tetraeder er gitt som $\frac{1}{6}Gh$, der G er arealet av grunnflata og h er avstanden mellom grunnflata og toppunktet, kan jeg bruke resultatene fra **a)** og **b)** til å finne høyden

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}Gh \\ \frac{25}{3} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}\cdot h \\ h &= \frac{25\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 15} = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Vi må først finne ut hvor $\cos(2x) = 1/2$, som vil være krysningspunktene mellom de to kurvene.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1/2\\ 2x &= \pm\frac{\pi}{3}\\ x &= \pm\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Dette er de eneste stedene kurvene krysses i definisjonsmengden til f. Vi må deretter integrere f fra $-\pi/6$ til $\pi/6$ og deretter trekke fra rektangelet under, som har verdi $\pi/6$.

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos(2x)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{6} = 2\int_{0}^{\pi/6} \cos(2x)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{6} = 2\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/6} - \frac{\pi}{6}\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos(2x+2x) &= \cos(2x)\cos(2x) - \sin(2x)\sin(2x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)\\ \cos(4x) &= \cos^2(2x) - 1 + \cos^2(2x) = 2\cos^2(2x) - 1\\ \cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1\\ \cos(4x) + 1 &= 2\cos^2(2x)\\ \cos^2(2x) &= \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1).\end{aligned}$$

c) Finner volumet av omdreiningslegemet av f mellom $-\pi/6$ og $\pi/6$, og trekker deretter fra sylinderen med høyde $\pi/3$ og radius $1/2$:

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{2}(\cos(4x)+1)\ \mathrm{d}x - \pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}\\ &= 2\pi\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{2}(\cos(4x)+1)\ \mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{12}\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{8}\sin(4x) + x\right]_0^{\pi/6}\\ &= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi^2}{12}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\pi + \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

Oppgave 9

Sjekker først at P_1 er sann:

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+9}{3} = \frac{18}{3} = 6,$$

og det stemmer. Antar så at P_k er sann og skal vise at det medfører at P_{k+1} må være sann.

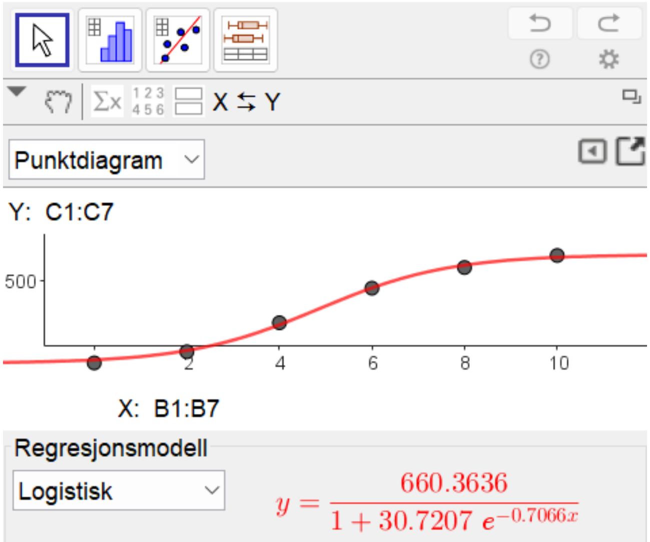
$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{k} t(t+5) &= \frac{k(k+1)(k+8)}{3} \\
\sum_{t=1}^{k} t(t+5) + (k+1)(k+6) &= \frac{k(k+1)(k+8)}{3} + (k+1)(k+6) \\
\sum_{t=1}^{k+1} t(t+5) &= \frac{k(k+1)(k+8) + 3(k+1)(k+6)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left[k(k+8) + 3(k+6)\right]}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left[k^2 + 8k + 3k + 18)\right]}{3} \\
&= \frac{(k+1)\left[k^2 + 11k + 18)\right]}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+9)}{3} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+8)]}{3}
\end{aligned}$$

Dermed er påstanden bevist.

Del 2

Oppgave 1

a) Legger verdiene inn i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonen. Velger logistisk modell, da denne ser ut til å passe best utfra datapunktenes plassering. Det gir også mening, da veksten var laber i begynnelsen, deretter tok kraftig av, for så at nivået stabiliserte seg.



Dette gir modellen

$$F(x) = \frac{660{,}3636}{1 + 30{,}7207e^{-0{,}7066x}}.$$

b) Kopierer funksjonen inn i algebrafeltet og bruker deretter CAS til å regne ut de fire verdiene.

1	I := Integral(F, -0.5, 10.5) ≈ **I := 3728.7369**
2	G := 1/5*Integral(F, 2.5, 7.5) ≈ **G := 344.4484**
3	S := Sum(F, x, 0, 10) ≈ **S := 3728.8155**
4	D := (F(5.001) - F(5))/0.001 ≈ **D := 116.3055**

c) Både I og S estimerer totalt pengebruk på strømming i perioden fra 2008 til 2018. I gjør dette ved hjelp av et integral, mens S gjør det ved hjelp av en sum. G er et gjennomsnittlig årlig pengebruk på strømming for år 3 til 7, det vil si fra år 2011 til 2015, mens D er en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten i år 5, det vil si 2013. Det vil si at i 2013 økte strømmebruken med 116 millioner kroner per år.

Oppgave 2

a) α har en normalvektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, som også vil være normalvektor for β siden planene er parallelle. Legger derfor inn punktene A, B og C (celle 1 - 3), regner ut normalvektoren (celle 4), legger inn punktet P (celle 5) og bruker til slutt normalvektor og punktet P for å finne en likning for β (celle 6).

1	A := (1, 0, 3) → $A := (1, 0, 3)$
2	B := (0, 1, 2) → $B := (0, 1, 2)$
3	C := (2, 3, 2) → $C := (2, 3, 2)$
4	n := Vektor(A, B)⊗Vektor(A, C) → $n := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
5	P := (2, -5, 5) → $P := (2, -5, 5)$
6	β := x(n)(x - x(P)) + y(n)(y - y(P)) + z(n)(z - z(P)) = 0 → $\beta: 2x - 2y - 4z + 6 = 0$

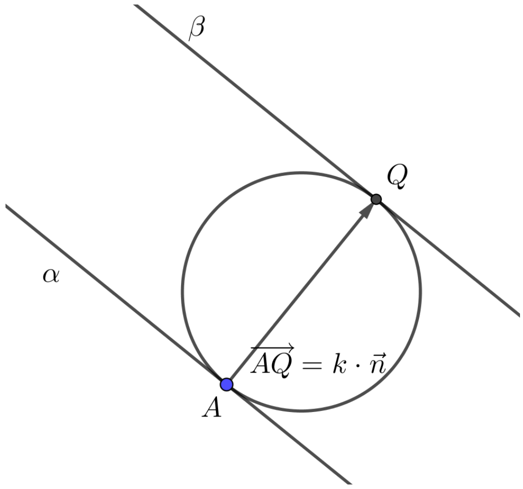
En likning for β blir

$$\beta\colon\, 2x - 2y - 4z + 6 = 0,$$

som kan forenkles til

$$\beta\colon\, x - y - 2z + 3 = 0.$$

b) Vektoren fra A til Q er parallell med normalvektoren $\vec{n}$ og har lengde lik diameter i kula.



Kan derfor finne avstanden fra punktet A til β (celle 7), løse likningen $k \cdot |\vec{n}|$ lik denne avstanden (celle 8), definere $\overrightarrow{AQ}$, og til slutt regne ut koordinatene til Q ved å bruke at $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ}$ (celle 10). Punktet $Q = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$.

7	Avstand(A, β) $\rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3}$
8	k*|n|= sqrt(6)/3 Løs: $\left\{ \mathbf{k} = \frac{1}{6} \right\}$
9	AQ := 1/6*n $\rightarrow \mathbf{AQ} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$
10	Q := A + AQ $\rightarrow \mathbf{Q} := \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3} \right)$

Oppgave 3

a) Setter opp differensiallikningen og løser den med startverdi $v(0) = 0$. Bytter ut F med 250, men beholder $q(t)$ til senere.

1	LøsODE(350v' - F + 10v,v, t, (0, 0)) $\rightarrow\ v = \frac{-1}{10}\, F\, e^{\frac{-t}{35}} + \frac{1}{10}\, F$
2	q(t) := -F/10*exp(-t/35) + F/10 $\rightarrow\ q(t) := \frac{-1}{10}\, F\, e^{\frac{-1}{35}t} + \frac{1}{10}\, F$
3	v(t) := ByttUt(q(t), F, 250) $\rightarrow\ v(t) := -25\, e^{\frac{-1}{35}t} + 25$

Fartsuttrykket er

$$v(t) = -25e^{-t/35} + 25.$$

b) Grensa når $t \to \infty$ er 25 for fartsfunksjonen fordi det første leddet vil gå mot 0. Dermed er toppfarta 25 m/s for denne mopedbilen.

c) Finner ut hva F må være for at toppfarta skal være 60 km/h $= 60/3{,}6$ m/s ved å løse likningen

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{60}{3{,}6}$$

for F.

Grenseverdi(q(t), t, ∞) = 60/3.6, F

NLøs: $\{F = 166.6667\}$

Vi ser at effekten må være 167 N.

Oppgave 4

a) Vi har konvergens av rekka hvis $k = \frac{x}{2} - 3$ er mindre enn 1 i absoluttverdi

$$\begin{aligned} -1 < \frac{x}{2} - 3 < 1 \\ 2 < \frac{x}{2} < 4 \\ 4 < x < 8. \end{aligned}$$

b) Konvergensradius er 4, og sentrum i 1. $k(x) = x/4 - 1$ sikrer dette konvergensområdet. Videre er uttrykket for summen er $a_1/(1 - k(4)) = 3$, som vil si at $k(4) = 1 - a_1/3$. Men her er $k(4) = 0$, som ikke gir mening. Vi trenger en annen k, og jeg forsøker meg med en rasjonal funksjon.

$$\begin{aligned}
-3 &< x < 5 \\
1 &< x + 4 < 9 \\
\frac{1}{9} &< \frac{1}{x+4} < 1 \\
1 &< \frac{9}{x+4} < 9 \\
-4 &< \frac{9}{x+4} - 5 < 4 \\
-1 &< \frac{9}{4(x+4)} - \frac{5}{4} < 1,
\end{aligned}$$

så $k(x) = \frac{9}{4x+16} - \frac{5}{4}$. Bruker CAS til å finne a_1 og vise at rekka konvergerer mot 3.

1	k(x) :=9/(4(x + 4)) - 5/4 → $k(x) := \frac{9}{4\,(x+4)} - \frac{5}{4}$
2	a_1/(1 - k(4)) = 3 Løs: $\left\{a_1 = \frac{189}{32}\right\}$
3	k(4) → $\frac{-31}{32}$
4	Sum(189/32*k(4)^(x-1), x,1, ∞) → 3

Oppgave 5

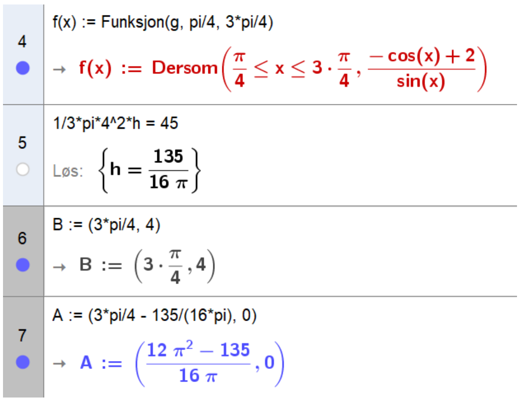
a) Definerer først funksjonen f og bruker formel for volum omdreiningslegeme.

1	f(x) := (2 - cos(x))/sin(x) → $f(x) := \frac{-\cos(x) + 2}{\sin(x)}$
2	V := pi*Integral(f^2, pi/4, 3*pi/4) → $V := \frac{-1}{2}\pi^2 + 10\pi$
3	V ≈ 26.4811

Volumet er $10\pi - \frac{\pi^2}{2} \approx 26{,}5$.

b) For at omdreiingslegemet skal få plass i kjegla, må den ytre kanten med størt radius av omdreiingslegemet få plass innenfor sirkelen med radius 4 for kjegla. Det vil si at

$f(3\pi/4) < 4$. Vi kan regne ut høyden h i kjegla gjennom volumformelen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ når vi vet at volumet er 45. Dermed kan vi plassere spissen av kjegla i punktet $A = (3\pi/4 - h, 0)$. I to dimensjoner må linjestykket mellom punktet A og punktet $B = (3\pi/4, 4)$ representere veggen på kjegla der omdreiningslegemet får størst plass. Så lenge grafen til f ikke krysser dette linjestykket, får omdreiningslegemet plass.



Ved å legge grafen til f og punktene A og B inn i grafikkfeltet, ser vi at det faktisk er et krysningspunkt, og at omdreiningslegemet altså ikke får plass inni kjegla.