R1 Eksamen V2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

May 29, 2023

Figure 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Metode 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} &= \frac{2^3-8}{2^2-4} = \frac{0}{0} \quad \text{ubestemt form} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(x^2-4\right)'} \quad \text{(L'Hopitals regel)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+0}{2x+0} \\
&= \frac{3\cdot 2^2}{2\cdot 2} = 3
\end{aligned}$$

Metode 2: Vi gjør polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}
&x^3-8 : x^2-4 = x \\
&\underline{-\left(x^3-4x\right)} \\
&\quad -8+4x \\
&x^3-8 = x + \frac{-8+4x}{x^2-4} = x + \frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)} = x + \frac{4}{x+2}
\end{aligned}$$

Så regner vi grenseverdien :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\left(x+\frac{4}{x+2}\right) \\
&= 2 + \frac{4}{2+2} = 3
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

Vi vinner først skalarproduktet:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= [9-4, 4-0] = [5,4] \\ \overrightarrow{BA} &= [1-4, 3-0] = [-3,3] \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= -3\cdot(5) + 3\cdot 4 = -15+12 = -3 \Rightarrow \angle APB > 90^\circ \end{aligned}$$

Siden skalarproduktet er negativt da må vinkelen være større enn 90°.

Generelt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= |\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cdot cos(\theta) \\ cos(0^\circ) &= 1 \\ cos(90^\circ) &= 0 \\ cos(180^\circ) &= -1 \\ cos(270^\circ) &= 0 \\ cos(360^\circ) &= 1 \end{aligned}$$

$\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Vi ser at skalarproduktet og cosinus av vinkelen har samme fortegn.Dermed har vi disse resultatene

$$\begin{aligned} &\theta < 90^\circ \Rightarrow \text{ skalarproduktet er positivt.} \\ &\theta = 90^\circ \Rightarrow \text{skalarproduktet er null.} \\ &\theta > 90^\circ \Rightarrow \text{skalarproduktet er negativt.} \end{aligned}$$

b)

Vi lager en skisse av problemet:

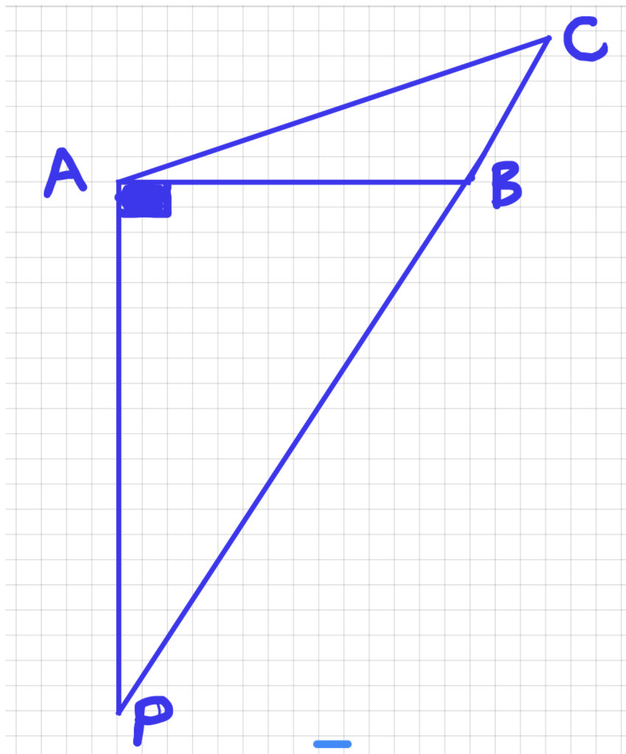

Figure 2

Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AP}$ er vinkelrett på hverandre,så deres skalarprodukt er null,

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = [3, -3]$$
$$P(x, y)$$
$$\overrightarrow{AP} = [x-1, y-3]$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$
$$3(x-1) - 3(y-3) = 0$$
$$3x - 3 - 3y + 9 = 0$$
$$3x - 3y = -6$$
$$x - y = -2$$

Vi finner parameterframstilling for den rettelinjen l som går gjennom punktene B og C ved å bruke $\overrightarrow{BC}$ som retningsvektor og B punkt

$$\overrightarrow{BC} = [5, 4]$$
$$B\,(4, 0)$$
$$l: \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 0 + 4t \end{cases}$$

Punktet P er på linjen og dermed har samme koordinater som parameterframstillingen:

$$x_p = 4 + 5t$$
$$y_p = 4t$$

Vi setter de i ligningen fra skalarprodukt:

$$x - y = -2$$
$$4 + 5t - 4t = -2$$
$$t = -2 - 4 = -6$$
$$x = 4 + 5 \cdot (-6) = -26$$
$$y = 4 \cdot (-6) = -24$$

Koordinatene til punktet P blir $P\,(-26, -24)$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

Eleven lager en funksjon som representerer arealet av rektangelet så regner han arealet for ulike t verdier (t starter fra null og øker med 0,01) og sjekker når arealet begynner å minke (finner toppunktet) via betingelsen som står i while-løkken. Til slutt printer eleven verdien av t.

b)

La R være arealet av rektangelet:

$$
\begin{aligned}
R(t) &= t \cdot f(t) \\
&= t \cdot \left(t^2 - 9\right)^4 \\
R'(t) &= 1 \cdot \left(t^2 - 9\right)^4 + t \cdot 4\left(t^2 - 9\right)^3 \cdot 2t \\
&= \left(t^2 - 9\right)^4 + 8t^2\left(t^2 - 9\right)^3 \\
&= \left(t^2 - 9\right)^3\left(t^2 - 9 + 8t^2\right) \\
&= \left(t^2 - 9\right)^3\left(9t^2 - 9\right) \\
R'(t) &= 0 \Rightarrow \\
\left(t^2 - 9\right)^3 &= 0 \Rightarrow t^2 - 9 = 0 \Rightarrow t = \pm 3 \notin (0, 3) \\
&\quad eller \\
9t^2 - 9 &= 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1
\end{aligned}
$$

Vi godtar bare $t = 1$ som er i definisjonsmengden og studerer fortgenet til den deriverte av R:

$$R'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - 9\right)^3\left(9 \cdot \frac{1}{4} - 9\right) = (-)^3(-) > 0 \tag{1}$$

$$R'(2) = (4 - 9)^3(9 \cdot 4 - 9) = (-5)^3 \cdot (27) < 0 \tag{2}$$

Siden den deriverte endrer fortegn fra positivt før punktet til negativet etter punktet , har R et topppunkt i t=1 og dermed er arealet størst der.

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (8 poeng)

a)

Vi har

Ny Verdi =Gammel Verdi$\cdot vekstfaktor^{antall\ perioder}$
$N = G \cdot V^n$

$V = \left(\frac{N}{G}\right)^{\frac{1}{n}}$
$1 + \frac{P}{100} = \left(\frac{N}{G}\right)^{\frac{1}{n}}$
$p = \left(\left(\frac{N}{G}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot 100$

Vi bruker 2008 som gammel verdi og 2022 som ny verdi og antall år er 15år og løser ligningen i Cas.

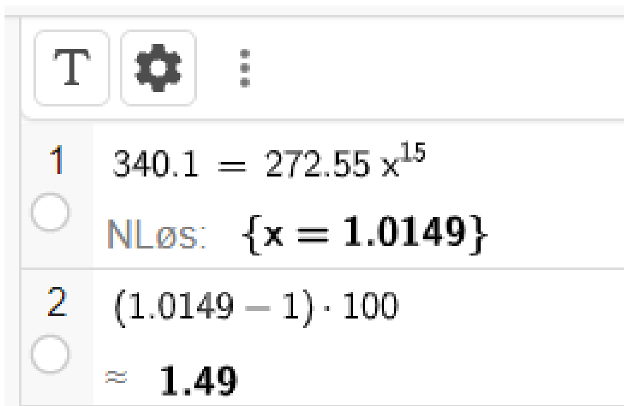

Figure 3

den Den gjennomsnittlige årlige prosentvis vekst blir $1,5\%$.

Om jeg tar hensyn til alle årene så kan jeg regne gjennomsnittlig årlig vekst i Geogebra ved å bruke formelen

$$p = ((\frac{N}{G})^{(1/n)} - 1) \cdot 100$$

:

	A	B	C
1	Årstall	Timelønn	prosentvisøkning (%)
2	0	272.55	
3	2	285.5	2.3481
4	5	307.3	2.4831
5	7	314	1.0843
6	11	327.6	1.0656
7	14	340.1	1.256
8			
9		Gjennomsnitt	1.6474

Figure 4

	A	B	C	D
1	Årstall	Timelønn	prosentvisøkning (%)	
2	0	272.55		
3	2	285.5	((B3 / B2)^(1 / (A3 - A2)) - 1) * 100	
4	5	307.3	((B4 / B3)^(1 / (A4 - A3)) - 1) * 100	
5	7	314	((B5 / B4)^(1 / (A5 - A4)) - 1) * 100	
6	11	327.6	((B6 / B5)^(1 / (A6 - A5)) - 1) * 100	
7	14	340.1	((B7 / B6)^(1 / (A7 - A6)) - 1) * 100	
8				
9		Gjennomsnitt	gsnitt(C3:C7)	

Figure 5: Med formler

Den gjennomsnittlige årlige prosentvis vekst blir $1,65\%$

b)

Vi setter punktene i regneark i Geogebra og lager liste med punkter så bruker vi regresjon (RegEksp()) for finne funksjonen. Se skjermbilder nedenfor.

$l1 = \{A, B, C, D, E, F\}$

$= \{(0, 272.55), (2, 285.5), (5, 307.3), (7, 314), (11, 327.6), (14, 340.1)\}$

$g(x) = \text{RegEksp}(l1)$

$= 277.8327 \cdot 1.0155^x$

Figure 6

Grafen til funksjonen $g(x)$ er vist nedenfor:

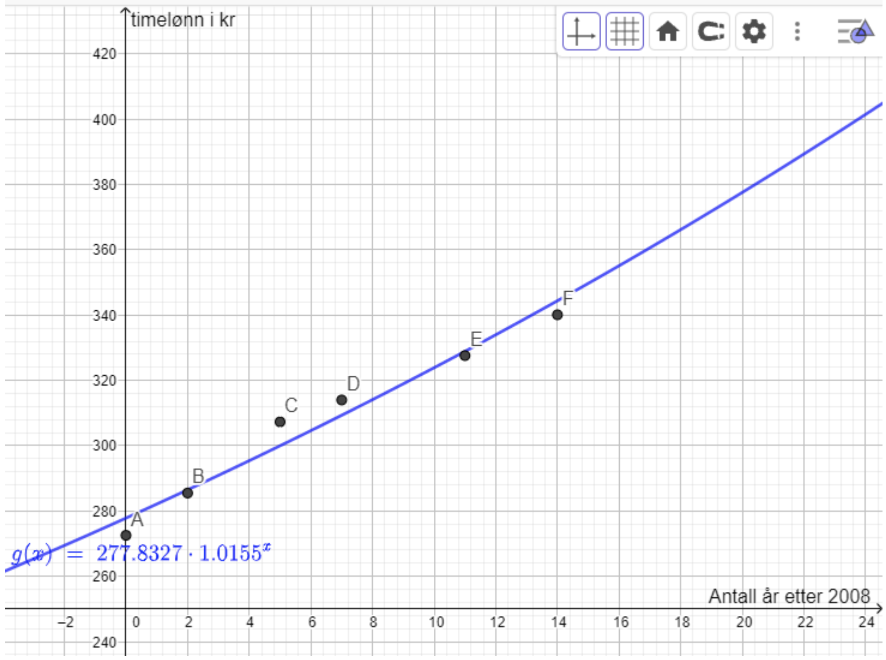

Figure 7

c)

Vi lager en funksjon som gir oss timelønn til Per i årene 2008-2022:

$$g(x) = \text{RegEksp}(l1)$$
$$= 277.8327 \cdot 1.0155^x$$

$$f(x) = 272.55\left(1 + \frac{2.3}{100}\right)^x$$

Figure 8

Så regner vi samlede lønn i Cas vis Sum kommando:

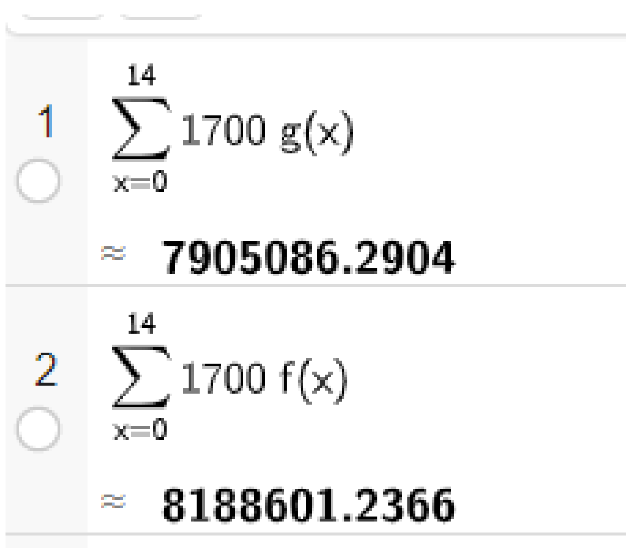

Figure 9

Samlede lønn til Per er $7905086,2904\ kr$ og til Amalie er $8188601,2366\ kr$

c)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven ved å sette prosentvis økning til lønnen til Per som ukjent P

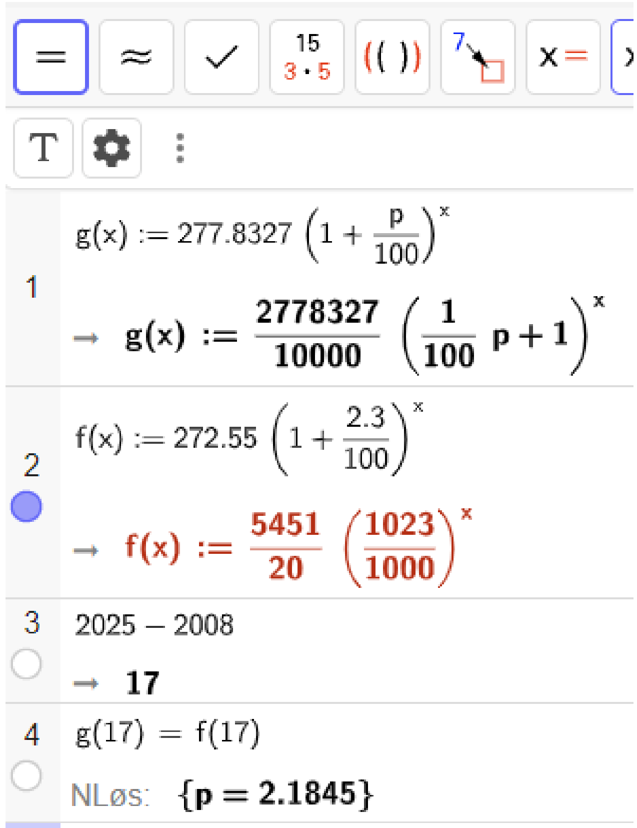

Figure 10

Lønnen til Per må øke med $2,18\%$ hvert år for at begge to skal ha lik timelønn i 2025.

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven. Vi definerer alle punktene og bruker at $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ for å finne koordinatene til B og får $B(7,5)$ (Se rad 7). Vi bruker at $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ for å finne koordinatene til D og får $D(2t+3, 5t+2)$ (Se rad 8). Vi bruker at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i parallellogram for å finne koordinatene til C og får $C(2t+7, 5t+5)$

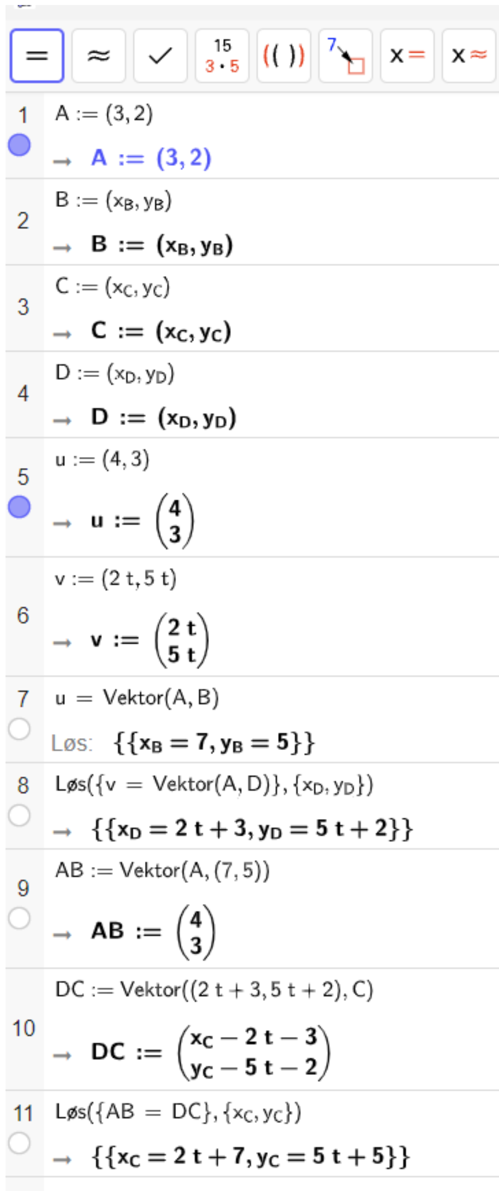

Figure 11

b)

Vi skriver all punktene på nytt i Cas uttrykt ved t så bruker vi at diagonalene i en parallellogram deler hverandre i midten. Vi får at $t = 3$ (rad 10).

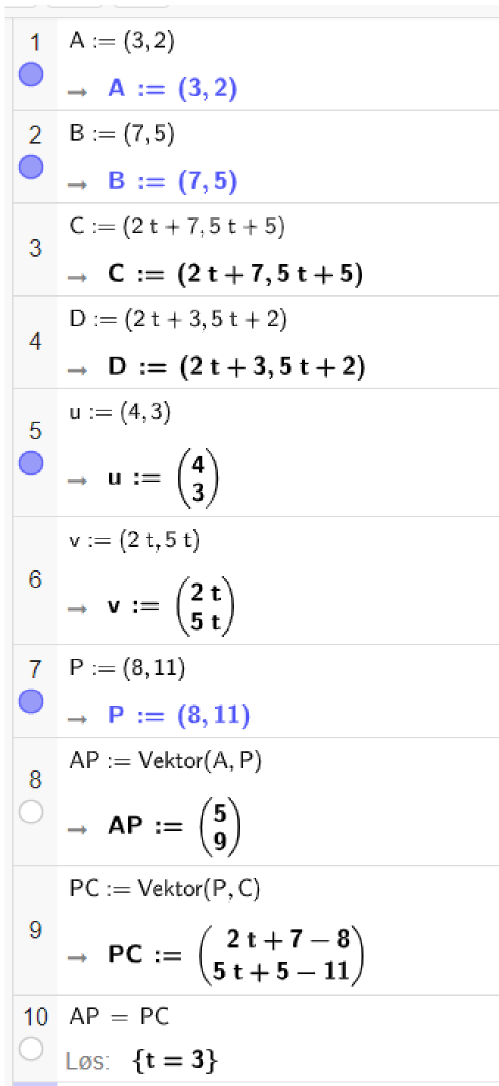

Figure 12

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

Vi tegner begge utrykkene som funksjoner via graftegner i Geogebra og ser at de er bare like to steder så påstanden ikke gjelder for alle $x > 0$ og dermed ikke sann.

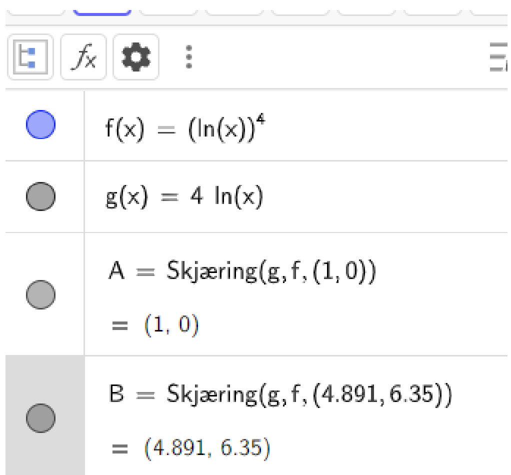

Figure 13

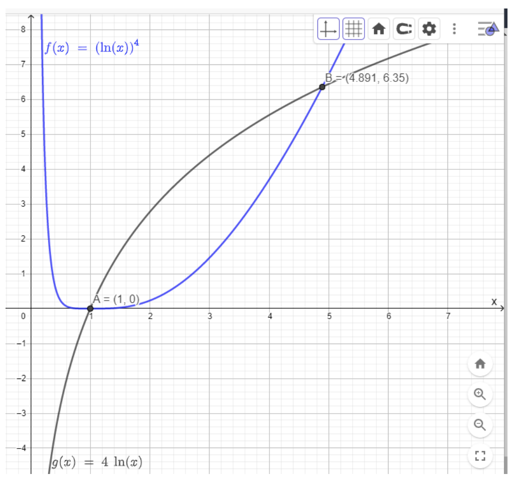

Figure 14

Figure 15

b)

Påstanden er sann. Den generelle formen på fjerde gradsfunksjon er gitt i rad 1. Vi ser at den kan ha maks tre ekstremale punkter fordi den deriverte er tredje gradspolynom. Vi tar det enkleste tilfellet (rad 3) og ser at det er likevel et ekstremalpunkt fordi den deriverte skifter fortegn.

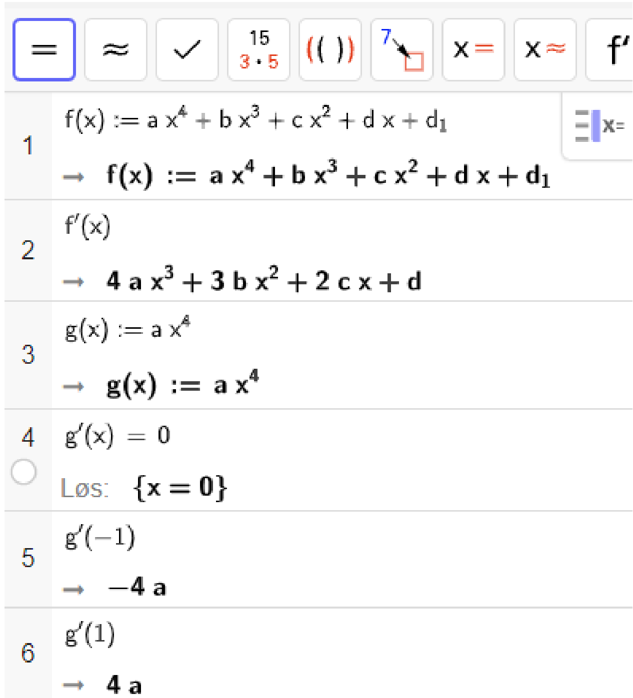

Figure 16

c)

Påstanden er usann. Riktig setning blir "For at en funksjon skal ha invers må den være én-entydig (Hver verdi for x må gi kun én verdi for y og motsatt ,med andre ord må vi ha én-til-én korrespondanse). Men hvis en funksjon er enten strengt voksende eller strengt avtagende da er betingelsen oppfylt. Mot eksempel:

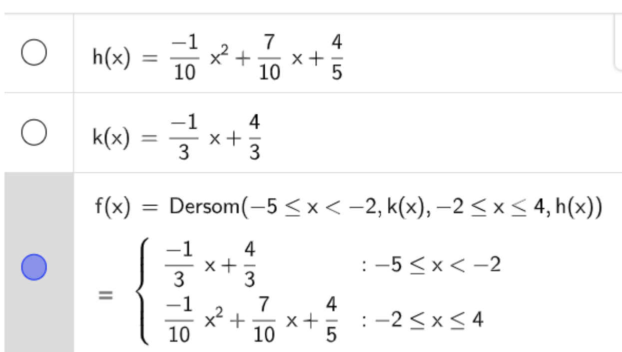

Figure 17

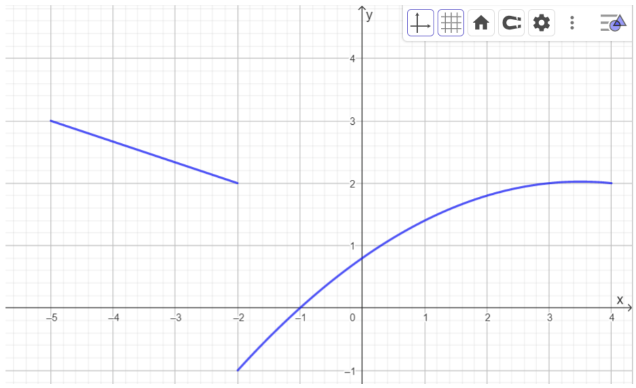

Figure 18

Funksjonen f som er vist ovenfor er både voksende og avtagende i defimnisjonsmengden som er $[-5, 4]$ men likevel har invers.

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

Funksjon f har ikke omvendt fordi den er ikke én-entydig . For eksempel når $y = 1$ så får vi to forskjellige x-verdier (x=1 og x=-1).
Funksjon g har omvendt fordi den er strengt voksende i hele definisjonsmengden $[-4, 4]$.
Funksjon h er funksjon med delt funksjonsutrykk og har omvendt fordi den er én-entydig i hele definisjonsmengden $[-5, 4]$.
Funksjon k har omvendt fordi den er én-entydig i hele definisjonsmengden $[-4, 4)$.Vi ser at den er strengt avtagende i hele definisjonsmengden som igjen bekrefter det.

b)

Definisjonsmengden til en invers av en funksjon er verdimengden til opprinnelig funksjon. Ved å bruke dette kan vi finne definisjonsmengde til omvendfunklsjonene fra grafene

f:Har ikke invers men den kan få invers om vi begrenser definisjonsmengden til f til $[-\infty,)$ eller til $[0, \infty)$, da blir definisjonsmengden til omvendt $[0, \infty)$ i begge tilfellene

Definisjonsmengdene til resten er:

$$\begin{aligned} &g : [1, 6] \\ &h : [-1, 2] \cup (2, 3] = [-1, 3] \\ &k : (-1, 3] \end{aligned}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

a)

Vi bruker Cas og finner at lydintensiteten blir $10 \frac{W}{m^2}$ (Se rad 3).

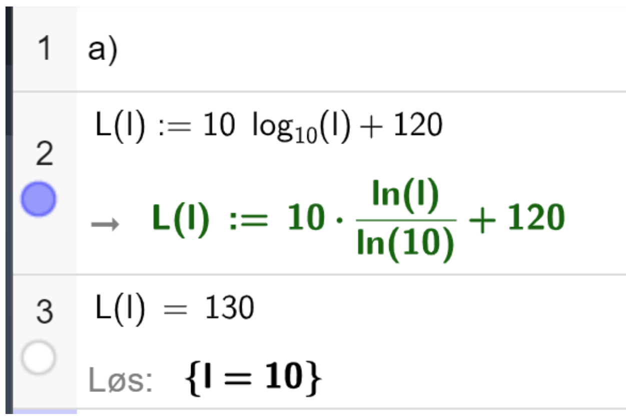

Figure 19

b)

Vi lar L_1, L_2 være lydstyrkene når lydinensitetene er l_1, l_2 så løser vi ligningen $L_2 - L_1 = 2$ for l_2 (rad 7) og får at $l_2 = \sqrt[5]{10} \cdot l_1$. Fra dette finner vi økning i prosent p (rad 8). Lyd intensiteten øker 58,5% når lydstyrken øker med 2 db

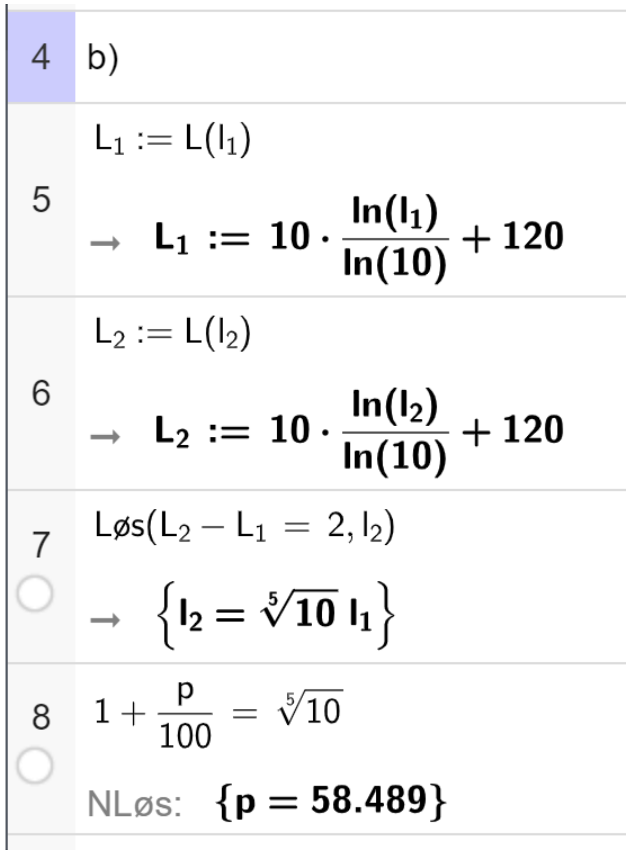

Figure 20

c)

Første finner vi effekten av lydkilden (rad 11) så finner vi ut hva blir lydintensiteten når lydstyrken er mindre enn 130 dB (rad 12) . Så bytter vi lydstyrken med formlen som inneholder effekt og løser ulikheten for r (rad 13)

9 c)

10 $L(l) = 140$

Løs: $\{l = 100\}$

11 $100 = \dfrac{E}{4\,\pi \cdot 50^2}$

Løs: $\{E = 1000000\,\pi\}$

12 $L(l) < 130$

Løs: $\{0 < l < 10\}$

13 $0 < \dfrac{1000000\,\pi}{4\,\pi\,r^2} < 10$

Løs: $\left\{r < -50\sqrt{10}, r > 50\sqrt{10}\right\}$

14 $13

$\approx \{r < -158.114, r > 158.114\}$

Figure 21

Vi dropper den negative løsningen og får at avstanden må være minst 185,114 m for at lydstyrken skal være mindre enn 130 dB.

Oppgave 6 (4 poeng)

a)

Vi bruker Cas og kommando Avstand(punkt,objekt) og får at minste avstand blir $18 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}$ (rad 6)

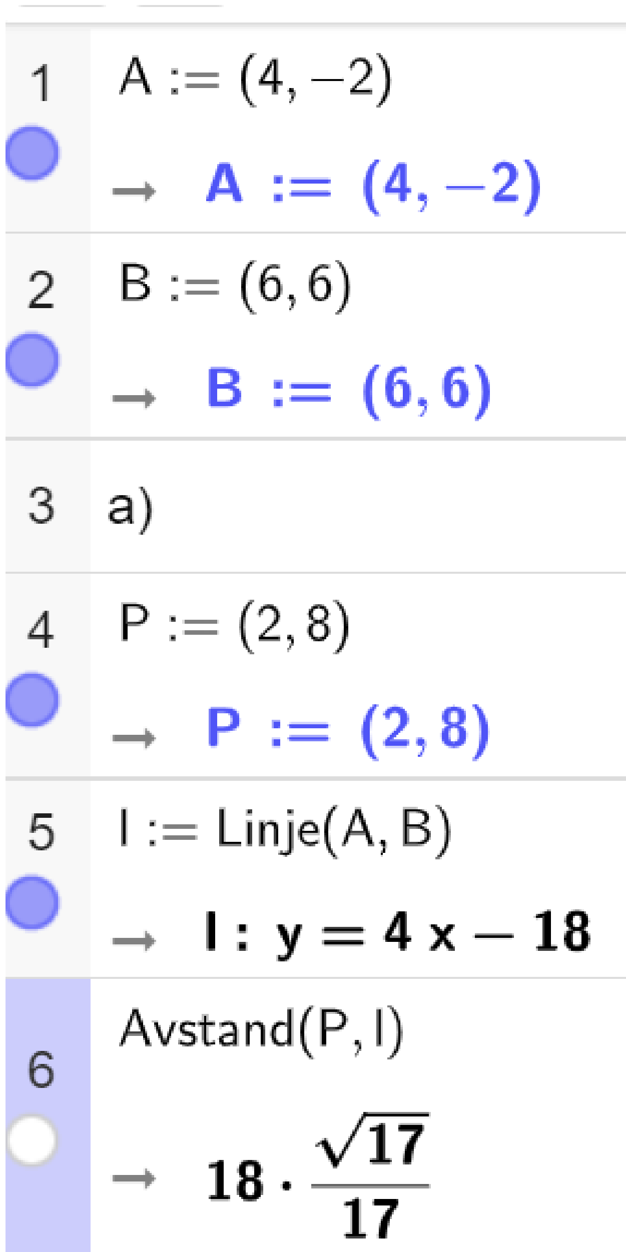

Figure 22

Metode 2:
Man kan også løse oppgaven ved å lage en vektor mellom punktet P og et generelt punkt på linjen l (rad 13) så lage en avstand funksjon H (rad 14) og finne ekstremalpunkter(rad 15) og bekrefte at det er et bunnpunkt siden den deriverte skifter fortegn fra negativt til positivt (rad 16). Minste avstand blir $18 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17}$ (rad 17).

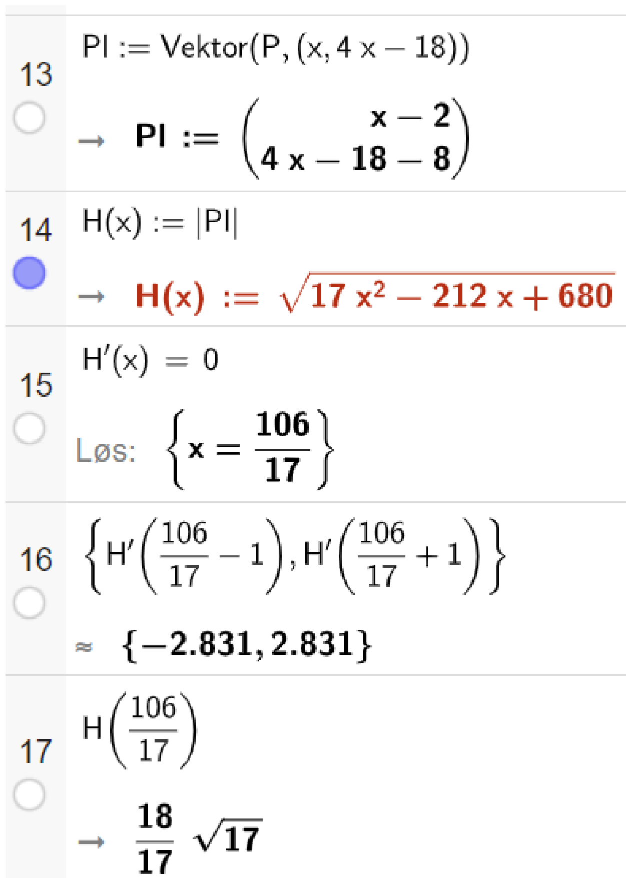

Figure 23

b)

Vi bruker Cas ved å skrive funksjonen f. Så lage en avstand funksjon (rad 9) ved å bruke kommando Avstand(punkt,objekt) der punkt er et generelt punkt $(x, f(x)$ på grafen til f . Vi finner ekstremalpunkter til $h(x)$ (rad 10) og bekrefter at det er et bunnpunkt (rad 11) siden den deriverte skifter fortegn fra negativt til positivt. Minste avstanden mellom grafen og linjen er $\sqrt{17}$ (rad 9).

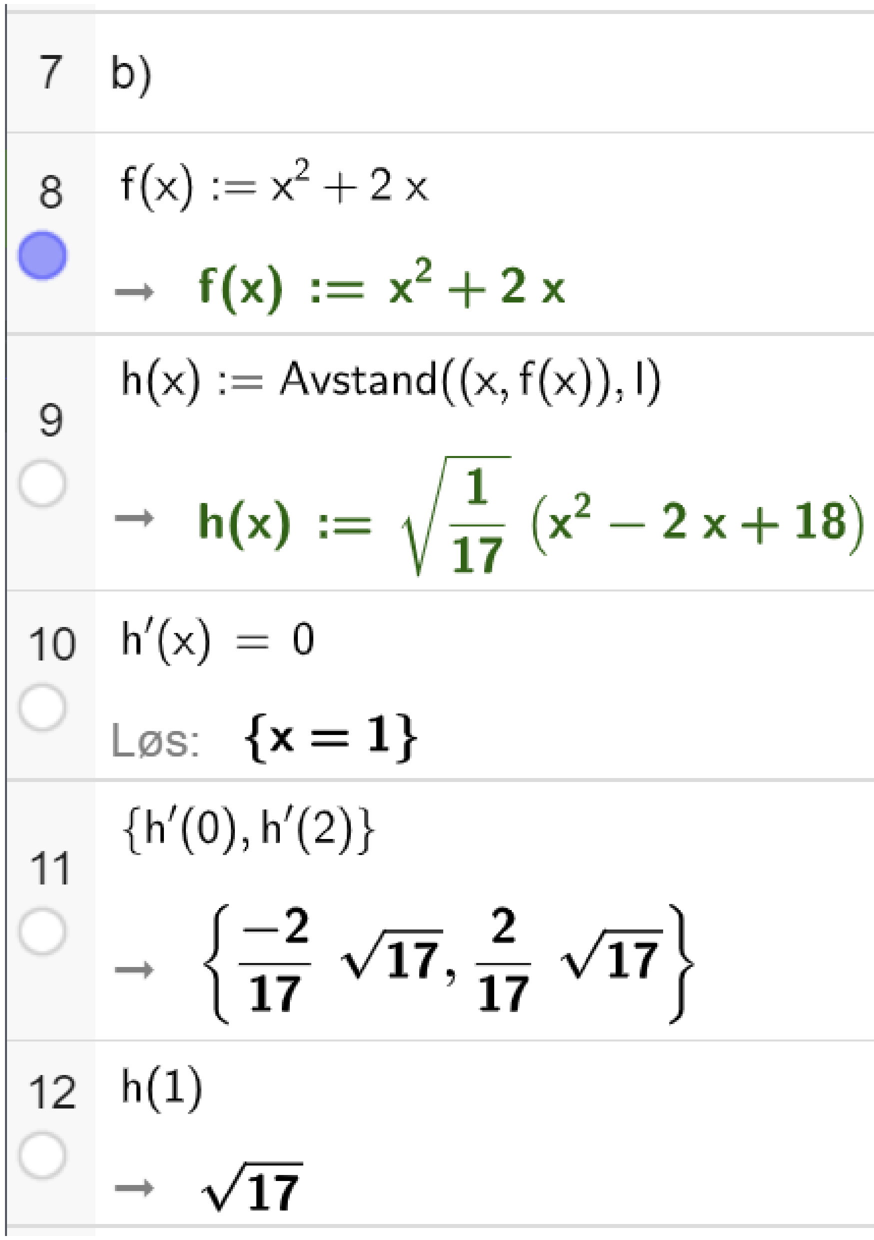

Figure 24

Oppgave 7 (4 poeng)

Vi bruker Python programmering for å løse oppgaven:

```
import numpy as np               # hente numpy bibliotek
def f(x):                        # Definere funksjonen f
    return np.sqrt(x)
def GjennomsnittFunksjon(a,b,N): # Lage en funksjon med input
                                 #som intervalgrensene og antall punkter
    n=np.linspace(a,b,N+1)       # Lage N+1 jevnt fordelt punkter i intervallet [a,b]
    g=np.mean(f(n))              # regne gjennomsnitt ved å bruke mean kommando fra numpy
    return g
print("Gjennomsnittet av funskjnen f i intervallet [0,1] blir:",GjennomsnittFunksjon(0,1,10000))# Kjøre funksjonen og

                                                                                                  #printe ut gjennomsnitt

```

```
Gjennomsnittet av funskjnen f i intervallet [0,1] blir : 0.6666497942176867
```

Figure 25

Gjennomsnittet av funksjonen f i intervallet [0,1] blir $0,666$