S1 Eksamen V2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

May 31, 2023

Figure 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

$$\begin{aligned}\frac{\left(2ab^{-1}\right)^3\cdot\left(a^2b^{-2}\right)^{-1}}{4a^2b^{-3}} &= \frac{2^3\cdot a^3\cdot\left(b^{-1}\right)^3\cdot\left(a^2\right)^{-1}\cdot\left(b^{-2}\right)^{-1}}{4\cdot a^2\cdot b^{-3}}\\ &= \frac{8\cdot a^3\cdot b^{-3}\cdot a^{-2}\cdot b^2}{4\cdot a^2\cdot b^{-3}}\\ &= 2a^{-1}b^2 = \frac{2b^2}{a}\end{aligned}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= x\cdot lnx\\ f'\left(x\right) &= 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\\ &= \ln x + 1\end{aligned}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

Metode 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} &= \frac{2^3-8}{2^2-4} = \frac{0}{0} \quad \text{ubestemt form}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(x^2-4\right)'} \quad \text{(L'Hopitals regel)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+0}{2x+0}\\ &= \frac{3\cdot 2^2}{2\cdot 2} = 3\end{aligned}$$

Metode 2: Vi gjør polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}&x^3-8 : x^2-4 = x\\ &\underline{-\left(x^3-4x\right)}\\ &\quad -8+4x\\ &x^3-8 = x+\frac{-8+4x}{x^2-4} = x+\frac{4\left(x-2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)} = x+\frac{4}{x+2}\end{aligned}$$

Så regner vi grenseverdien :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\left(x+\frac{4}{x+2}\right)\\ &= 2+\frac{4}{2+2}=3\end{aligned}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

Dette er hypergeometrisk fordeling. Vi lar X være antall svarte kuler som trekkes og m er antall svarte kuler og r totalt antall kuler som trekkes og n er total antall kuler

$$P\left(X=k\right)=\frac{\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n-m\\r-k\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}n\\r\end{pmatrix}}$$

$$n=7, m=3, r=3, k=2$$

$$\begin{aligned}P\left(X=2\right)&=\frac{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}=\frac{\frac{3!}{(3-2)!2!}\cdot\frac{4!}{(4-1)!\cdot 1!}}{\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}}\\ &=\frac{\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{3!}}{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}=\frac{4!}{2!}\cdot\frac{4!\cdot 3!}{7!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}\\ &=\frac{4\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}=0,343=34,3\%\end{aligned}$$

Det er $34,3\%$ sannsynlighet for at to av de tre trukne kulene er svarte.

Metode 2: La h representere hvite kuler og s svarte kuler:

$$\begin{aligned}P(2s)=P(ssh)+P(shs)+P(hss)&=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\\ &=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{12}{35}\end{aligned}$$

b)

P(minst to hvite kuler) =P(2 hvite og 1 svart) + P (3 hvite kuler og 0 svarte kuler) = P(én eller ingen svarte kuler) = $P(X = 0) + P(X = 1)$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= (X = 0) + P(X = 1) \\
&= \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1 \cdot \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{71.}{4! \cdot 3!}} \\
&= \frac{\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{4 + 18}{7 \cdot 5} = \frac{22}{35} = 0,629 = 62,9\%
\end{aligned}
$$

Det er 62, 9% sannsynlighet for å trekke minst to hvite kuler.

Metode 2: La h representere hvite kuler og s svarte kuler:

$$
\begin{aligned}
P(3h) &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35} \\
P(2h\,og\,1s) &= p(shh) + p(hsh) + p(hhs) \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{18}{35} \\
p(2h) &= P(2h\,og\,1s) + P(3h\,og\,0s) \\
&= \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35} = 0,629
\end{aligned}
$$

Oppgave 5 (2 poeng)

a)

Når programmet kjøres regnes det når den deriverte av K (som er vist i while-løkke betingelsen) blir 260.

Vi regner x algebraisk:

$$\begin{aligned} K(x) &= 0,2x^2 + 140x + 7000 \\ K'(x) &= 0,4x + 140 \\ K'(x) &= 260 \\ 0,4x + 140 &= 260 \\ 0,4x &= 120 \\ x &= \frac{120}{0,4} = \frac{1200}{4} = 300 \end{aligned}$$

Resultatet blir $x = 300$. Kostnaden øker med 260 kr per enhet per uke i det bedriften produsere akkurat 300 enheter per uke.

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (8 poeng)

a)

Vi har

Ny Verdi =Gammel Verdi·Vekstfaktor$^{antall\ perioder}$
$N = G \cdot V^n$
$V = \left(\frac{N}{G}\right)^{\frac{1}{n}}$
$1 + \frac{P}{100} = (\frac{N}{G})^{\frac{1}{n}}$
$p = \left(\left(\frac{N}{G}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot 100$

Vi bruker 2008 som gammel verdi og 2022 som ny verdi og antall år er 15år og løser ligningen i Cas.

1 $340.1 = 272.55\, x^{15}$

NLøs: $\{x = 1.0149\}$

2 $(1.0149 - 1) \cdot 100$

$\approx$ **1.49**

Figure 2

den Den gjennomsnittlige årlige prosentvis vekst blir $1,5\%$.

Om jeg tar hensyn til alle årene så kan jeg regne gjennomsnittlig årlig vekst i Geogebra ved å bruke formelen

$$p = \left(\left(\frac{N}{G}\right)^{(1/n)} - 1\right) \cdot 100$$

:

	A	B	C
1	Årstall	Timelønn	prosentvisøkning (%)
2	0	272.55	
3	2	285.5	2.3481
4	5	307.3	2.4831
5	7	314	1.0843
6	11	327.6	1.0656
7	14	340.1	1.256
8			
9		Gjennomsnitt	1.6474

Figure 3

	A	B	C	D
1	Årstall	Timelønn	prosentvisøkning (%)	
2	0	272.55		
3	2	285.5	((B3 / B2)^(1 / (A3 - A2)) - 1) * 100	
4	5	307.3	((B4 / B3)^(1 / (A4 - A3)) - 1) * 100	
5	7	314	((B5 / B4)^(1 / (A5 - A4)) - 1) * 100	
6	11	327.6	((B6 / B5)^(1 / (A6 - A5)) - 1) * 100	
7	14	340.1	((B7 / B6)^(1 / (A7 - A6)) - 1) * 100	
8				
9		Gjennomsnitt	gsnitt(C3:C7)	

Figure 4: Med formler

Den gjennomsnittlige årlige prosentvis vekst blir $1,65\%$

b)

Vi setter punktene i regneark i Geogebra og lager liste med punkter så bruker vi regresjon (RegEksp()) for finne funksjonen. Se skjermbilder nedenfor.

l1 = {A, B, C, D, E, F}
= {(0, 272.55), (2, 285.5), (5, 307.3), (7, 314), (11, 327.6), (14, 340.1)}

g(x) = RegEksp(l1)
= $277.8327 \cdot 1.0155^{x}$

Figure 5

Grafen til funksjonen $g(x)$ er vist nedenfor:

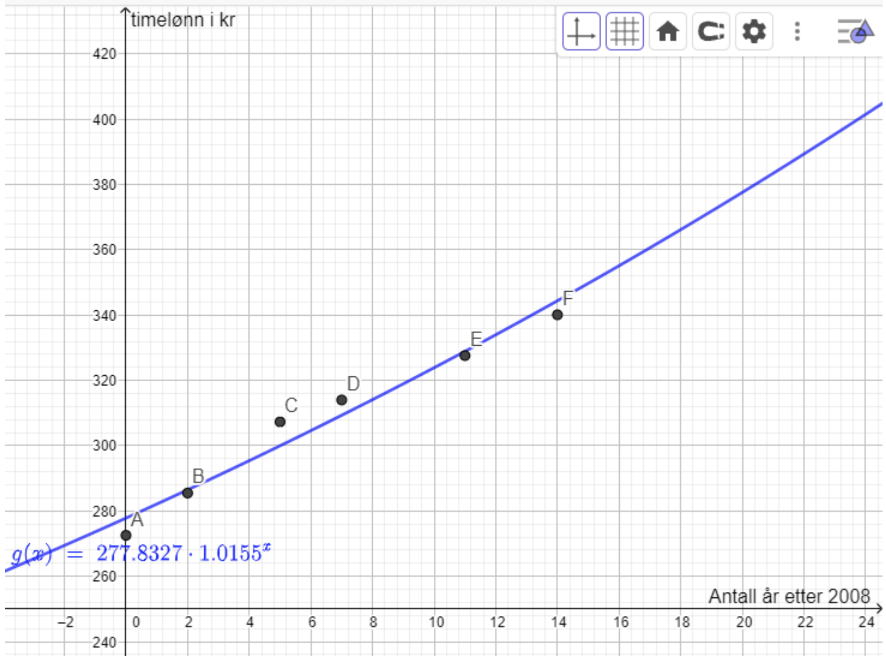

Figure 6

c)

Vi lager en funksjon som gir oss timelønn til Per i årene 2008-2022:

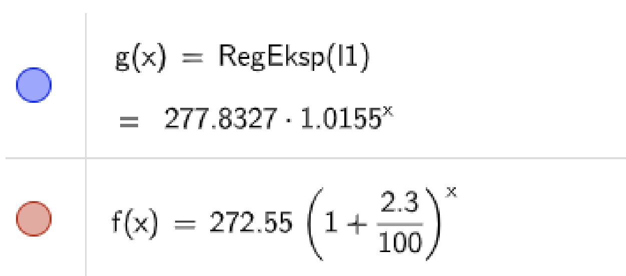

Figure 7

Så regner vi samlede lønn i Cas vis Sum kommando:

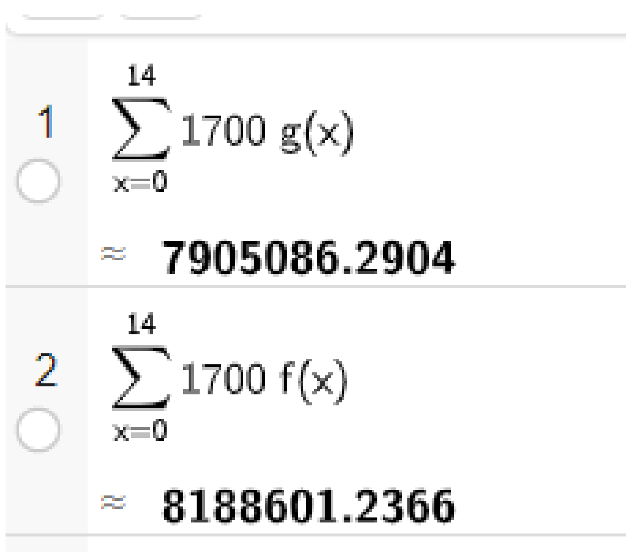

Figure 8

Samlede lønn til Per er $7905086,2904$ kr og til Amalie er $8188601,2366$ kr

c)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven ved å sette prosentvis økning til lønnen til Per som ukjent P

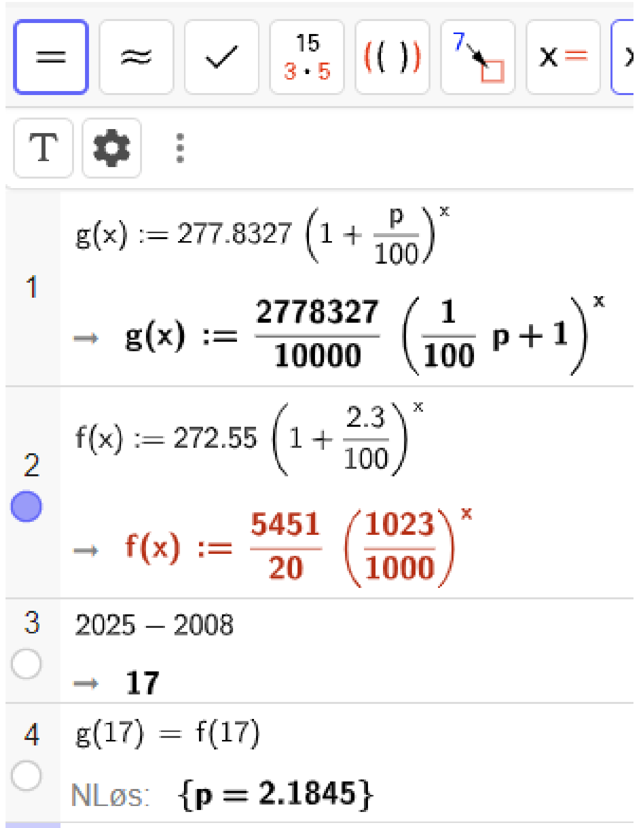

Figure 9

Lønnen til Per må øke med $2,18\%$ hvert år for at begge to skal ha lik timelønn i 2025.

Oppgave 2 (6 poeng)

a)

Vi tegner begge utrykkene som funksjoner via graftegner i Geogebra og ser at de er bare like to steder så påstanden ikke gjelder for alle $x > 0$ og dermed ikke sann.

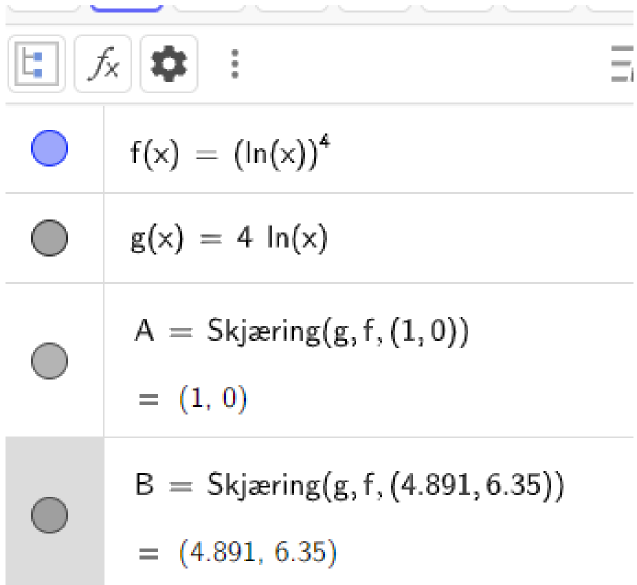

Figure 10

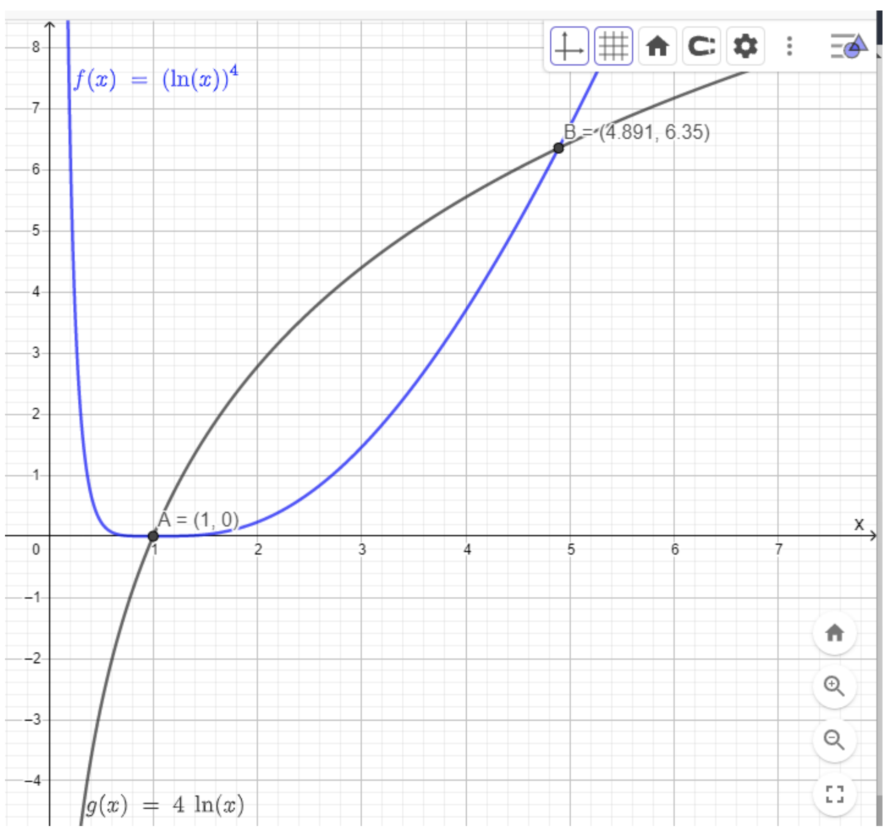

Figure 11

b)

Påstanden er sann. Den generelle formen på fjerde gradsfunksjon er gitt i rad 1. Vi ser at den kan ha maks tre ekstremale punkter fordi den deriverte er tredje gradspolynom. Vi tar det enkleste tilfellet (rad 3) og ser at det er likevel et ekstremalpunkt fordi den deriverte skifter fortegn.

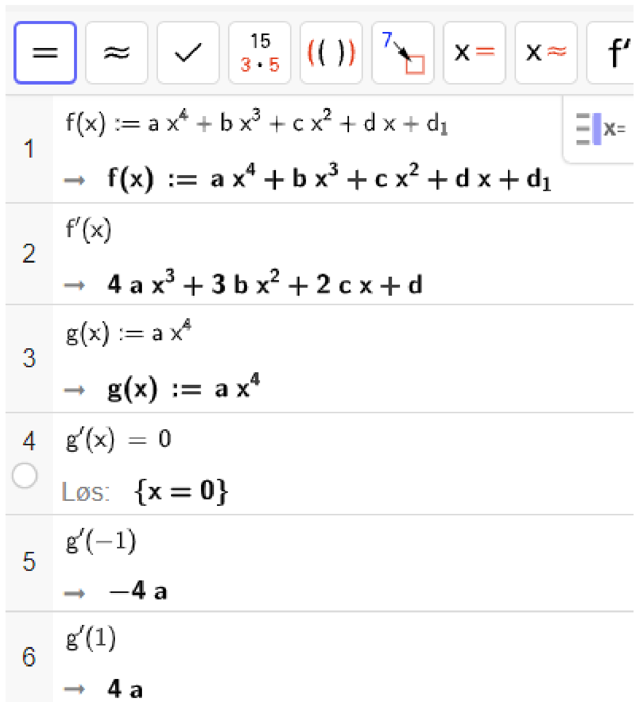

Figure 12

c)

Påstanden er sann. Dette er hypergeometrisk forsøk siden det er to grupper (mindre enn 18 (m=17) og større enn eller lik 18 (n-m=34-17=17) og trekningen er uten tilbakelegging. vider er X antall trekk fra gruppen som er mindre enn 18 og k er hvor mange tall som er mindre enn 18 blir trukket ut.

$$P\left(X=k\right)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

$$n=34, m=17, r=7$$

Sannsynligheten for at all de 7 tallene er mindre enn 18 blir $P\left(X=7\right)$. Vi regner den via sannsynlighetskalkulator i geogebra:

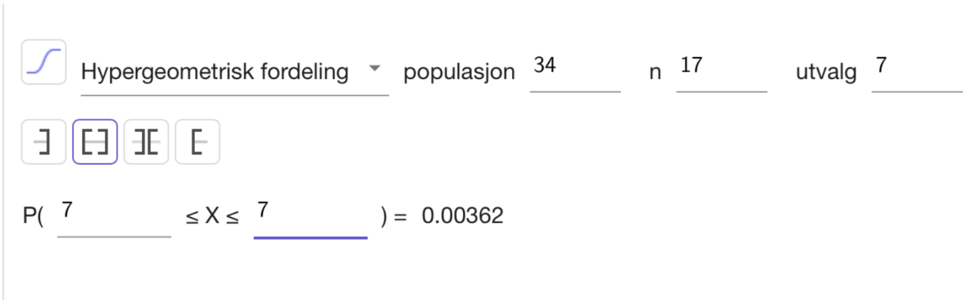

Figure 13

Sannsynligheten for at ingen av de 7 tallene er mindre enn 18 blir $P\left(X=0\right)$. Vi regner den via sannsynlighetskalkulator i geogebra: Vi regner $P\left(X=0\right)$ via sannsynlighetskalkulator i geogebra:

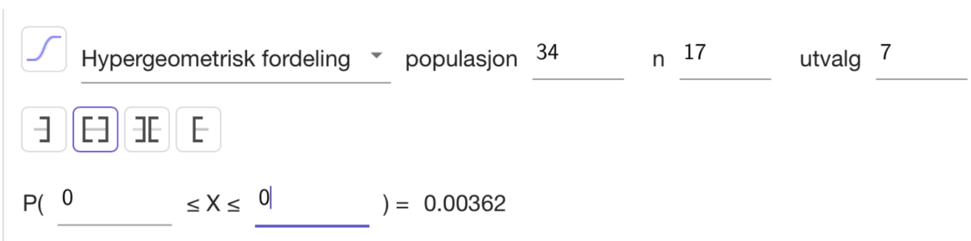

Figure 14

Vi ser at begge to er like.

OBS!:

Om man regner null som et naturlig tall blir antall tall som er mindre enn 18, 18 tall og da blir $P(X=7)=0.00592$ og $P(X=0)=0.00213$ og da blir påstanden usann.

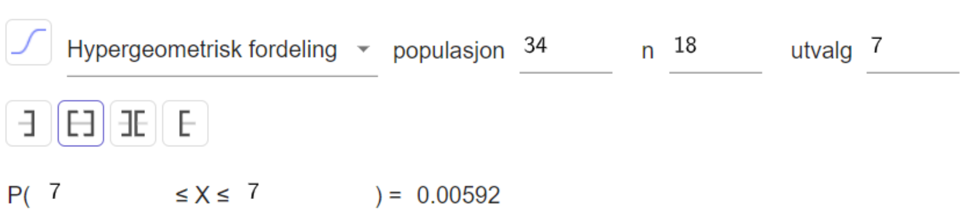

Figure 15

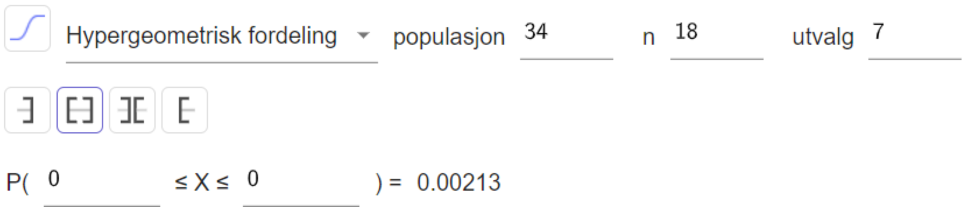

Figure 16

Oppgave 3(4 poeng)

a)

Mona regner ut sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger blir er større eller lik 8 (med andre ord) 8, 9, 10, 11 eller 12). Hun teller antall gunstige utfall via betingelsen i if setning (i + j >= 8) og deler det på antall mulige utfall (6*6 = 36), der hver terning har 6 mulige øyne.

```
In [4]:
g=0
for i in range(1, 7):
    for j in range(1, 7):
        if i+j >= 8:
            g = g + 1
print(g/36)

0.4166666666666667
```

Figure 17

Sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger blir er større eller lik 8 $= 0,417 = 41,7\%$

b)

Vi foreslår dette programmet for å regne sannsynligheten for at summen av øynene på tre terninger blir 7 eller 11:

```
g = 0
for i in range(1, 7):
    for j in range(1, 7):
        for k in range(1, 7):
            if i + j + k == 7 or i + j + k == 11:
                g = g + 1
print(g / (6*6*6))
```

```
0.19444444444444445
```

Figure 18

Vi kjører koden og får at Sannsynligheten for at summen av øynene på to terninger blir er større eller lik $8 = 0,195 = 19,5\%$

Oppgave 4 (6 poeng)

a)

Vi finner funksjon $e(p)$ til den rette linjen som er vist på figuren (rad 1,2,3) så finner vi inntekt funksjon ved å gange prisen med antall produserte enheter (rad 4) så finner vi inntekten når prisen er 40 kr og får at de daglige inntektene blir $84000\,kr$ (rad 5).

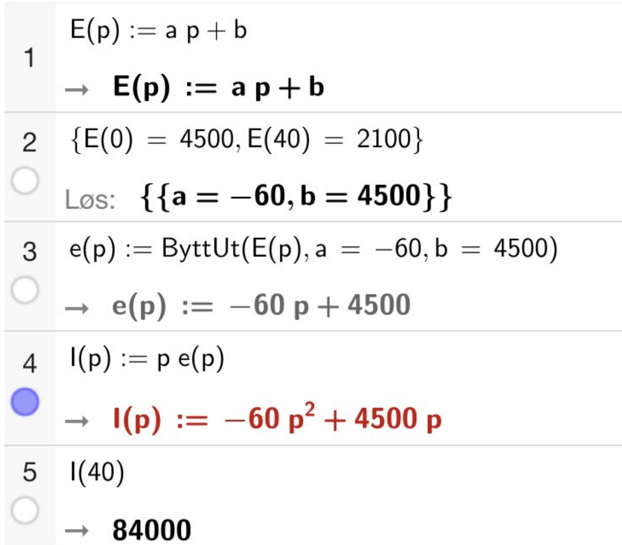

Figure 19

b)

Vi løser ligningen $I(p) = 75000$ i Cas og får at prisen blir $p = 20\, eller\, p = 50$ (rad 6).

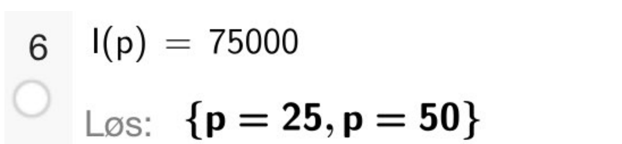

Figure 20

c)

Vi løser oppgaven via CAS. Vi deriver inntektfunksjon og finner ut når den er lik null (rad 7).Vi bekrefter at dette er toppunkt ved andrederiverttesten (rad 8). De daglige inntektene er størst når prisen er $p = \frac{75}{2} = 37,5\, kr$

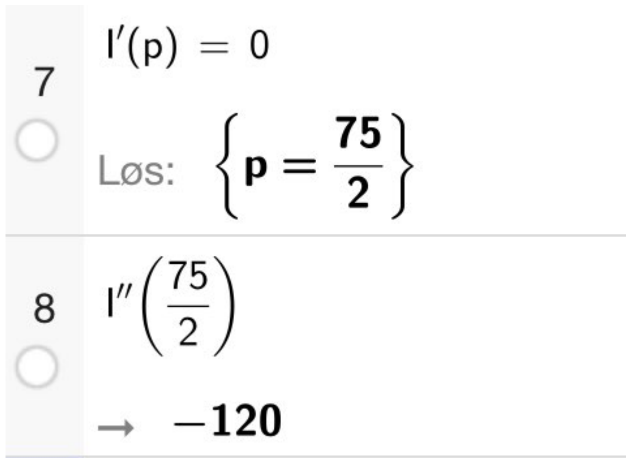

Figure 21

Oppgave 5(4 poeng)

a)

a) Dette er binomisk forsøk der det er n=1300 delforsøk og i hvert delforsøk er det kun to muligheter (enten billetten blir benyttet eller ikke) og sannsynligheten for at billetten blir benyttet er det samme i hvert forsøk (p=0.45) Vi bruker geogebra sannsynlighetskalkolator for å regne:

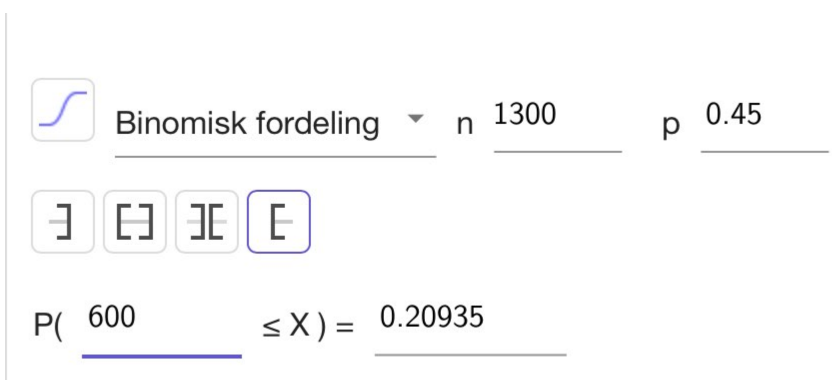

Figure 22

Sannsynligheten for at minst 600 av billettene blir benyttet er $0,20935 = 20,94$

b)

Vi tester med ulike verdier for n (n=1400,n=1401)

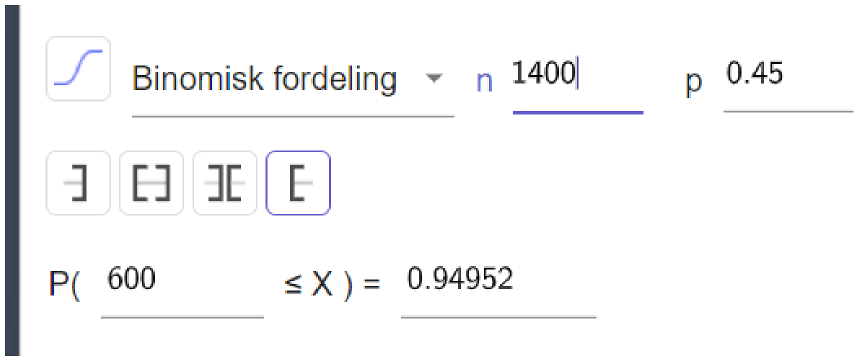

Figure 23

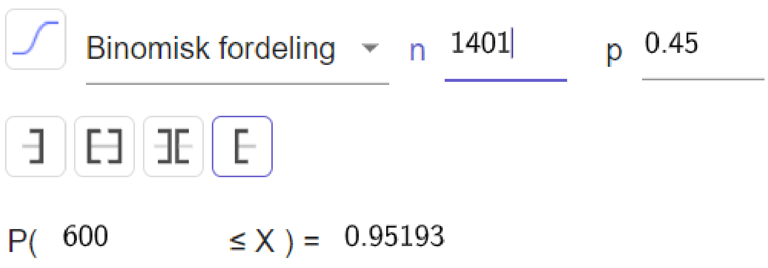

Figure 24

Det må deles ut minst 1401 billeter for at minst 600 av dem skal bli benyttet.

Metode 2: Programmering

Om vi lager en funksjon for binomisk formel, får vi feil melding pga gang av veldig store og veldig små tall i utregningene

```
import math as m
def binomisk(n,p,k):
    return m.comb(n,k)*(p**k)*((1-p)**(n-k))

print(binomisk(1300, 0.45,600) )
```

```
---------------------------------------------------------------------------
OverflowError                             Traceback (most recent call last)
~\AppData\Local\Temp\ipykernel_3196\3980021733.py in <module>
      3     return float(m.comb(n,k))*(p**k)*((1-p)**(n-k))
      4 
----> 5 print(binomisk(1300, 0.45,600) )

~\AppData\Local\Temp\ipykernel_3196\3980021733.py in binomisk(n, p, k)
      1 import math as m
      2 def binomisk(n,p,k):
----> 3     return float(m.comb(n,k))*(p**k)*((1-p)**(n-k))
      4 
      5 print(binomisk(1300, 0.45,600) )

OverflowError: int too large to convert to float
```

Figure 25

Vi kan bruke binomisk modell fra SciPy biblioteket for å løse oppgaven

```
from scipy.stats import binom
n = 1300 # Start verdi
p = 0.45
dist=0.2 # startverdi for å la løkken kjøres
while np.sum(dist)<0.95:
    n=n+1
    k=np.arange(600,n+1)
    dist = binom.pmf(k, n, p) # Regne sannsynligheter
print(n)
```

```
1401
```

Figure 26

Oppgave 6 (6 poeng)

a)

Vi bruker Cas og finner at lydintensiteten blir $10\frac{W}{m^2}$ (Se rad 3).

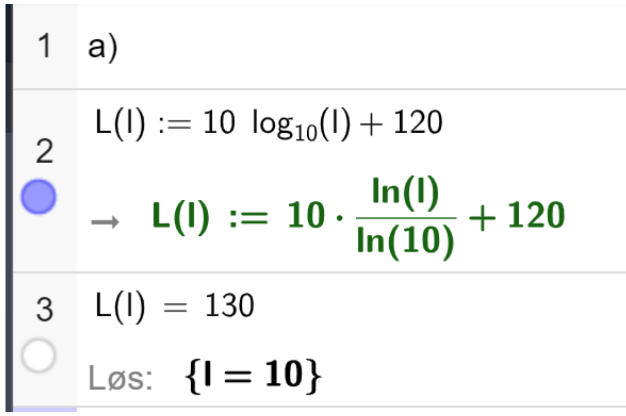

Figure 27

b)

Vi lar L_1, L_2 være lydstyrkene når lydinensitetene er l_1, l_2 så løser vi ligningen $L_2 - L_1 = 2$ for l_2 (rad 7) og får at $l_2 = \sqrt[5]{10} \cdot l_1$. Fra dette finner vi økning i prosent p (rad 8). Lyd intensiteten øker 58,5% når lydstyrken øker med 2 db

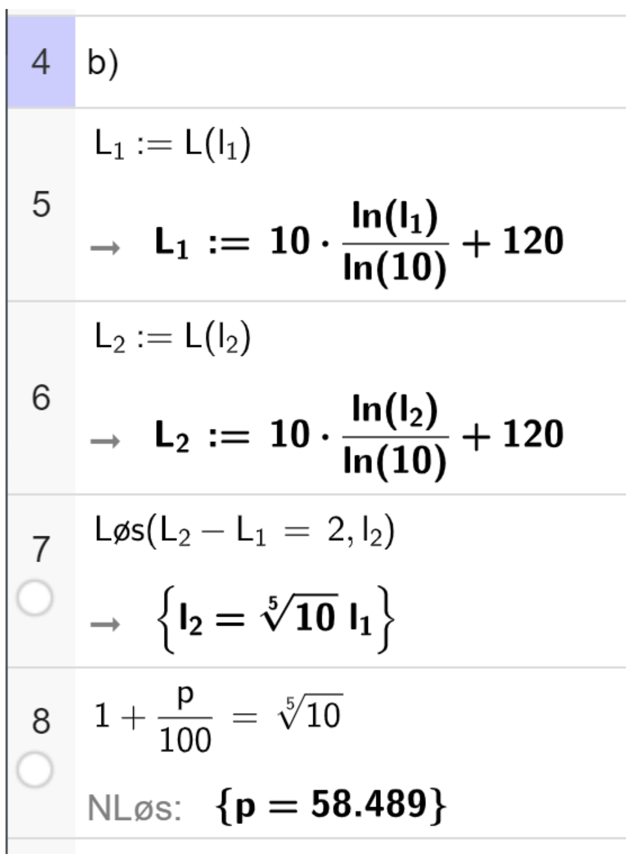

Figure 28

c)

Første finner vi effekten av lydkilden (rad 11) så finner vi ut hva blir lydintensiteten når lydstyrken er mindre enn $130\,dB$ (rad 12) . Så bytter vi lydstyrken med formelen som inneholder effekt og løser ulikheten for r (rad 13)

9	c)
10	$L(I) = 140$ Løs: $\{I = 100\}$
11	$100 = \frac{E}{4\pi \cdot 50^2}$ Løs: $\{E = 1000000\,\pi\}$
12	$L(I) < 130$ Løs: $\{0 < I < 10\}$
13	$0 < \frac{1000000\,\pi}{4\,\pi\,r^2} < 10$ Løs: $\left\{r < -50\sqrt{10}, r > 50\sqrt{10}\right\}$
14	\$13 $\approx \{r < -158.114, r > 158.114\}$

Figure 29

Vi dropper den negative løsningen og får at avstanden må være minst 185,114 m for at lydstyrken skal være mindre enn $130\,dB$.