Løsningsforslag
Matematikk R2
Våren 2023

Krister J. Trandal
Kirkeparken videregående skole

Del 1

Oppgave 1

a)

$$\int_{-1}^{1}(4x^3 - x)\,dx = \left[x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \left((-1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{0}}$$

b)

$$\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln 2} - e^{2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 2

a) Vi har at $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Det gir

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$\blacksquare$

b) Vi bruker variabelskifte (substitusjonsmetoden) med $u = \tan x$. Det gir

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}\, du$$

hvor vi har brukt resultatet fra oppgave a. Nå får vi at

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\, dx = \int \frac{\cancel{1+\tan^2 x}}{u} \cdot \frac{1}{\cancel{1+\tan^2 x}}\, du = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|\tan x| + C}}$$

Oppgave 3

a) Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [5,0,0]\,, \quad \overrightarrow{AC} = [4,2,0]\,, \quad \overrightarrow{AT} = [0,0,5]$$

og

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right]$$
$$= [0-0, -(0-0), 10-0] = [0,0,10]$$

Volumet av pyramiden (tetraederet) $ABCT$ er nå

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{6}\left|[0,0,10]\cdot[0,0,5]\right| = \frac{1}{6}\left|0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 10\cdot 5\right| = \frac{50}{6} = \underline{\underline{\frac{25}{3}}}$$

b) Vi har at

$$\overrightarrow{BC} = [4-5, 2-0, 0-0] = [-1,2,0]\,, \quad \overrightarrow{BT} = [0-5, 0-0, 5-0] = [-5,0,5]$$

og

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}\right]$$
$$= [10-0, -(-5-0), 0-(-10)] = [10,5,10]$$

Arealet av ΔBCT blir

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT}\right| = \frac{1}{2}\left|[10,5,10]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+5^2+10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{225} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

c) Siden ΔBCT ligger i planet som går gjennom B, C og T, blir avstanden fra A planet det samme som avstanden fra A til sideflaten (trekanten) BCT. Hvis vi regner sideflaten BCT som grunnflaten i tetraederet, kan vi bruke formelen for volum av et tetraeder til å finne høyden av tetraederet, som vil være det samme som avstanden fra punktet A til sideflaten BCT. Volumet av et tetraeder med grunnflate G og høyde h er

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Med $V = \dfrac{25}{3}$ (fra oppgave a) og $G = \dfrac{15}{2}$ (fra oppgave b), får vi at

$$h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot \frac{25}{3}}{\frac{15}{2}} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Avstanden fra punktet A til planet gjennom B, C og T er $\dfrac{10}{3}$.

Oppgave 4

a) Eleven ønsker å regne ut summen av de 10 første leddene i en aritmetisk rekke med første ledd $a_1 = 3$ og differanse $d = 4$.

b) For en aritmetisk rekke er ledd nummer N gitt ved $a_N = a_1 + (N - 1) \cdot d$.
Med $N = 100$, $a_1 = 3$ og $d = 4$ får vi at

$$a_{100} = 3 + (100 - 1) \cdot 4 = 399$$

Summen av en aritmetisk rekke med N ledd er $S_N = \dfrac{a_1 + a_N}{2} \cdot N$, som gir

$$S_{100} = \frac{3 + 399}{2} \cdot 100 = 20100$$

Når programmet kjøres skrives verdien av summen S ut, som er 20100.

Oppgave 5

a) Vi begynner med å bestemme tre ulike arealer uttrykt ved vinkelen v.

Arealet av trekant ABD:

Høyden h i denne trekanten oppfyller $\sin v = \frac{h}{1}$, som gir at $h = \sin v$ (alternativt kan man si at andrekoordinaten til punktet D er $\sin v$ siden punktet D ligger på enhetssirkelen). Da får vi at

$$\text{areal}_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin v = \frac{1}{2} \sin v$$

Arealet av sirkelsektoren definert ved punktet A og buen BD:

Arealet av denne sirkelsektoren er gitt ved

$$\text{areal}_{\text{sirkelsektor}} = \frac{v}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{v}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{v}{2}$$

Arealet av trekant ABC:

Høyden h i denne trekanten oppfyller $\tan v = \frac{h}{1}$, som gir at $h = \tan v$. Da får vi at

$$\text{areal}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan v = \frac{1}{2} \tan v$$

Fra figuren er det klart at

$$\text{areal}_{\Delta ABD} < \text{areal}_{\text{sirkelsektor}} < \text{areal}_{\Delta ABC}$$

Altså må vi ha at

$$\frac{1}{2} \sin v < \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \tan v$$

■

b) Vi omformer ulikhetene fra oppgave a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sin v &< \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \tan v \\
\frac{1}{2} \sin v &< \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \frac{\sin v}{\cos v} \\
\sin v &< v < \frac{\sin v}{\cos v} \\
1 &< \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}
\end{aligned}$$

■

c) Fra ulikhetene i oppgave b, har vi at

$$
\begin{aligned}
1 &< \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v} \\
1 &< \frac{1}{\frac{\sin v}{v}} < \frac{1}{\cos v}
\end{aligned}
$$

Grenseverdiene oppfyller de samme ulikhetene, og vi får at

$$
\begin{aligned}
\lim_{v\to 0^+} 1 < \lim_{v\to 0^+} &\frac{1}{\frac{\sin v}{v}} < \lim_{v\to 0^+} \frac{1}{\cos v} \\
1 < &\frac{1}{\lim\limits_{v\to 0^+} \frac{\sin v}{v}} < 1 \\
1 < &\lim_{v\to 0^+} \frac{\sin v}{v} < 1
\end{aligned}
$$

Den eneste måten disse to siste ulikhetene er oppfylt er hvis

$$
\lim_{v\to 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1
$$

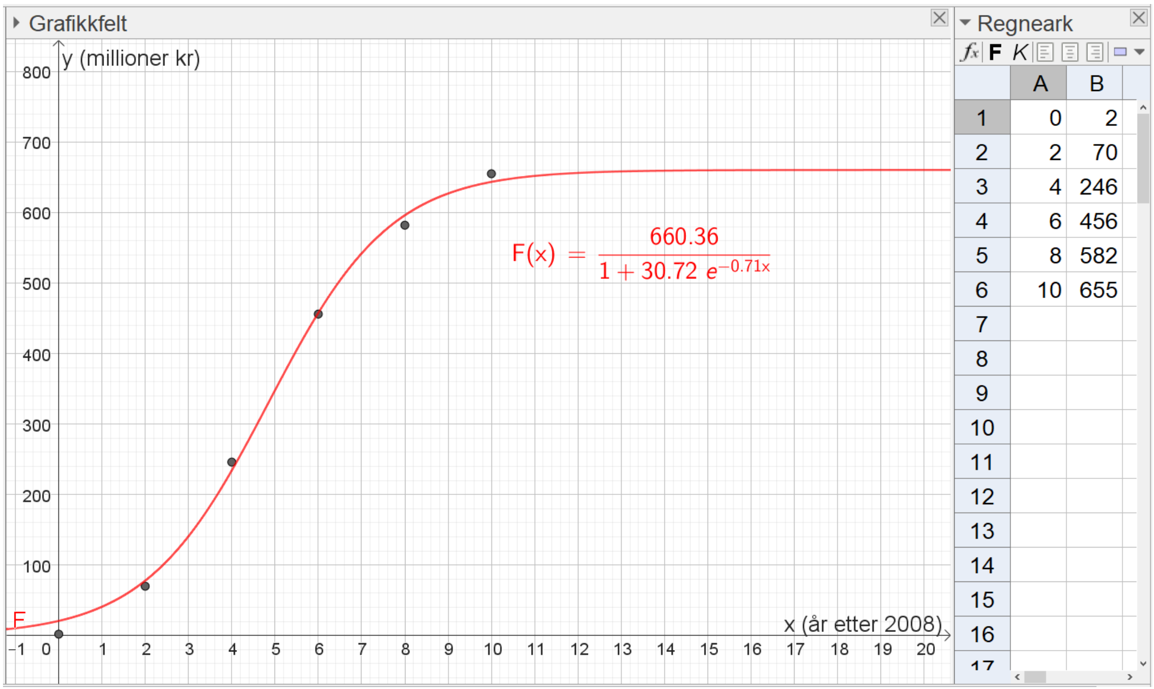
■

Merknad: Dette resultatet med at en grenseverdi kan evalueres fordi den ligger ”skvist” mellom to andre grenseverdier, er kjent i matematikk som ”skvisteoremet” eller ”klemteoremet” (eng.: *the squeeze theorem*).

Del 2

Oppgave 1

a) Oppgaven er løst i GeoGebra:



Jeg la inn dataene i et regneark, markerte de og valgte regresjonsanalyse. Så valgte jeg logistisk modell. Jeg syns denne modellen $F(x)$ passer dataene fint. Modellen får fram den drastiske økningen i starten (strømming av musikk ble etter hvert veldig populært). Vi ser også at modellen flater ut etter hvert, og det kan stemme godt overrens med at det ikke er så mye økning i fortjeneste på strømming etter hvert (fordi ikke så mange nye brukere kommer til).

b) Disse utregningene er gjort i CAS:

CAS

1	I := Integral(F, -0.5, 10.5) ≈ **I := 3728.74**
2	G := 1/5 * Integral(F, 2.5, 7.5) ≈ **G := 344.45**
3	S := Sum(F(i), i, 0, 10) ≈ **S := 3728.82**
4	D = (F(5.001) - F(5)) / (0.001) ≈ **D = 116.31**

Som vi ser av utklippet er

$$I \approx 3728,74 \qquad G \approx 344,45$$
$$S \approx 3728,82 \qquad D \approx 116,31$$

c) I: Dette integralet er arealet under grafen til F fra $x = -0,5$ til $x = 10,5$. Siden $F(x)$ representerer et slags forbruk per år, vil I være en tilnærming til det totale forbruket mellom 2008 og 2018.

G: Her regnes det ut et totalt forbruk over en periode på fem år, for så å dele dette på 5. Størrelsen G representerer derfor en tilnærming til det gjennomsnittlige forbruket fra midten av 2010 til midten av 2015.

S: Her summerer vi det årlige forbruket som modellen beskriver fra og med 2008 til og med 2018.

D: Dette er en tilnærmingsverdi for $F'(5)$, og gir den omtrentlige endringen i forbruk av strømmetjenesten per år i 2013.

Oppgave 2

a) Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [0-1, 1-0, 2-3] = [-1, 1, -1]\,, \quad \overrightarrow{AC} = [2-1, 3-0, 2-3] = [1, 3, -1]$$

og

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right] \\ &= [-1-(-3), -(1-(-1)), -3-1] = [2, -2, -4] = 2 \cdot [1, -1, -2]\end{aligned}$$

En normalvektor for planet α vil være $\overrightarrow{n}_\alpha = [1, -1, -2]$. Siden planene α og β er parallelle, vil de ha parallelle normalvektorer. Vi kan altså sette $\overrightarrow{n}_\beta = \overrightarrow{n}_\beta = [1, -1, -2]$. Siden punktet $P(2, -5, 5)$ ligger i planet β, blir likningen

$$\begin{aligned}&\beta :\ 1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y - (-5)) - 2 \cdot (z-5) = 0 \\ &\beta :\ x - 2 - y - 5 - 2z + 10 = 0 \\ &\underline{\underline{\beta :\ x - y - 2z + 3 = 0}}\end{aligned}$$

b) Siden planene er parallelle og kula tangerer begge planene, må kula ligge mellom planene. Avstanden mellom planene er det samme som kulas diameter. Dette er også avstanden mellom punktene A og Q.
La l være linja gjennom A og Q. En retningsvektor for l er da $\vec{r}_l = \vec{n}_\alpha = [1, -1, -2]$, og en parameterframstilling for l er

$$l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Vi kan finne skjæringspunktet mellom linja l og planet β ved å sette inn for x, y og z i likningen for β:

$$\begin{aligned} x - y - 2z + 3 &= 0 \\ 1 + t - (-t) - 2 \cdot (3 - 2t) + 3 &= 0 \\ 1 + t + t - 6 + 4t + 3 &= 0 \\ 6t &= 2 \\ t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Linja l skjærer altså planet β for $t = \frac{1}{3}$. Setter vi denne verdien inn i parameterframstillingen for l, får vi koordinatene til Q. Koordinatene til Q er $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Oppgave 3

a) Oppgaven er løst i CAS:

CAS

1	$\rightarrow \ \mathbf{r(t) := \left(1 + e^{\frac{t}{20}}, 1 - \sin(t), \frac{1}{10} e^{-2t+2} + \cos(t)\right)}$
2	v(t) := Derivert(r) $\rightarrow \ \mathbf{v(t) := \left(\frac{1}{20} e^{\frac{t}{20}}, -\cos(t), \frac{-1}{5} e^{-2t+2} - \sin(t)\right)}$
3	abs(v(1)) $\approx \ \mathbf{1.17}$
4	f(t) := abs(v) $\approx \ \mathbf{f(t) := 0.05 \sqrt{160 e^{-2t+2} \sin(t) + 16 \left(e^{-2t+2}\right)^2 + \left(e^{0.05t}\right)^2 + 400 \cos^2(t) + 400 \sin^2(t)}}$
5	Ekstremalpunkt(f, 2, 40) $\rightarrow \ \mathbf{(3.54, 1)}$
6	-e^(-2t+2)/5 - sin(t) = 0,t=1 NLøs: $\mathbf{\{t = 3.14\}}$

Jeg definerte vektorfunksjonen $\vec{r}(t)$ i linje 1. Deretter regnet jeg ut fartsvektoren $\vec{v}(t)$ i linje 2, og til slutt fant jeg banefarten etter 1 sekund ved å regne ut lengden av fartsvektoren for $t = 1$ i linje 3. Banefarten er omtrent 1,17 cm/s etter 1 sekund.

b) Denne oppgaven er også løst i CAS. Se utklippet på forrige side.
I linje 4 definerte jeg funksjonen $f(t)$ som representerer banefarten. Det går fram av grafen til f at den har et bunnpunkt. Deretter fant jeg bunnpunktet ved å bruke kommandoen Ekstremalpunkt i linje 5. Banefarten er lavest ved omtrent $t = 3,54$ s.

c) Fartsretningen (fartsvektoren) er parallell med xy-planet dersom z-komponenten til $\vec{v}(t)$ er 0. Likningen $v_z(t) = 0$ er løst i linje 6 i CAS.
Fartsretningen er parallell med xy-planet for omtrent $t = 3,14$ s.

Tilsvarende er fartsretningen parallell med yz-planet dersom x-komponenten til $\vec{v}(t)$ er 0. Siden $v_x(t) = \frac{1}{20} \cdot e^{\frac{t}{20}}$, og denne aldri er null, så er fartsretningen aldri parallell med yz-planet.

Oppgave 4

a) Vi undersøker tilbudene hver for seg.

Tilbud 1: Den rekursive sammenhengen $a_n = a_{n-1} + 10$ sier at det neste leddet er 10 mer enn det foregående. Altså er ukelønna a_n leddene i en aritmetisk følge med differanse $d = 10$.
Det betyr at ukelønna for de fire første ukene i tilbud 1 blir 100 kr, 110 kr, 120 kr og 130 kr.

Tilbud 2: Den rekursive sammenhengen $b_n = b_{n-1} \cdot 1,05$ sier at det neste leddet er 1,05 ganger mer enn det foregående, eventuelt at forholdet mellom to påfølgende ledd er 1,05. Ukelønna b_n er derfor ledd i en geometrisk følge med kvotient $k = 1,05$.
Det betyr at ukelønna for de fire første ukene i tilbud 2 blir 100 kr, $100\,\text{kr} \cdot 1,05 = 105$ kr $105\,\text{kr} \cdot 1,05 = 110,25$ kr og $110,25\,\text{kr} \cdot 1,05 = 115,76$ kr.

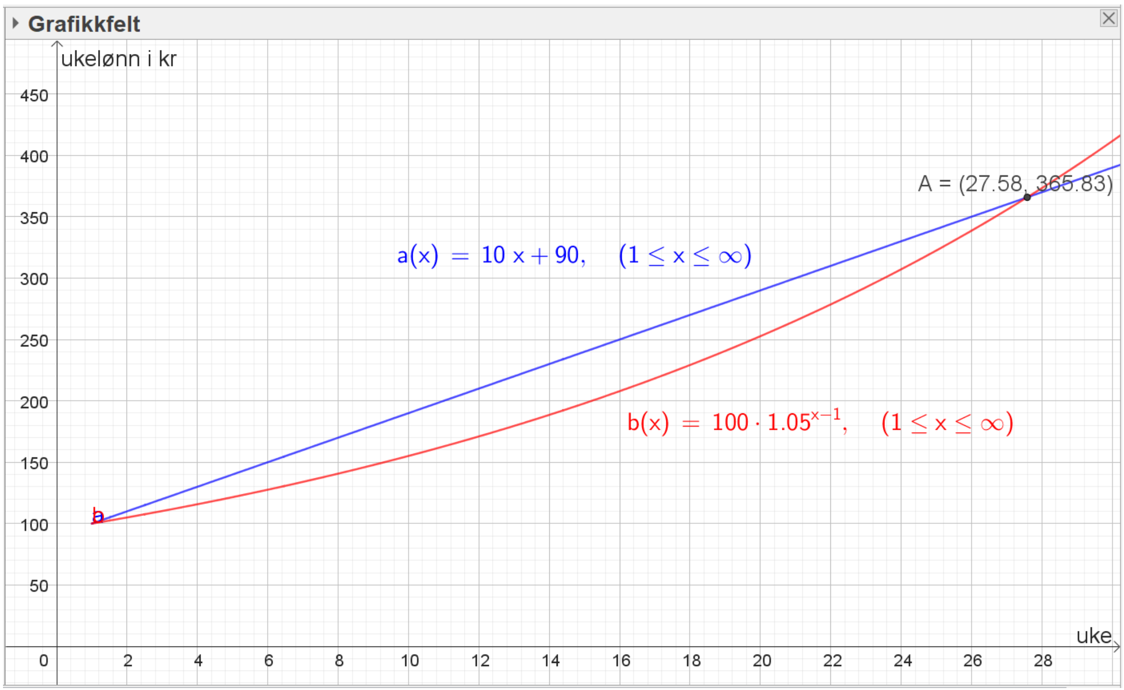
b) Siden ukelønna i tilbud 1 er leddene i en aritmetisk følge med $a_1 = 100$ og $d = 10$, er ukelønna i uke nummer n gitt ved

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 100 + (n-1) \cdot 10 = 10n + 90$$

Siden ukelønna i tilbud 2 er leddene i en geometrisk følge med $b_1 = 100$ og kvotient $k = 1,05$, er ukelønna i uke nummer n gitt ved

$$b_n = b_1 \cdot 1,05^{n-1} = 100 \cdot 1,05^{n-1}$$

Vi ønsker altså å finne ut for hvilken verdi av n vi først har at $b_n > a_n$.
Dette er gjort digitalt i GeoGebra:



Jeg definerte funksjonene $a(x)$ og $b(x)$, som har de samme formlene som henholdsvis a_n og b_n (med x i stedet for n). Så fant jeg skjæringspunktet mellom disse to grafene.
Som vi ser tar det 28 uker før tilbud 2 gir mer ukelønn enn tilbud 1 (medregnet første uke).

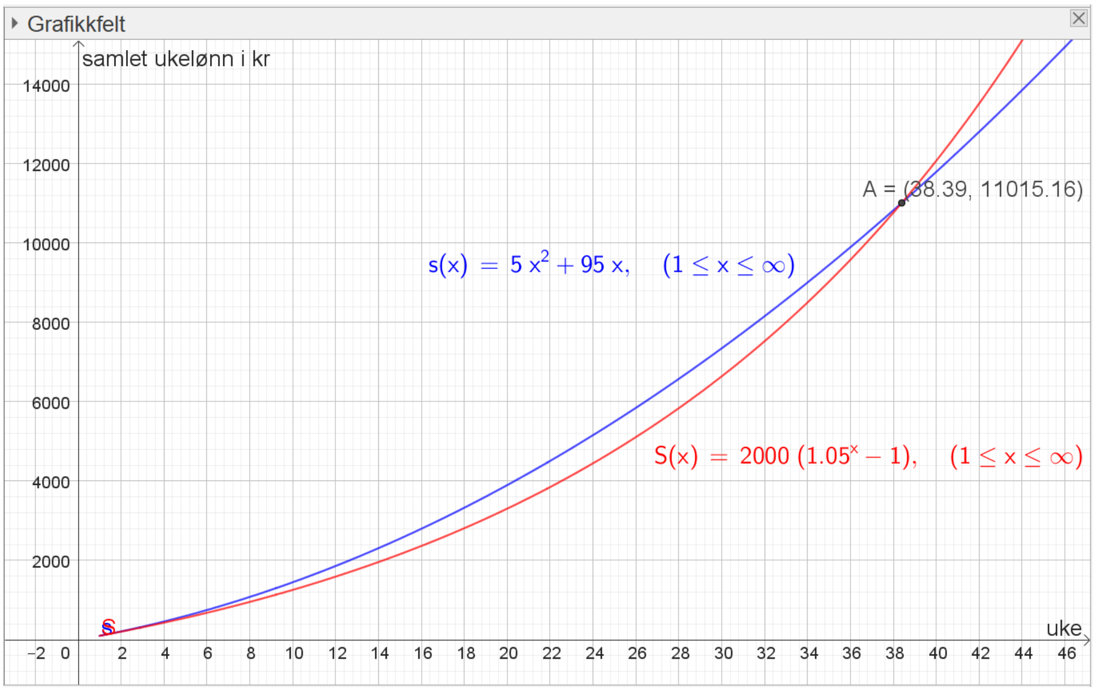
c) Den samlede ukelønna for tilbud 1 er bare summen av alle leddene i en aritmetisk rekke, altså

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{100 + 10n + 90}{2} \cdot n = 5n^2 + 95n$$

Tilsvarende er den samlede ukelønna for tilbud 2 bare summen av alle leddene i en geometrisk rekke, altså

$$S_n = b_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 100 \cdot \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1} = 100 \cdot \frac{1,05^n - 1}{0,05} = 2000 \cdot (1,05^n - 1)$$

Vi ønsker å finne ut for hvilken verdi av n vi først har at $S_n > s_n$.
Dette er gjort digitalt i GeoGebra:



Jeg definerte funksjonene $s(x)$ og $S(x)$, som har de samme formlene som henholdsvis s_n og S_n (med x i stedet for n). Så fant jeg skjæringspunktet mellom disse to grafene.
Som vi ser tar det 39 uker før tilbud 2 gir mer samlet ukelønn enn tilbud 1 (medregnet første uke).

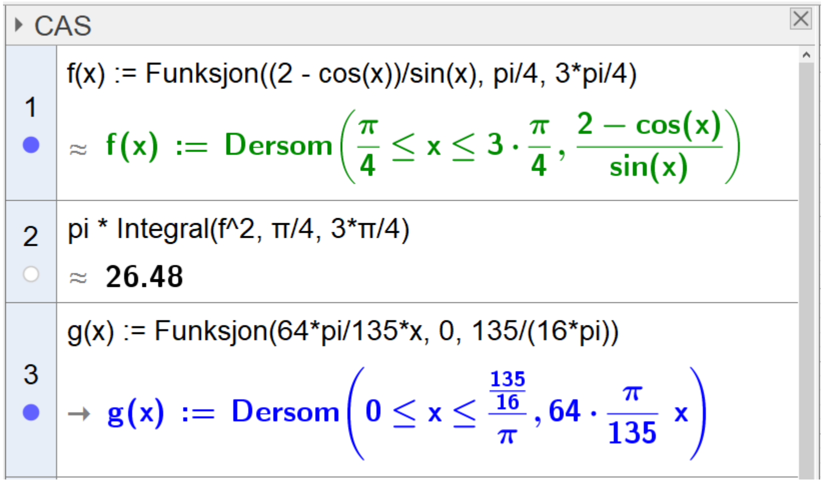
Merknad: Oppgave b og c kan også fint løses med programmering.

Oppgave 5

a) Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

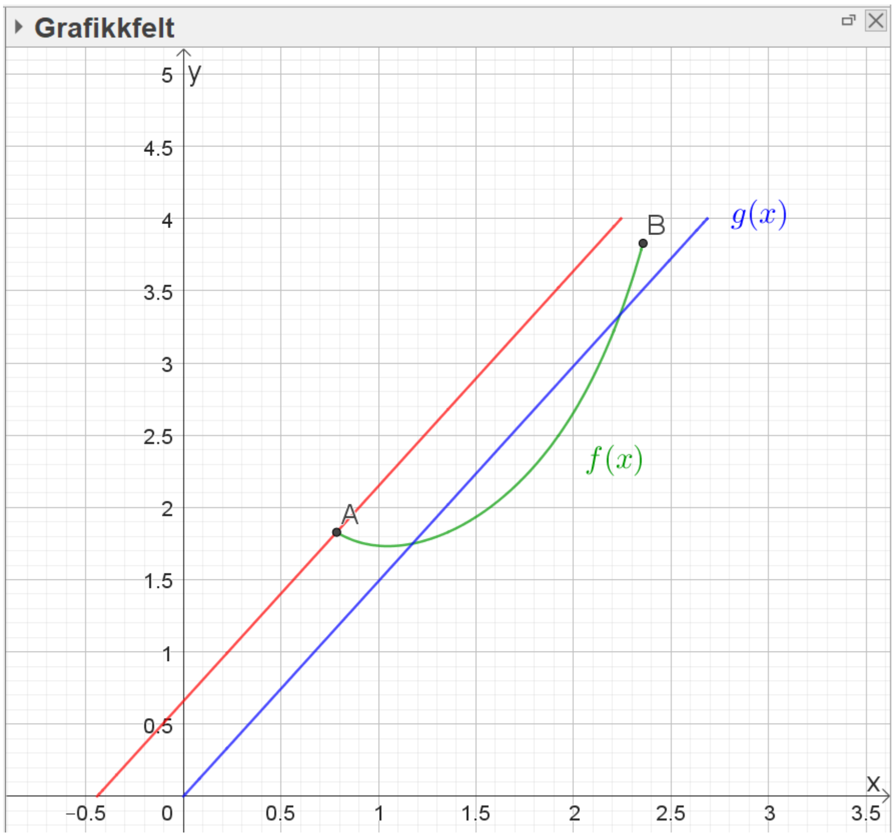
$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

og dette er regnet ut i CAS:



Som vi ser i rad 2 er volumet av omdreiningslegemet omtrent 26,48.

Grafene til f og g i oppgave b:



b) Volumet av en rett kjegle med radius r og høyde h er $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Vi får oppgitt at radien $r = 4$ og volumet $V = 45$. Dette kan vi bruke til å bestemme h:

$$\begin{aligned} 45 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot h \\ h &= \frac{135}{16\pi} \end{aligned}$$

Vi kan nå definere en lineær funksjon $g(x) = ax + b$ som skjærer x-aksen. Hvis vi roterer grafen til g om x-aksen, vil dette omdreiningslegemet bli en rett kjegle. Siden kjegla har radius $r = 4$ og høyde $h = \frac{135}{16\pi}$, må stigningstallet a til funksjonen $g(x)$ bli

$$a = \frac{r}{h} = \frac{4}{\frac{135}{16\pi}} = \frac{64\pi}{135}$$

Merk at høyden h måles bortover x-aksen fordi kjegla ligger. Teknisk sett har det ikke noe å si hvor langs x-aksen vi plasserer kjegla, så jeg velger å legge kjeglas toppunkt i origo. Det gir $g(0) = b = 0$, og vi får at

$$g(x) = \tfrac{64\pi}{135}x, \quad 0 \leq x \leq \tfrac{135}{16\pi}$$

Grafene til f og g er tegnet på forrige side. Den røde grafen er kommentert til slutt.
Vi kan finne den x-verdien der omdreiningslegemet treffer veggen i kjegla ved å løse likningen

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ \frac{64\pi}{135}x &= \frac{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1 \\ x &= \frac{135}{64\pi}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Det som nå er avgjørende for om omdreiningslegemet passer i kjegla, er at omdreiningslegemets høyde $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ er mindre enn den resterende plassen $h - x$ i kjegla. Vi har at

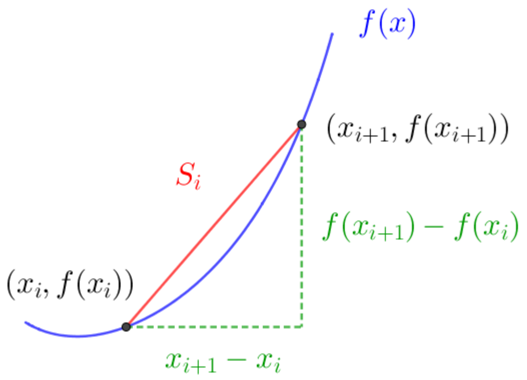
$$h - x = \frac{135}{16\pi} - \frac{135}{64\pi}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 1,46$$

<u>Omdreiningslegemet får derfor ikke plass i kjegla.</u>

Merknad: Den røde grafen er grafen til g flyttet bortover slik at f og g har samme y-verdi når $x = \frac{\pi}{4}$. Den røde grafen viser ganske tydelig at omdreiningslegemet ikke vil passe inne i kjegla. Jeg har utelatt utregningene for hvordan vi får denne grafen, men å vise til den røde grafen (med utregninger av hvordan man fikk den) ville nok også vært en fullgod besvarelse. Grafen er tatt med her for litt visuell hjelp.

Oppgave 6

a) For det rette linjestykket som forbinder punktene $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, har vi at $h = x_{i+1} - x_i$ (forandring i x-verdi), mens $k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ (forandring i y-verdi). Dette er lengdene av henholdsvis horisontal og vertikal stiplet linje i tegningen. Siden trekanten er rettvinklet, gir pytagorassetningen at



$$
\begin{aligned}
S_i^2 &= (x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 \\
S_i^2 &= h^2 + k_i^2 \\
S_i &= \sqrt{h^2 + k_i^2}
\end{aligned}
$$

■

b) Oppgaven er løst med programmering, hvor algoritmen beskrevet i oppgaven er fulgt.

```python
# Importerer kvadrat-funksjonen
from numpy import sqrt

# Definerer funksjonen
def g(x):
    return sqrt(1 - x**2)

# Definerer relevante variabler
a = -1 # startverdi for hele intervallet
b = 1 # sluttverdi for hele intervallet
N = 1000000 # antall delintervaller
h = (b - a) / N # bredden av hvert delintervall
lengde = 0 # variabel som lagrer den totale lengden av grafen

for i in range(N):

    # Utnytter løkkevariabelen "i" til å regne ut x-verdiene
    x = a + i * h
    x_neste = a + (i + 1) * h

    # Beregner lengden av linjestykket i hvert delintervall
    k = g(x_neste) - g(x)
    S = sqrt(h**2 + k**2)

    # Summerer opp til den totale lengden av grafen
    lengde = lengde + S

# Skriver ut lengden av grafen
print(lengde)
```

Programmet gir følgende utskrift for henholdsvis $N = 10\,000$, $N = 100\,000$ og $N = 1\,000\,000$:

```
In [1]: runfile('C
wdir='C:/Users/Kri
3.1415918220397843

In [2]: runfile('C
wdir='C:/Users/Kri
3.1415926272939956

In [3]: runfile('C
wdir='C:/Users/Kri
3.141592652758087
```

Det ser ut til at vi får en tilnærmet verdi for π. Dette gir mening fordi grafen til g er øvre del av enhetssirkelen, som nettopp har buelengden π (dette også antall radianer sirkelbuen spenner over). Svaret virker derfor å være rimelig.

Merknad: Den eksakte verdien av lengden S av grafen kan også regnes ut ved integrasjon, nemlig

$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1^2 + \left(g'(x)\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Å regne dette integralet for hånd krever integrasjonsmetoder som er utenfor pensum i vgs (såkalt omvendt substitusjon/variabelskrifte).