Løsningsforslag 1T eksamen V2023

Ståle Gjelsten

2023-05-26

Løsningsforslag 1T eksamen V2023

Jeg blir veldig glad om du melder ifra om feil enten direkte til meg eller via forumet på matematikk.net.

Del 1

Oppgave 1

Alternativ 1 Vi har at $\sin u = \frac{8}{10}$ og $\cos u = \frac{6}{10}$.

$$\sin^2 u + \cos^2 u = \left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

Alternativ 2: bruke pytagoras Vi har $\sin u = \frac{8}{10} \iff 8 = 10 \sin u$ og $\cos u = \frac{6}{10} \iff 6 = 10 \cos u$

Vi kan bruke pytagoras på trekanten og sette opp

$$\begin{aligned} 8^2 + 6^2 &= 10^2 \\ (10 \sin u)^2 + (10 \cos u)^2 &= 10^2 \\ \cancel{10^2} \sin^2 u + \cancel{10^2} \cos^2 u &= \cancel{10^2} \\ \sin^2 u + \cos^2 u &= 1 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = 1}}$**, som skulle vises.**[1]

Oppgave 2

Vi kan faktorisere ved hjelp av heltallsmetoden. Jeg ser at:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

[1] $\sin^2 u$ er annen notasjon for $(\sin u)^2$. Uttrykkene betyr nøyaktig det samme.

Ved å sette funksjonen lik null finner jeg nullpunktene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
(x-4)(x+2) &= 0 \\
x-4 = 0 &\vee x+2 = 0 \\
x = 4 &\vee x = -2
\end{aligned}
$$

Funksjonen krysser x-aksen ved $x = 4$ og $x = -2$.

Oppgave 3

Hvis likningen skal være en identitet så må uttrykkene på høyre side og venstre side være like for alle x.

Vi ser av faktoriseringen at $(x-1)$ er en faktor i $x^3 - 5x^2 - 8x + 12$. Det enkleste er nok derfor å dividere begge sider av likningen med $(x-1)$.[2] Venstre side blir da:

$$
\begin{array}{r}
(x^3 - 5x^2 - 8x + 12) : (x-1) = \underline{x^2 - 4x + 12} \\
\underline{x^3 - 1x^2 + 0x + 0} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-4x^2 - 8x + 12 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-4x^2 + 4x + 0} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
12x + 12 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{12x + 12} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

Jeg utfører divisjonen på begge sider av den opprinnelige likningen og får

$$
\begin{aligned}
(x^3 - 5x^2 - 8x + 12) : (x-1) &= \cancel{(x-1)}(x+a)(x-b) : \cancel{(x-1)} \\
\underbrace{x^2 - 4x + 12}_{\text{heltallsmetoden gir } (x+2)(x-6)} &= (x+a)(x-b) \\
(x+2)(x-6) &= (x+a)(x-b)
\end{aligned}
$$

Jeg ser at $\underline{\underline{a = 2 \wedge b = 6}}$ for at likningen skal bli en identitet.

Oppgave 4

Jeg ser at vi skal lage en rasjonal funksjon på formen $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

[2] Det er også mulig å gange ut parentesene på høyre side og sammenligne like ledd for å finne a og b, men det krever nok mer arbeid.

Det er en vertikal asymptote og bruddpunkt ved $x = 1$, det betyr at uttrykket i nevneren vår må ha nullpunkt i $x = 1 \implies Q(1) = 0$.

Det er en horisontal asymptote ved $y = 3$. Det betyr at $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 3$. For at det skal være mulig må polynomene i teller og nevner ha samme grad. Dette ligner på en rasjonal funksjon med førstegradsuttrykk i teller og nevner der koeffisienten foran x i telleren er 3 ganger så stor som koeffisienten foran x i nevneren.

Jeg lar $Q(x) = x - 1$ siden dette er et førstegradsuttrykk som vil gi riktig bruddpunkt.

Vi har nå tre krav til $P(x)$:

- $P(x)$ skal ha samme grad som $Q \implies P$ må være førstegradsuttrykk $ax + b$
- $P(x)$ skal ha 3 ganger så stor koeffisient som $Q(x) \implies P(x) = 3x + b$
- $f(x)$ har et nullpunkt i $x = 2 \implies P$ skal ha nullpunkt i $x = 2 \implies P(2) = 0$

For å oppfylle det siste kravet må P være på formen $P(x) = 3x + b$, der b må være slik at $P(2) = 0$.

$$\begin{aligned} P(2) &= 0 \\ 3 \cdot 2 + b &= 0 \\ b &= -6 \end{aligned}$$

Et funksjonsuttrykk som passer til grafen er

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3x-6}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus 1}}$$

Kommentar: Jeg tolker oppgaveteksten som at vi skal finne én funksjon $f(x)$ som passer til grafen. Generelt vil alle uttrykk på formen $\frac{3cx-6c}{cx-c}$ der $(c \in \mathbb{R}) \land (x \in \mathbb{R} \setminus 1)$ passe til grafen, så det kan godt være at dette generelle uttrykket er et bedre svar på oppgaven.

Oppgave 5

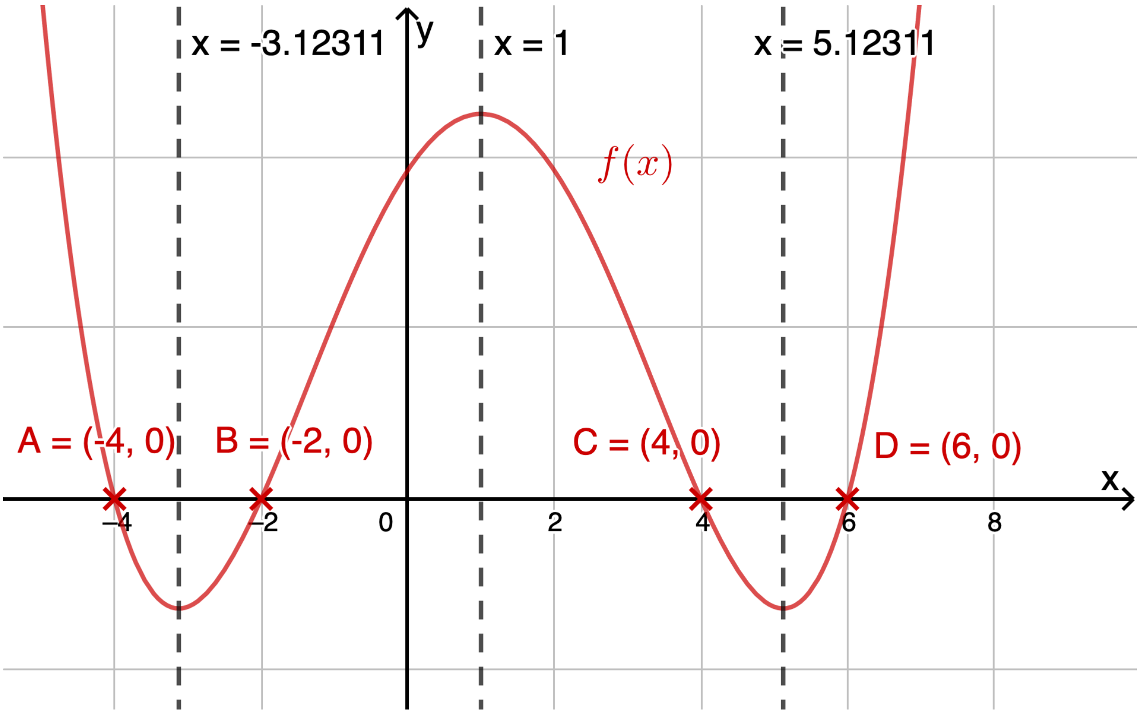
Jeg vet at den deriverte er null i de stasjonære punktene til en funksjon. Når den deriverte er positiv så vokser grafen. Når den deriverte er negativ så minker grafen.

Jeg ser at f har bunnpunkt i $x = -3{,}12$ og $x = 5{,}12$ (det må være bunnpunkt siden den deriverte beveger seg fra den negative siden til den positive siden ved disse punktene). f må, med samme begrunnelse, ha et toppunkt i $x = 1$.

Vi har nullpunkter ved $x = -4$, $x = -2$, $x = 4$ og $x = 6$.[3]

[3] Nullpunktene til f gir oss mulighet til å lage et funksjonsuttrykk for en fjerdegradsfunksjon: $f(x) = a(x+4)(x+2)(x-4)(x-6)$, men det er *ikke* meningen at du skal bruke funksjonsuttrykket og regne ut verditabell.

For å skissere grafen så starter jeg med nullpunktene og tegner inn passende bunnpunkter og toppunkt ved x-verdiene jeg fant tidligere.

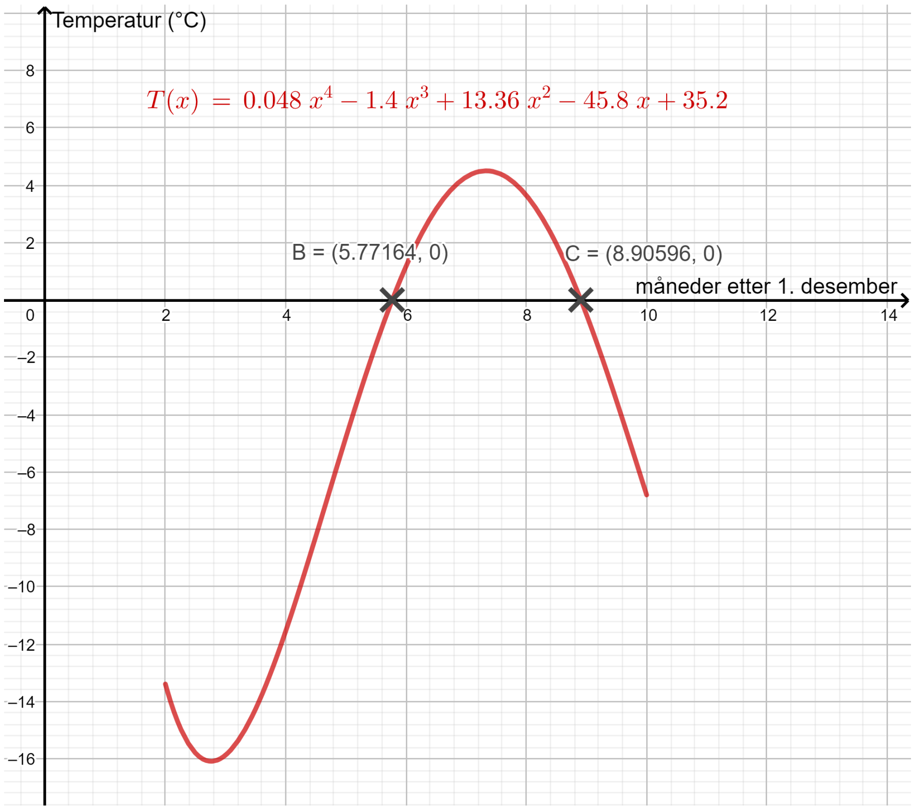


Figur 1: Del 1 oppgave 5. Skisse av fjerdegradsfunksjon

Del 2

Oppgave 1

1a Jeg tegnet grafen til funksjonen og fant skjæringspunktene ved x-aksen, hvor temperaturen er 0 °C, se punkt B og C.



Figur 2: Del 2 oppgave 1. Gjennomsnittemperatur på Svalbard 1. februar–1. oktober

Det er $8{,}906 - 5{,}772 = 3{,}134$ måneder mellom skjæringspunktene. Jeg setter at det er 30,5 døgn i hver måned slik at vi får:

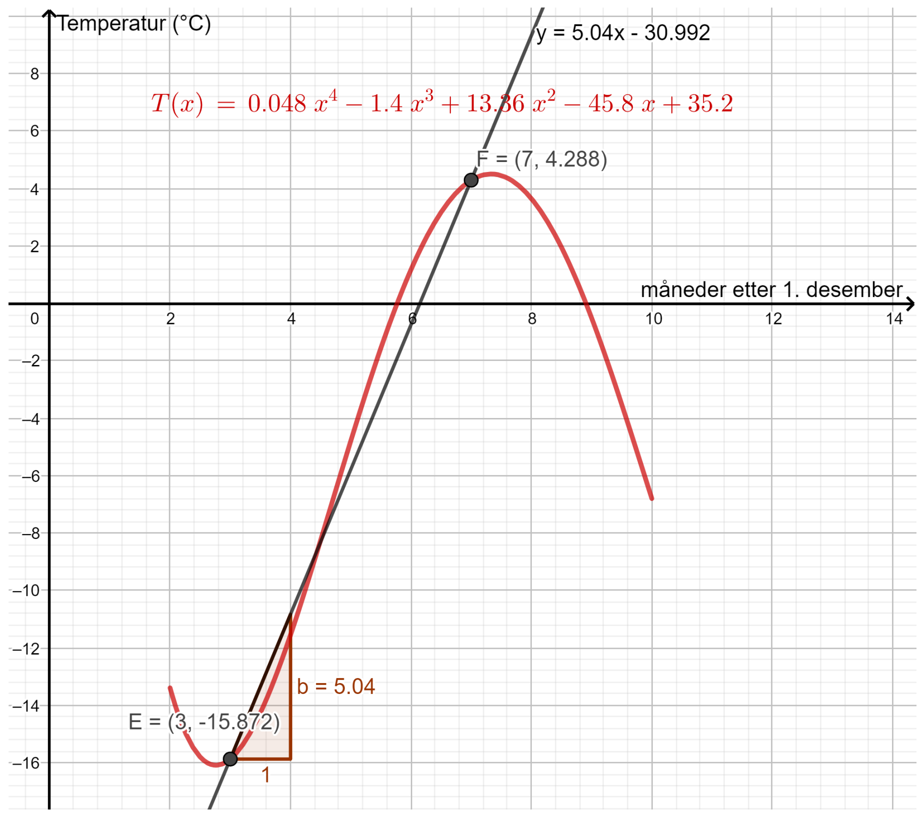
$$3{,}134 \cdot 30{,}5 = 95{,}6 \approx \underline{\underline{96}}$$

Temperaturen er over 0 °C i omtrent 96 døgn

1b Jeg la inn punktene i GeoGebra, dro en linje mellom dem og fant stigningstallet, se $b = 5.04$ i utklippet.

Stigningstallet til linja gir den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = 3$ til $x = 7$.

Temperaturen steg med 5,04 grader per måned i gjennomsnitt i perioden fra 1. mars til 1. juli.



Figur 3: Del 2 oppgave 1b. Gjennomsnittlig vekstfart fra mars til juli

1c Jeg tegnet T' sammen med T i koordinatsystemet og fant nullpunkter og ekstremalpunkter til T'.

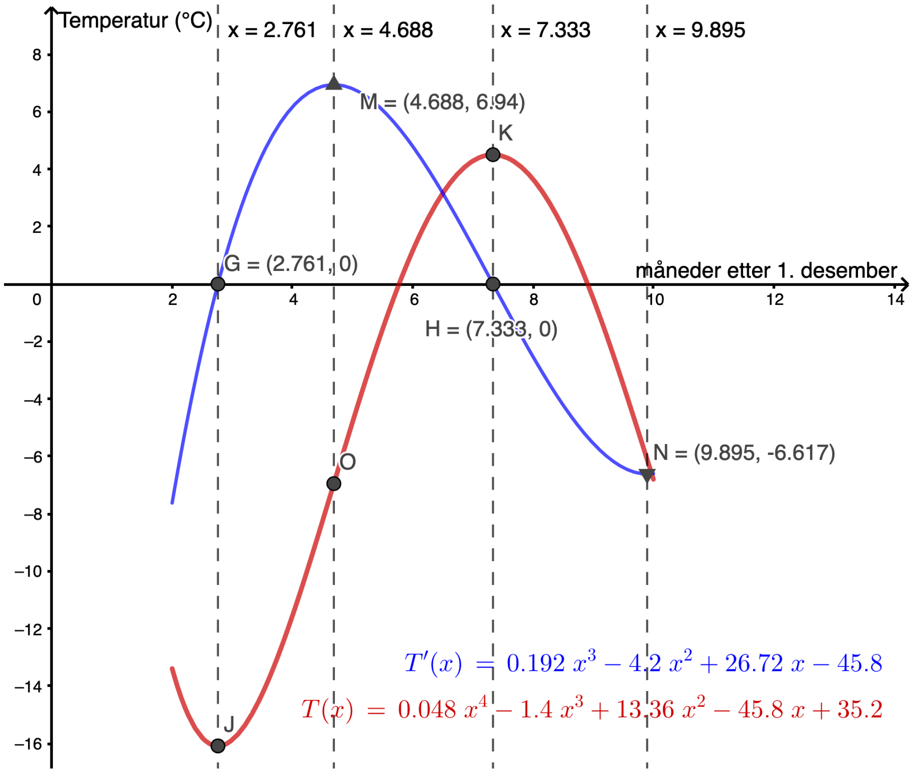
$$\begin{aligned} \text{Toppunkt (M)}: &\quad (4{,}69, 6{,}94) \\ \text{Bunnpunkt (N)}: &\quad (9{,}90, -6{,}62) \\ \text{Nullpunkter (G og H)}: &\quad (2{,}76, 0) \text{ og } (7{,}33, 0) \end{aligned}$$

Jeg sammenlignet disse punktene med tilsvarende punkter på grafen til T.

Nullpunktene til T' ligger ved samme x-verdi som ekstremalpunktene til T. y-koordinatene til nullpunktene til T' er selvsagt null, og det stemmer godt med at vekstfarten i ekstremalpunktene til T er null. **Ved hjelp av nullpunktene til T' finner vi den kaldeste temperaturen i bunnpunktet 23. februar og den varmeste temperaturen i toppunktet 10. juli.**

Toppunktet til T' er er ved $x = 4{,}69$ og $y = 6{,}94$. Det vil si at rundt den 21. april vil temperaturen øke raskest. **Gjennomsnittstemperaturen stiger raskest med 6,94 grader per måned rundt 21. april.**

Bunnpunktet til T' er er ved $x = 9{,}90$ og $y = -6{,}62$. Det vil si at rundt den 27. september vil temperaturen synke raskest. **Gjennomsnittstemperaturen synker raskest med 6,62**



Figur 4: Del 2 oppgave 1c. Vekstfarten til temperaturen på Svalbard

grader per måned rundt 27. september.

Oppgave 2

2a Med 80 m tau og et område med lengde 60 m så har de 20 m igjen å fordele til de to siste sidene. Matematisk kan vi skrive $\frac{80-60}{2} = 10$. Bredden blir altså 10 m.

$$A = 10 \cdot 60 = 600$$

Arealet av området er 600 m².

2b Jeg satte opp en oversikt i Excel, se formlene i formelutklippet. Vi ser at arealet øker når bredden øker helt fram til lengden er 40 m og bredden er 20 m, deretter minker arealet.

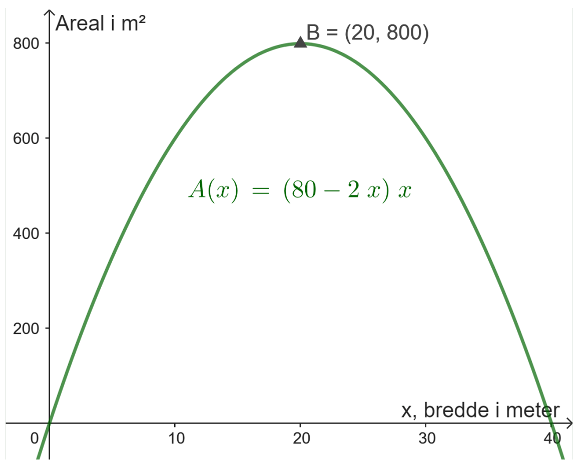
Hermann har rett i at vi får det største arealet dersom lengden er dobbelt så lang som bredden.

2c La oss kalle bredden i meter for x. Da må lengden i meter være $80 - 2x$. Vi kan sette opp et funksjonsuttrykk for arealet $A(x)$ der bredden er x meter.

$$A(x) = (80 - 2x) \cdot x$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Lengde**	**Bredde**	**Areal**		**Lengde**	**Bredde**	**Areal**
3		78	1	78			=(80-B3)/2	=B3*C3
4		76	2	152			=(80-B4)/2	=B4*C4
5		74	3	222			=(80-B5)/2	=B5*C5
6		72	4	288			=(80-B6)/2	=B6*C6
7		70	5	350			=(80-B7)/2	=B7*C7
8		68	6	408			=(80-B8)/2	=B8*C8
9		66	7	462			=(80-B9)/2	=B9*C9
10		64	8	512			=(80-B10)/2	=B10*C10
11		62	9	558			=(80-B11)/2	=B11*C11
12		60	10	600			=(80-B12)/2	=B12*C12
13		58	11	638			=(80-B13)/2	=B13*C13
14		56	12	672			=(80-B14)/2	=B14*C14
15		54	13	702			=(80-B15)/2	=B15*C15
16		52	14	728			=(80-B16)/2	=B16*C16
17		50	15	750			=(80-B17)/2	=B17*C17
18		48	16	768			=(80-B18)/2	=B18*C18
19		46	17	782			=(80-B19)/2	=B19*C19
20		44	18	792			=(80-B20)/2	=B20*C20
21		42	19	798			=(80-B21)/2	=B21*C21
22		40	20	800			=(80-B22)/2	=B22*C22
23		38	21	798			=(80-B23)/2	=B23*C23
24		36	22	792			=(80-B24)/2	=B24*C24
25		34	23	782			=(80-B25)/2	=B25*C25
26		32	24	768			=(80-B26)/2	=B26*C26
27		30	25	750			=(80-B27)/2	=B27*C27

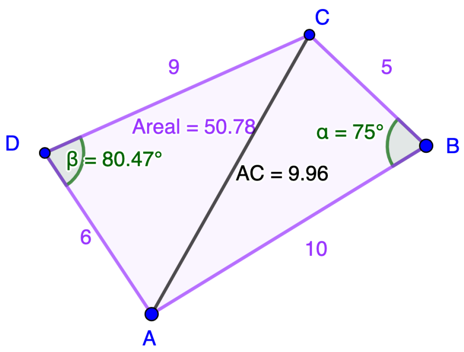
Figur 5: Del 2 oppgave 2b. Oversikt over lengde og bredde av teltplass



Jeg tegnet denne grafen i GeoGebra og fant toppunktet, se punkt B. **Toppunktet ligger ved bredden $x = 20$, så Hermann sin påstand er riktig.**

Oppgave 3

Jeg delte firkant $ABCD$ i to trekanter: ABC og ACD, se den vedlagte skissen. Jeg brukte cosinussetningen på ABC med AC som den ukjente siden, se linje 5 i CAS. På den måten fant jeg $AC^2 = 99{,}12$.



Figur 6: Del 2 oppgave 3. Skisse av $\square ABCD$

5	$AC^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos(75°)$ $\approx$ $\mathbf{AC^2 = 99.12}$
6	$99.12 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(D°), D = 45$ NLøs: $\mathbf{\{D = 80.47\}}$
7	$A_{\square ABCD} := \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \sin(75°) + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \sin(80.47°)$ $\approx$ $\mathbf{A_{\square ABCD} := 50.78}$

AC^2 kunne jeg bruke til cosinussetningen på trekant ACD. Jeg kjente nå alle de tre sidene slik at kunne jeg bestemme $\angle D = 80{,}47°$ i linje 6.

For å finne arealet av $\square ABCD$ brukte jeg arealsetningen på begge trekantene og la sammen de to arealene i linje 7.

Arealet av $\square ABCD$ er 50,78.

Oppgave 4

4a Jeg ser at alle rektanglene har bredde 1. Arealet av hvert rektangel er derfor $A_\square = h \cdot b = h \cdot 1 = h$. Høyden til rektangelet er gitt ved $f(x) = \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2$ hvor $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

8	$f(x) := \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \frac{1}{9}(x+1)(x-6)^2}$
9	$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ $\rightarrow$ $\mathbf{\frac{196}{9}}$

Jeg legger sammen funksjonsverdiene i CAS og finner at det samlede arealet er

$$A = \underline{\underline{\frac{196}{9}}}$$

4b

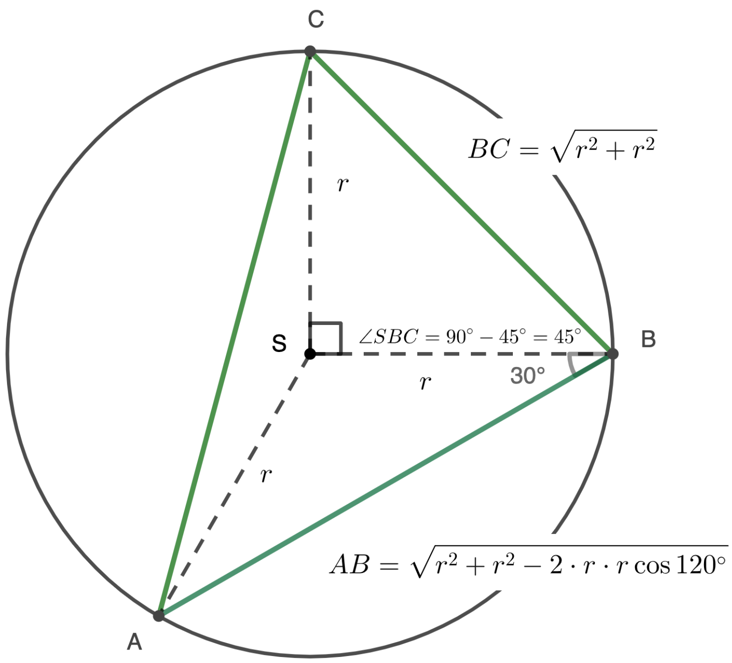
```
def f(x):
    return 1 / 9 * (x + 1) * (x - 6) ** 2   # Definerer funksjonen


x_min = 0                                   # Startverdi for x
x_maks = 6                                  # Sluttverdi for x

n = 6000                                    # antall rektangler

bredde = (x_maks - x_min) / n               # bredden av hvert rektangel

x = x_min                                   # vi starter med å finne
                                            # f(x) ved f(x_min)
areal = 0                                   # lager en variabel som summerer
                                            # arealet
for i in range(n):
    areal_rektangel = bredde * f(x)         # beregener arealet til rektangelet
    areal = areal + areal_rektangel         # summerer arealet av rektangelet
                                            # og det totale arealet
    x = x + bredde                          # flytter x-verdien bortover langs
                                            # x-aksen tilsvarende bredde av rekt
print(f"Arealet av rektanglene er {areal:.3f}")
```

4c Bruker programmet jeg lagde i 4b. **Det gir utskriften** `Arealet av rektanglene er 20.002`.

Oppgave 5

Jeg ser at $\triangle SBC$ og $\triangle ABS$ er likebeinte trekanter med to sider med lengde r.

Jeg har fått oppgitt arealet $A = 2\sqrt{3} + 6$, derfor ønsker jeg å bruke arealsetningen til å bestemme r. Jeg ser at det er mulig å bruke arealsetningen med BC, AB og $\angle B$.



1	$BC := \sqrt{r^2 + r^2}$ → $\mathbf{BC := \sqrt{2}\,\|r\|}$
2	$AB := \sqrt{r^2 + r^2 - 2\,r\,r\,\cos(120^\circ)}$ → $\mathbf{AB := \sqrt{3}\,\|r\|}$
3	$A := \frac{1}{2}\,BC\,AB\,\sin(30^\circ + 45^\circ)$ → $\mathbf{A := \frac{1}{4}\,r^2\left(\sqrt{3} + 3\right)}$
4	$A = 2\sqrt{3} + 6$ Løs: $\left\{\mathbf{r = -2\sqrt{2}, r = 2\sqrt{2}}\right\}$

For å bestemme BC brukte jeg pytagoras i linje 1 og fant $BC = \sqrt{2}|r|$. Dette er lik $\sqrt{2}r$ siden radius alltid må være positiv.

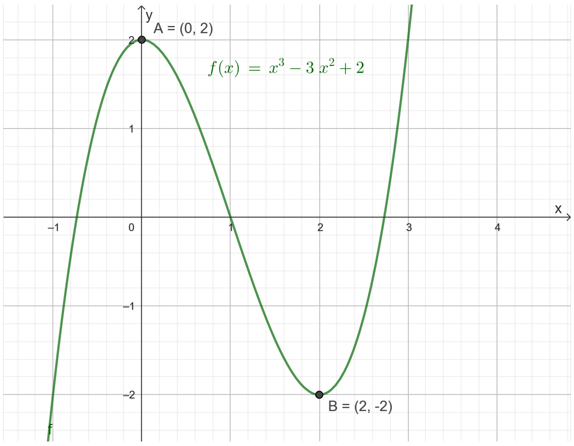
For å bestemme AB fant jeg først vinkelen $\angle SAB = \angle SBA = 30^\circ$ siden $\triangle ABS$ er likebeint. Da må $\angle ASB = 120^\circ$. Deretter brukte jeg cosinussetningen i linje 2 på trekant ABS med AB som den ukjente siden. Igjen kan vi se bort fra negative løsninger og $AB = \sqrt{3}r$.

Siden $\triangle SBC$ er rettvinklet og likebeint må $\angle SBC = 45^\circ$. Jeg satt derfor opp arealsetningen på $\triangle ABC$ i linje 3 og løste likningen med det oppgitte arealet i linje 4.

$$\underline{\underline{r = 2\sqrt{2}}}$$

Oppgave 6

6a Jeg tegnet grafen til f i GeoGebra og fant ekstremalpunktene, se A og B i utklippet.



f har toppunkt i $(0, 2)$ og bunnpunkt i $(2, -2)$.

6b Tredjegradsfunksjoner uten førstegradsledd har den generelle formen

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

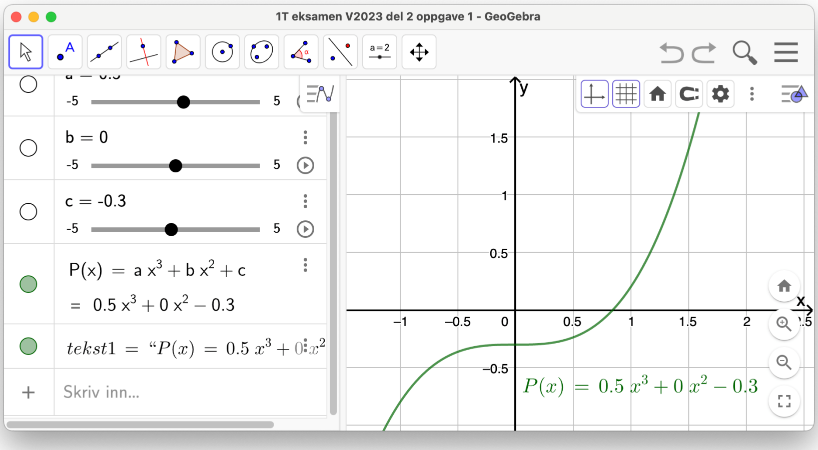
Den deriverte $P'(x)$ gir oss den momentane vekstfarten for hver x-verdi. Når den momentane vekstfarten er lik null så verken vokser eller minker funksjonen $\implies$ vi må da befinne oss i et stasjonært punkt.

$$\begin{aligned}
P'(x) &= 3ax^2 + 2bx \\
0 &= 3ax^2 + 2bx \\
0 &= (3ax + 2b)x \\
3ax + 2b = 0 &\vee x = 0 \\
3ax = -2b &\vee x = 0 \\
x = \frac{-2b}{3a} &\vee x = 0
\end{aligned}$$

Vi ser at $x = 0$ alltid vil gi et stasjonært punkt i $(0, P(0))$ for slike tredjegradsfunksjoner. Stasjonære punkter er ikke bare topp- eller bunnpunkter, det kan også være terrassepunkter slik som grafen til x^3 viser.

Ved å tegne grafen til $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ i GeoGebra og justere på glidere for a, b, c så ser det ut til at vi kun får terrassepunkter dersom $b = 0$. Hvis $b \neq 0$ så ser det ut til at vi får både et toppunkt og et bunnpunkt. Hvis $b > 0$ så er det bunnpunktet som befinner seg på y-aksen og hvis $b < 0$ så er det toppunktet som befinner seg på y-aksen. Det ser også ut til at topp- og bunnpunktet går nærmere hverandre når jeg justerer b slik at den blir nærmere 0.

Vi kan også se at $b = 0$ vil gi et terrassepunkt fra løsningene av $P'(x) = 0$ som vi fant



Figur 7: Del 2 oppgave 6b. Bruk av glidere til utforskning

tidligere. Den ene løsningen vil alltid være $x = 0$. Den andre løsningen, $x = \frac{-2b}{3a}$, vil også bli null dersom koeffisienten foran andregradsleddet, b, er lik null. Dermed vil på vår toppunktsløsning og bunnpunktsløsning ligge i det samme punktet $\implies$ vi får et terrassepunkt.

Trym sin regel er nesten riktig. Det vil alltid være et topp- eller bunnpunkt på y-aksen dersom tredjegradsfunksjonen mangler førstegradsledd, men har et andregradsledd. Det vil imidlertid alltid være et *stasjonært punkt* på y-aksen dersom funksjonen mangler førstegradsleddet.

Alternative løsninger

Del 2 oppgave 4b

Denne løsningen er omtrent 3 ganger så kjapp og bruker lister istedenfor en løkke (men den krever også numpy biblioteket).

```
import numpy as np
def f(x):
    return 1 / 9 * (x + 1) * (x - 6) ** 2    # Definerer funksjonen



x_min = 0                                    # Startverdi for x
x_maks = 6                                   # Sluttverdi for x

n = 6000                                     # antall rektangler

bredde = (x_maks - x_min) / n                # bredden av hvert rektangel

x = np.linspace(x_min, x_maks, n+1)          # lager array med x-verdier
y = f(x)                                     # regner ut funksjonsverdien
                                             # f(x) for hver x
areal = sum(f(x)*bredde)                     # multipliserer bredde med høyde
                                             # og summerer til slutt
print(f"Arealet av rektanglene er {areal:.3f}")
```