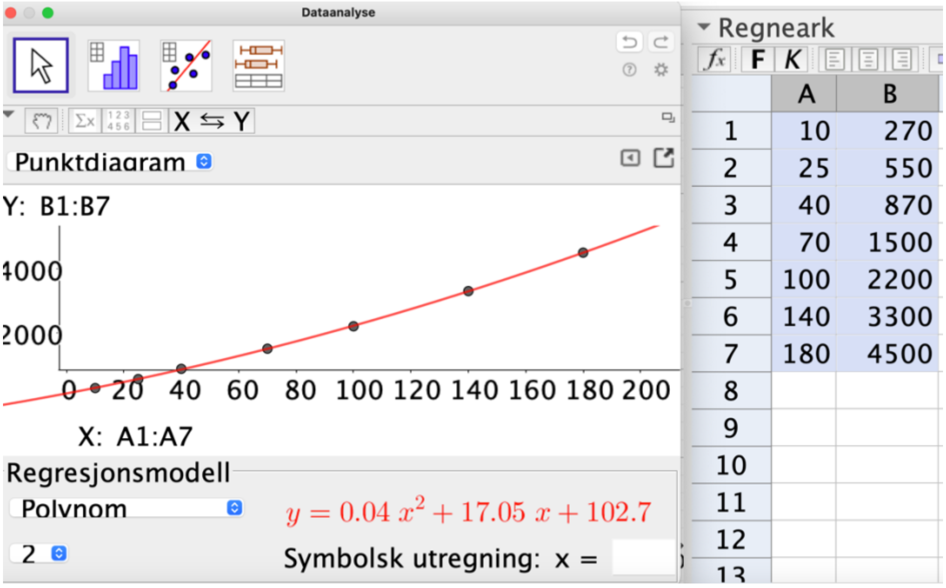
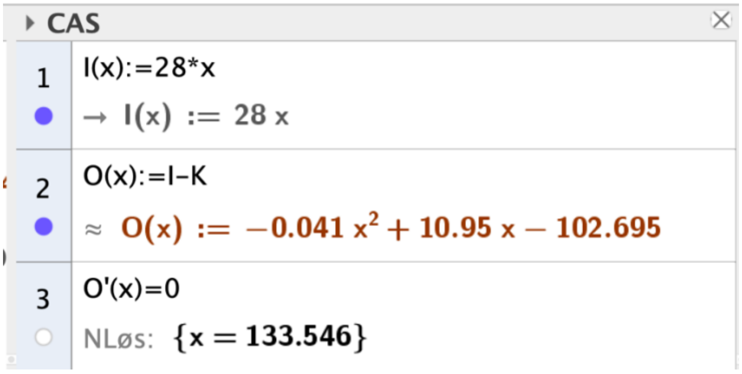
Eksamen S1 Høst 2023 (LK20)
Del 2

Oppgave 1



Fyller inn produksjonsmengde (x-verdier) x-verdier i kolonne A og produksjonskostnader (y-verdier) i kolonne B. Merker cellene i regnearket og velger analyse av en variabel, og videre regresjonsanalyse. Kostnadsmodellen brukes for å gi overskuddsmodellen, som er oppgitt som et polynom av andre grad. I regresjonsanalysen velger vi derfor polynom av 2. grad som regresjonsmodell. Ser at en slik modell passer godt med punktene.

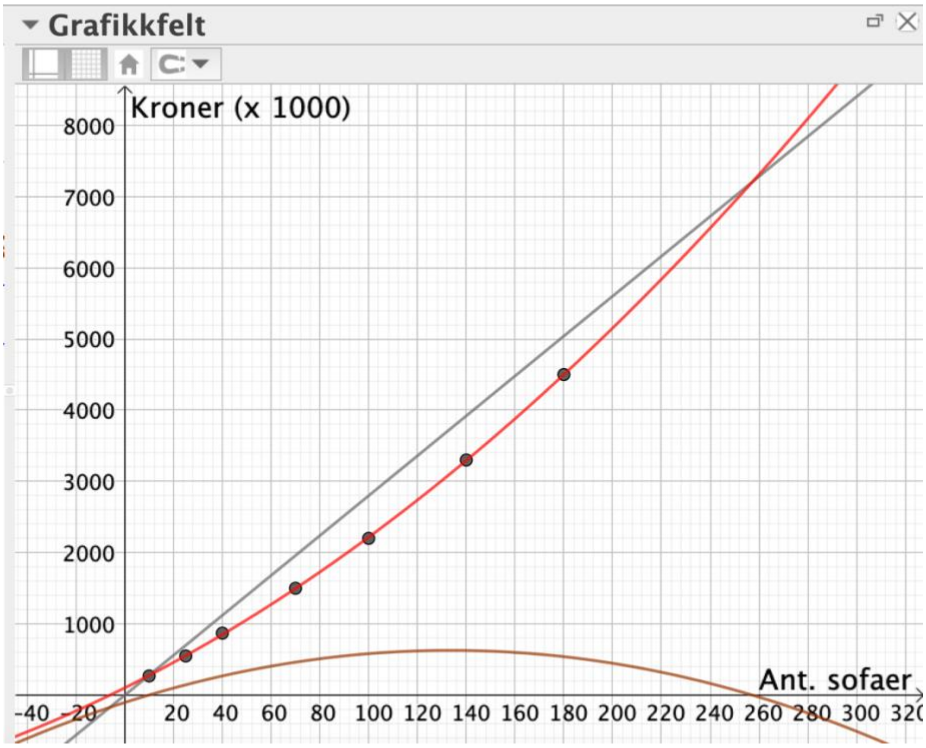
Vi får at en god modell for produksjonskostnadene basert på verdiene i tabellen er
$K(x) = 0.04x^2 + 17x + 103$



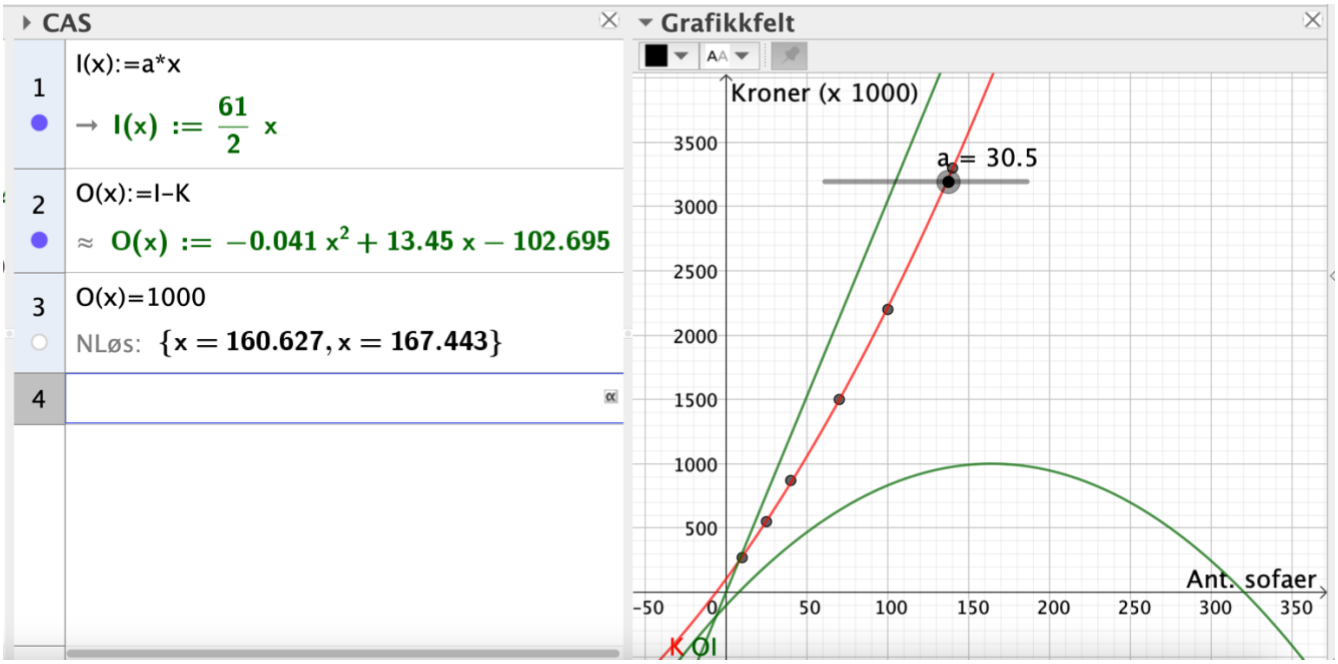
Kostnader er oppgitt i tusen kroner. Både modell for kostnad og inntekt brukes til å lage modell for overskudd. Dermed må inntektene også oppgis i tusen kroner.
Dette betyr at 28 000 kr i teksten må uttrykkes som 28 i modellen.

Finner toppunkt ved å sette den deriverte lik null.
Produksjonsmengden på 133 enheter per måned gir størst overskudd.

Dette kan også kontrolleres grafisk ved å finne toppunktet til overksuddsmodellen.



Ser at produksjonsmengde på 133 enheter gir størst overskudd.

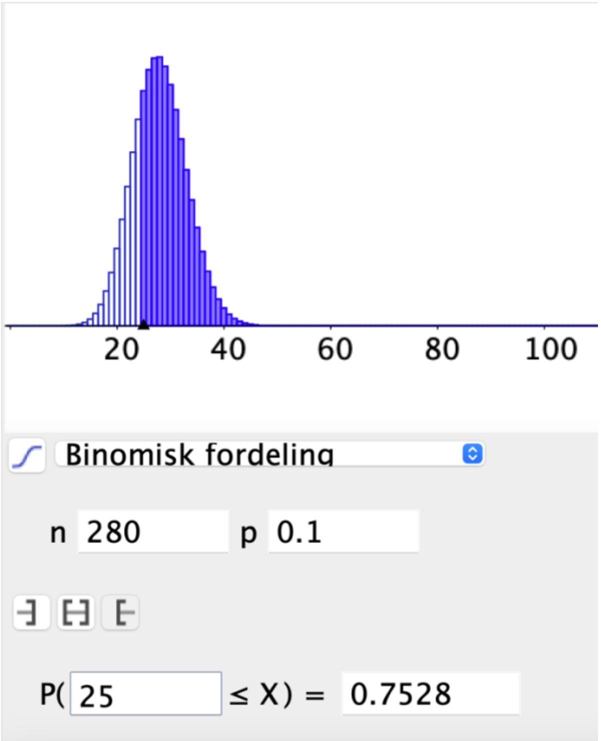


Ettersom prisen skal variere kaller vi prisen for eks. a.
Modell for kostnad er som før. Lager ny modell for overskudd med den nye inntektsmodellen.
Setter opp likning for et overskudd lik én million. Husk at alle verdier i kroner er oppgitt i tusen kroner. Dette betyr at én million oppgis som 1000.
Lager glider for a og finner minste verdi for a som gir at overskuddet er tilnærmet lik 1.000.000 kr. Dette er når prisen er ca. 30 500 kr per sofa.

Oppgave 2

a) Vi kan betrakte dette som et binomisk forsøk fordi det alltid er 10% sannsynlighet for at en tilfeldig valgt gutt på skolen er venstrehendt. Dette betyr at dersom vi tilfeldig velger en elev som er venstrehendt, vil ikke det påvirke sannsynligheten for å tilfeldig velge en ny elev som er venstrehendt i de andre trekningene.

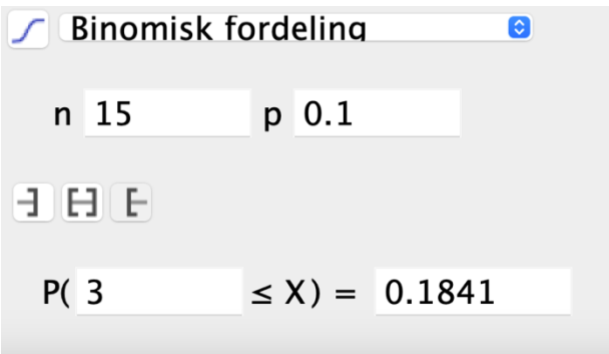
Forsøket består av 280 like delforsøk.

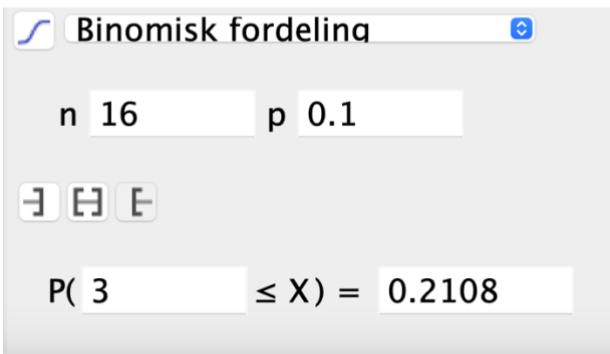


Det er 75.28 % sannsynlighet for at minst 25 av 280 gutter på skolen er venstrehendt.

b) Antall gutter er ukjent. Dette er n i binomisk modell.
Sannsynligheten er lik 10% som før. Lar vi X være antall gutter som er venstrehendte skal X være minst tre.

Vi endrer på verdien av n inntil $P(X \geq 3) > 0.20$





Når vi endrer n fra 15 til 16 vil sannsynligheten bli større enn 20%.
Det må derfor være minst 16 gutter i en klasse for at disse kriteriene skal oppfylles.

c) Vi ser fortsatt på dette som et binomisk forsøk ettersom det hele tiden er 10% og 8% sannsynlighet for at henholdsvis en tilfeldig valgt gutt eller jente er venstrehendt.
Vi må ta hensyn til begge sannsynlighetene samtidig.

Akkurat tre elever blant alle i klassen gir følgende alternativer:

1) 0g og 3j 2) 1g og 2j 3) 2g og 1j 4) 3g og 0j

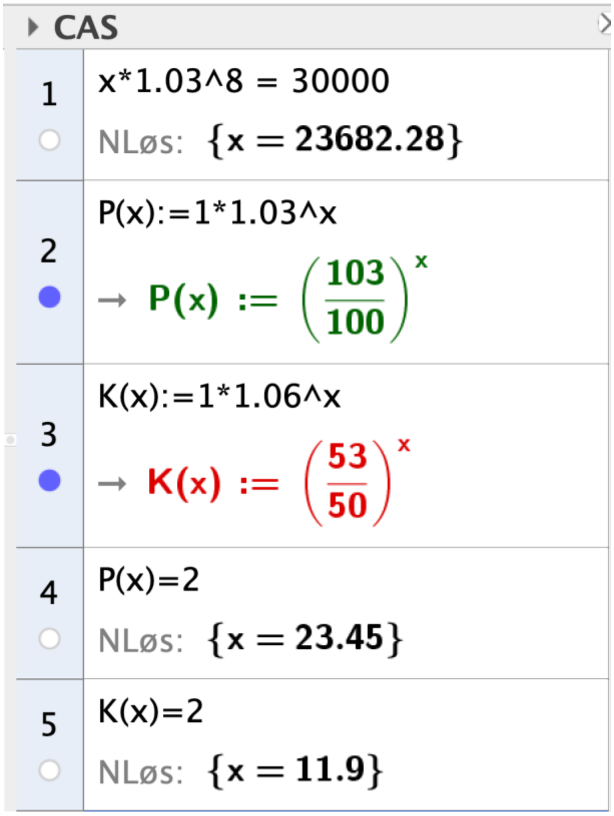
Her må vi kombinere sannsynligheten for gutter og jenter sammen som vist under.

1	(nCr(13, 0)*0.1^0*0.9^13)*(nCr(17, 3)*0.08^3*0.92^14) ≈ **0.028**
2	(nCr(13, 1)*0.1^1*0.9^12)*(nCr(17, 2)*0.08^2*0.92^15) ≈ **0.091**
3	(nCr(13, 2)*0.1^2*0.9^11)*(nCr(17, 1)*0.08^1*0.92^16) ≈ **0.088**
4	(nCr(13, 3)*0.1^3*0.9^10)*(nCr(17, 0)*0.08^0*0.92^17) ≈ **0.024**
5	$1 + $2 + $3 + $4 ≈ **0.231**

I hver parentes er det brukt en binomisk modell.
Sannsynligheten for hendelsen «akkurat tre elever er venstrehendt» er summen av de fire alternativene. Sannsynligheten er 23.1%.

Oppgave 3

a) Løser en likning i CAS:
Finner ut at Per må sette 23 682 kr i banken for at det skal vokse til 30 000 kr etter åtte år med 3% rentevekst.



b) Per sitt beløp vokser med 3% per år. Kåre sitt beløp vokser med 6% per år.
Kåres beløp vil naturligvis doble seg mye raskere enn Per sitt beløp.

Beregninger i CAS viser at det vil ta 23.45 år før Per sitt beløp ha doblet seg, og ca. 11.9 år før Kåre sitt beløp har doblet seg. Skal vi runde opp til nærmeste hele år vil det ta henholdsvis 24 år og 12 år.

Det ser ut til at det tar tilnærmet lik dobbelt så lang tid før Per sitt beløp har doblet seg, sammenliknet med hvor lang tid det tar før Kåre sitt beløp har doblet seg.

Men i fremtiden vil Kåres beløp vokse stadig raskere fordi han får større renters rente, enn det Per får. Dermed vil Kåre doble sitt beløp litt raskere enn Per sitt beløp dobler seg.

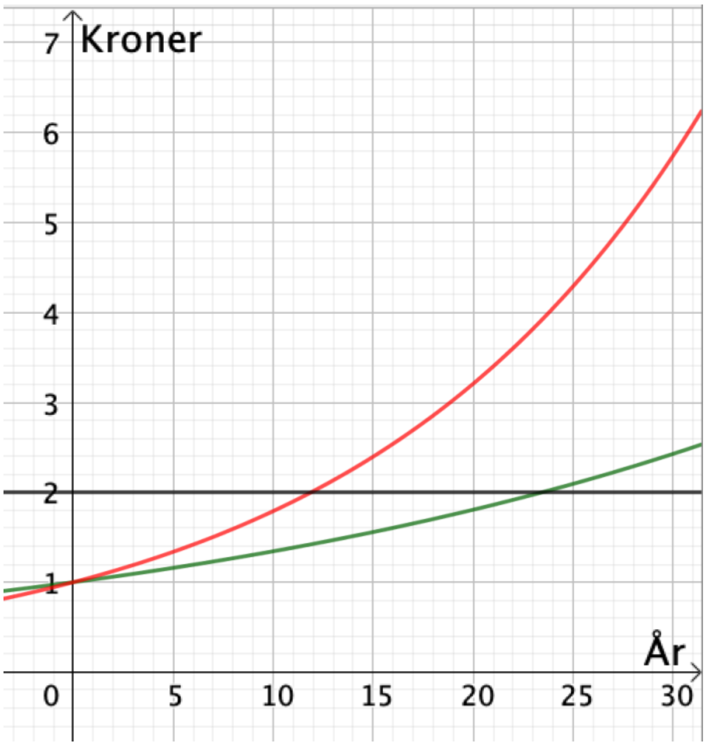
Sammenlikner også uttrykkene for momentan vekstfart til modellene.

Ser at vekstfarten til Kåres modell med 6% rentevekst ikke er dobbelt så stor somm vekstfarten til Per sin modell med 3% rentevekst.

Froholdet mellom dem er 1.97.

CAS

1	Derivert(1.03^x)*2==Derivert(1.06^x) $\approx$ false
2	Derivert(1.06^x)/Derivert(1.03^x) $\approx 1.9713 \cdot \frac{e^{0.0583x}}{e^{0.0296x}}$



c) Dersom de setter inn like store beløp samtidig, og begge beløpene skal doble seg, vil det totale beløpet være fire ganger så stort som hvert av deres egne beløp ved start.

Summen av Per og Kåre sitt beløp skal derfor være lik fire ganger deres første beløp. Løser følgende likning i CAS og får at det tar litt over 15 år.

4	P(x) + K(x) = 4,x=1 NLøs: $\{x = 15.243\}$

Oppgave 4

a) Minst to betyr to eller tre eller fire eller fem terninger som viser samme antall øyne. Dette er altså alle utfallene unntatt utfallet hvor ingen av terningene viser samme antall øyne. Sannsynligheten for at alle terningene viser forskjellige øyne er gitt i CAS-1.

Den ene terningen har 6 mulige utfall for antall øyne.
Hvis neste terning skal vise et ulikt antall øyne kan den vise 5 mulige utfall.
Da kan neste terning vise 4 mulige utfall, og neste 3 mulige utfall og siste 2 mulige utfall.

Antall gunstige kombinasjoner av ulike antall øyne er da $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$
Antall mulige kombinasjoner er $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$

CAS

1	6!/6^5
	≈ **0.0926**
2	1 – 0.0926
	≈ **0.9074**

Sannsynligheten for at minst to av terningene viser samme antall øyne er 0.9074.
Dette er det samme som å finne sannsynlighet for at høyst fire av terningene viser ulikt antall øyne.

b)

```python
from random import randint
# importerer funksjon for tilfeldig (rand) heltall (int)

N = 1000000 # antall kast med fem terninger
g = 0 # gunstige utfall før kast

for i in range(N):
    T1 = randint(1,6) # kaster første terning
    T2 = randint(1,6)
    T3 = randint(1,6)
    T4 = randint(1,6)
    T5 = randint(1,6) # kaster femte terning

    # sum av antall øyne
    sum = T1 + T2 + T3 + T4 + T5

    # hvis summen er større enn 20
    if sum > 20:
        g = g + 1 # øker antall gunstige utfall

```

```
p = round(g/N,4)
# sannsynlighet er gunstige/mulige
# rundes av med fire desimaler

# skriv sannsynlighet til skjerm
print(f'''
Sannsynligeheten for at summen av antall øyne
er større enn 20 er tilnærmet lik {p}
''')
```

```
Sannsynligeheten for at summen av antall øyne
er større enn 20 er tilnærmet lik 0.2223
```

c) k representerer sum av antall øyne til fem terninger.

$k = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

Når summen blir lavere er det flere og flere muligheter som er større enn summen, og dermed blir sannsynligheten større.

Vi vet fra før at $P(X > 20) = 0.22$

Dersom vi gradvis reduserer k fra 20 vil sannsynligheten $P(X \geq k)$ gradvis øke.

For hver gang jeg reduserer k beregner jeg en ny sannsynlighet:

$P(X \geq 20), P(X \geq 19), P(X \geq 18), \ldots$

Jeg må dermed bruke koden fra forrige oppgave om igjen flere ganger.
Når vi ønsker å bruke samme kode om igjen flere ganger, kan vi gjøre dette lettere ved å plassere koden inn i en funksjon.

Jeg lager en funksjon med samme kode, som til slutt skal beregne sannsynligheten $P(X \geq k)$.

Til slutt reduserer jeg k gradvis med en løkke.
For hvert steg i løkken skriver jeg ut summen og sannsynligheten til skjermen.

```python
from random import randint
# importerer funksjon for tilfeldig (rand) heltall (int)

# plasserer koden i en funksjon
# som beregner sannsynlighet
def P(k):
    N = 1000000 # antall kast av fem terninger
    g = 0 # antall gunstige utfall før kast
    for i in range(N):
        T1 = randint(1,6) # kaster første terning
        T2 = randint(1,6)
        T3 = randint(1,6)
        T4 = randint(1,6)
        T5 = randint(1,6) # kaster femte terning

        # sum av antall øyne
        sum = T1 + T2 + T3 + T4 + T5

        # hvis summen er større enn k
        if sum >= k:
            g = g + 1 # øker antall gunstige utfall

    p = round(g/N,4) # beregner sannsynligheten P(X >= k)
    return p

```

```python
k = 20 # starter med å la k = 20

# så lenge P(X >= k) < 0.8:
while P(k) < 0.8:
    k = k - 1 # reduseres k gradvis
    print(k, P(k)) # sum og sannsynlighet skrives til skjerm

print(f'''
Ser at P(X >= {k+1}) > {P(k+1)} og at P(X >= {k}) > {P(k)}.
Den største verdien av k som gir at P(X >= k) > 0.8
er dermed {k}.
''')
```

```
19 0.4006
18 0.5
17 0.6005
16 0.6949
15 0.7787
14 0.848

Ser at P(X >= 15) > 0.7789 og at P(X >= 14) > 0.848.
Den største verdien av k som gir at P(X >= k) > 0.8
er dermed 14.
```

Oppgave 5

$V = g \cdot h$

Grunnflaten er kvadratisk med sider x dm.
Høyden kan uttrykkes h.

Da har vi følgende: $g = x^2 \;\; og \;\; V = h \cdot x^2$

Får oppgitt at samlet areal av overflater ikke må være mer enn 120 dm^3.
Bunnen har overflatearealet x^2 og fire like sider har overflatearealet $4 \cdot h \cdot x$.

Samlet overflateareal kan da uttrykkes $x^2 + 4hx$

Dette gir ulikheten $x^2 + 4hx < 120$

Nå har vi to utrykk med to ukjente: x og h.

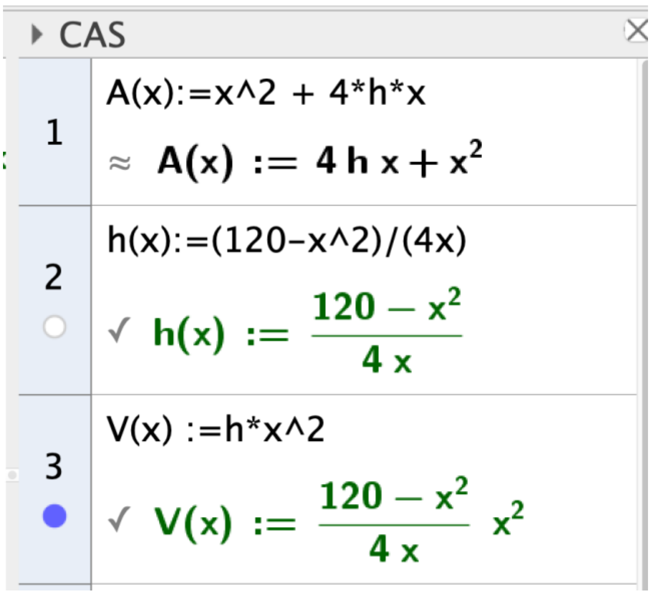
Basert på arealbegrensingen kan vi sette opp et uttrykk for h:

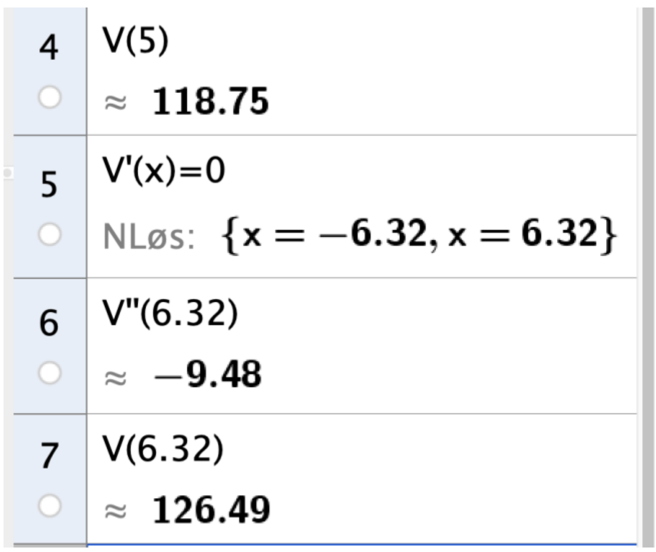
$$x^2 + 4hx < 120 \Leftrightarrow 4hx < 120 - x^2 \Leftrightarrow h < \frac{120 - x^2}{4x}$$

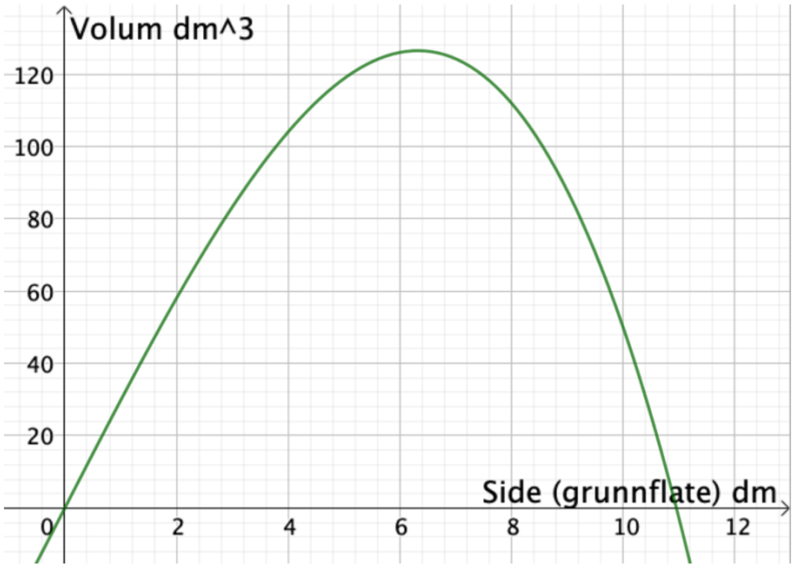
Vi setter uttrykket for h inn i volum med kun x som ukjent og får

$$V(x) = h \cdot x^2 = \frac{120 - x^2}{4x} \cdot x^2 = \frac{120 - x^2}{4} \cdot x = \frac{1}{4}(120x - x^3) = 30x - \frac{x^3}{4}$$

$$V(x) = 30x - \frac{x^3}{4}$$







a) Det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være 5 dm, og det samlede overflatearealet skal være mindre enn 120 dm^2 er ca. 118.75 dm^3 Se CAS 1-4 over. På grafen kan vi finne x = 5 og bevege oss opp på grafen og lese av volum. Ser at verdien til grafen for volum over x = 5 er ca. denne verdien.

b) Bruker modell for volum og finner toppunkt ved å sette den deriverte lik 0. Da er x = 6.32 dm. Kontrollerer toppunkt ved å bruke andrederivert testen. Andrederiverte er negativ for denne x-verdien som betyr at grafen er konkav, og dermed har et toppunkt her. Dersom vi tegner grafen til V ser vi dette. Se CAS 5-7 over.

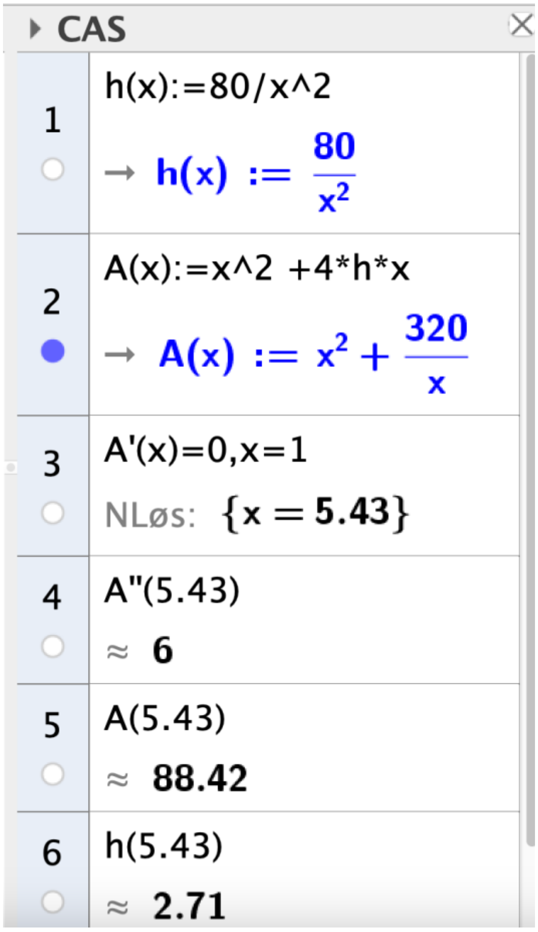
Det største volumet kassen kan ha med de gitt begrensingene er når sidene til grunnflaten er 6.32 dm. Da er volumet 126.49 dm^3.

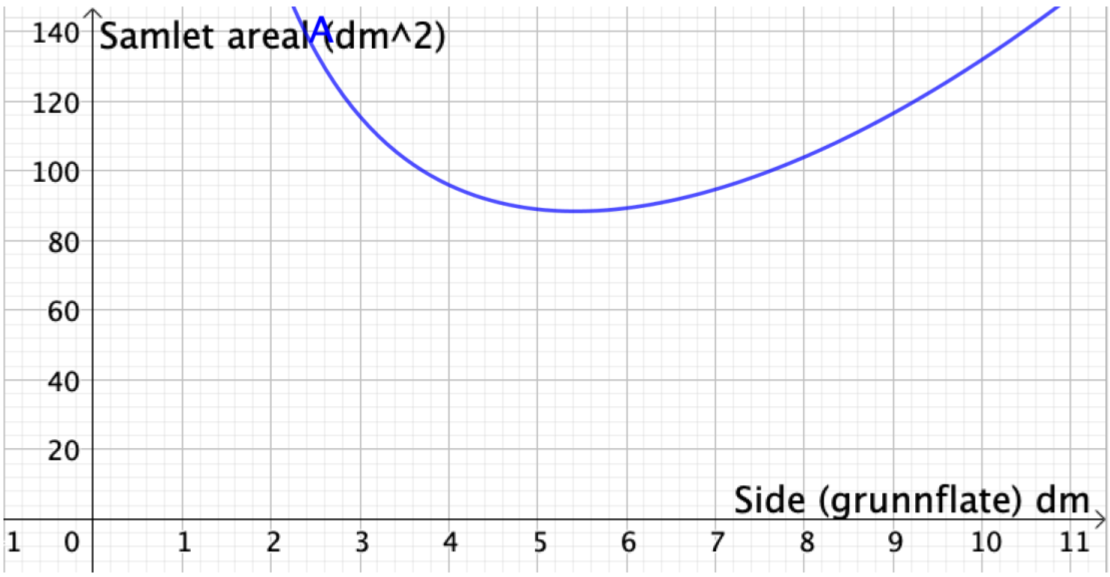
c) Fra før vet vi at $V = h \cdot x^2$. Vi får vite at volumet skal være lik 80 dm^3. Da får vi uttrykket $80 = h \cdot x^2$.
Så finner vi et uttrykk for høyden h: $h = \dfrac{80}{x^2}$
Vi setter h inn i uttrykk for areal. Se CAS.

Vi får en ny modell for areal med betingelse for at volumet er 80 dm^3. Vi setter den deriverte av modellen lik null for å finne bunnpunkt. Arealfunksjonen har et bunnpunkt når x = 5.43 dm (sidelengde til grunnflate).

Kontrollerer bunnpunkt med den andrederiverte av x = 5.43 som gir positiv verdi. Dette betyr at grafen til arealfunksjonen er konveks, og har et bunnpunkt.

Setter x = 5.43 dm inn i arealfunksjon som gir oss at det minste samlede overflatearealet må være 88.42 dm^2 når volumet er 80 dm^3. Dette oppfyller samtidig kriteriene om at det samlede overflatearealet må være under 120 dm^2. Finner også ut at høyden må være 2.71 dm. Se CAS 1-6 under.





Dette kan også kontrolleres grafisk. Her er grafen til arealfunksjonen.
Bunnpunktet er ved x = 5.43 som gir et samlet overflateareal på 88.42 dm^2.

Oppgave 6

Det generelle uttrykket for en tredjegradsfunksjon er

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a \neq 0$$

a) Påstanden er feil hvis det finnes minst ett tilfelle der den er feil.

Det enkleste uttrykket til en tredjegradsfunksjon er når vi setter
b = 0, c = 0 og d = 0.

Vi får at $f(x) = ax^3$

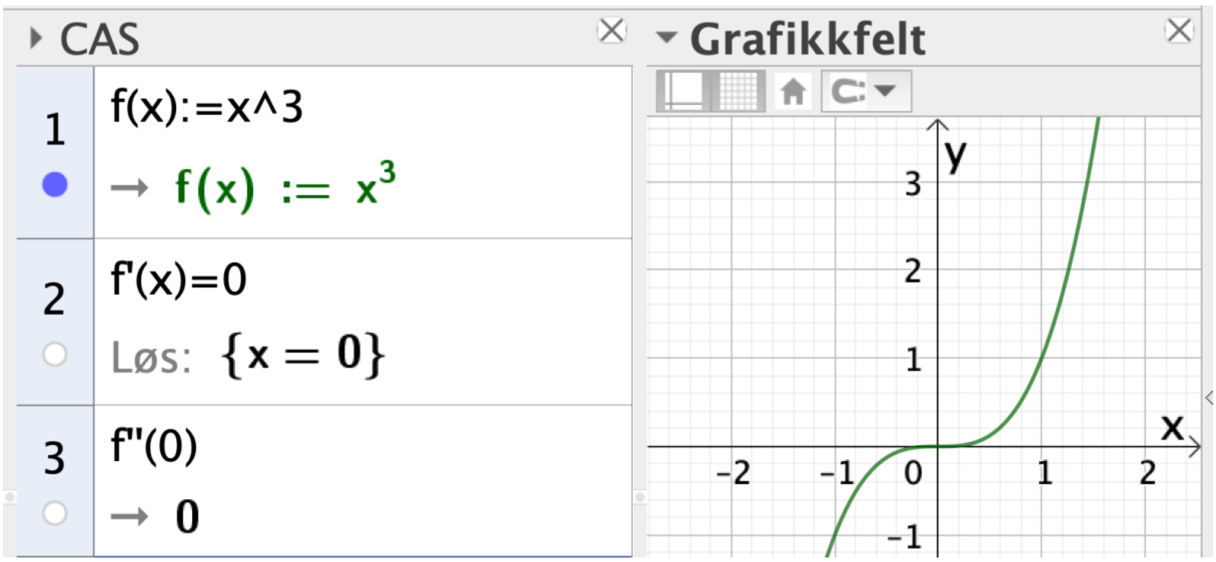
Lar a $=$ 1.
Ser ut fra beregninger i CAS at grafen har ett kritisk punkt der den deriverte er lik null.
Dette er når x $=$ 0.
Sjekker om dette er et ekstremalpunkt ved å bruke andrederivert $-$ testen.
Den andrederiverte for x $=$ 0 er lik 0.

Får samme resultat for alle verdier av a ulik 0.

Hvis $\mathrm{f''(x) > 0}$ er grafen konveks og har et bunnpunkt.
Hvis $\mathrm{f''(x) < 0}$ er grafen konkav og har ett toppunkt.

Den andrederiverte er lik 0 og grafen til f(x) er verken konkav eller konveks.
Dermed har ikke grafen til denne tredjegradsfunksjonen noen ekstremalpunkt.

Dette fører til at påstand 1 er feil.



b) $Vi\ har\ at\ y = ax + b\ og\ at\ a, b \in \mathbb{R}$

Dette betyr at verdiene for a og b kan være alle reelle tall.

Både tredjegradsfunksjonen og linjen er polynomer som er kontinuerlige funksjoner.

De har begge en definisjonsmengde som inneholder alle reelle tall.

For tredjegradsfunksjonen gjelder følgende:
$D_f = V_f = \mathbb{R}$

For linjen y $=$ ax + b gjelder følgende:

$Dersom\ a = 0\ og\ b \in \mathbb{R}\ vil\ D_y = \mathbb{R}\ og\ \ V_y = b, \qquad og\ b \in \mathbb{R}.$
$Dersom\ a \neq 0\ og\ b = 0\ vil\ D_y = \mathbb{R}\ og\ V_y = \mathbb{R}$

I begge tilfeller har linjen en verdimengde som er en del av mengden $\mathbb{R}$.

Dette betyr at begge funksjonene er definert for alle reelle x-verdier og kan gi alle reelle y-verdier. Begge funksjonene er også kontinuerlige i hele sin definisjonsmengde.

Dermed vil det finnes punkter (x, y) hvor grafene til polynomene skjærer hverandre.

Påstanden er sann.

c) Bruker CAS til å besvare oppgaven.

Skriver opp det generelle uttrykket til en funksjon av tredje grad.

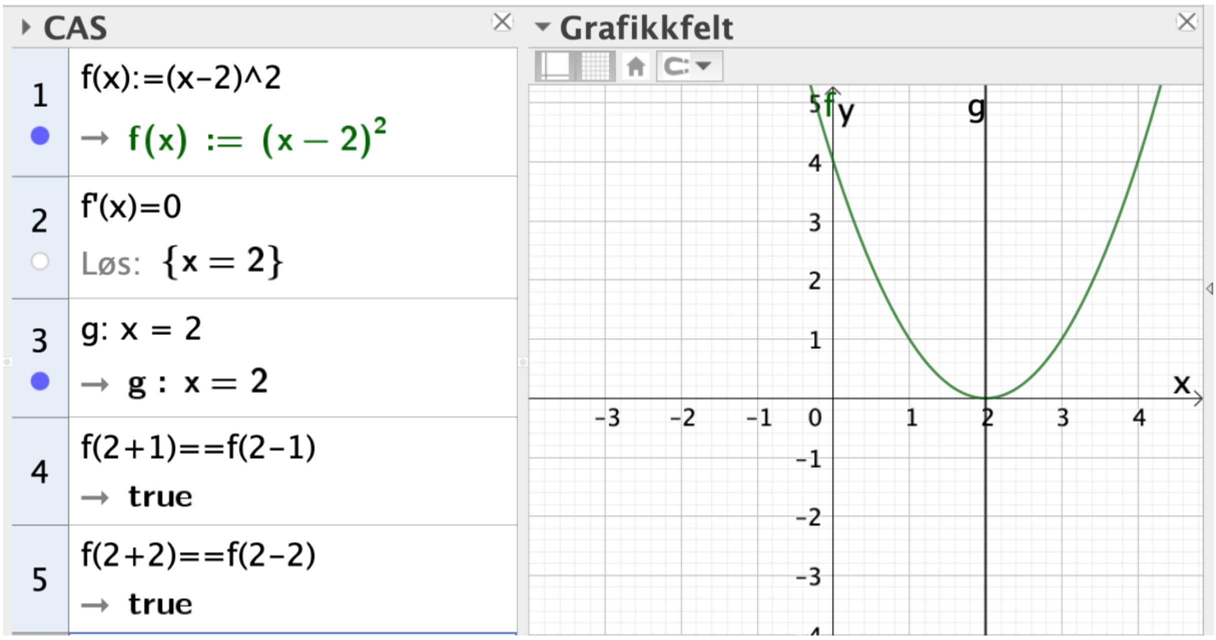
1	f(x):=a*x^3 + b*x^2 + c*x + d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Finner utrykket til den deriverte av funksjonen.
Dette ser vi er en funksjon av andre grad.

2	f'(x) $\rightarrow\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$

Andregradsfunksjoner er enten konkave med et toppunkt, eller konvekse med et bunnpunkt. De har også den egenskapen at de er symmetriske om bunn- eller toppunktet. Dette betyr at vi kan trekke en vertikal linje gjennom bunn- eller toppunktet, og da vil alle punkter på grafen være like langt fra denne linjen.

Et eksempel på symmetri hos en andregradsfunksjon:



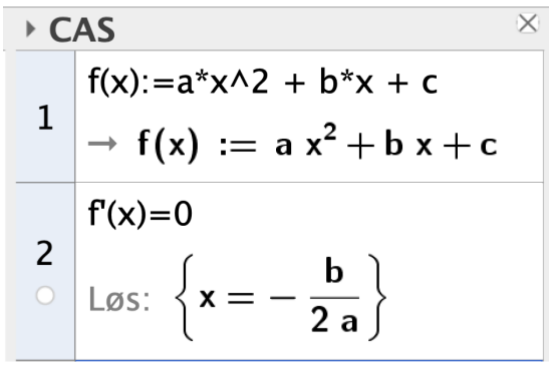
Symmetri betyr at x-verdier med lik avstand fra hver side av symmetrilinjen gir samme y-verdi. Kaller vi x-verdien som symmetrilinjen skjærer for s har vi at

$$f(s+x) = f(s-x)$$

For den generelle andregradsfunksjonen

$f(x) = ax^2 + bx + c$

er likningen for symmetrilinjen gitt ved x-verdien til bunnpunktet når $f'(x) = 0$.
Likningen er $x = -\frac{b}{2a}$



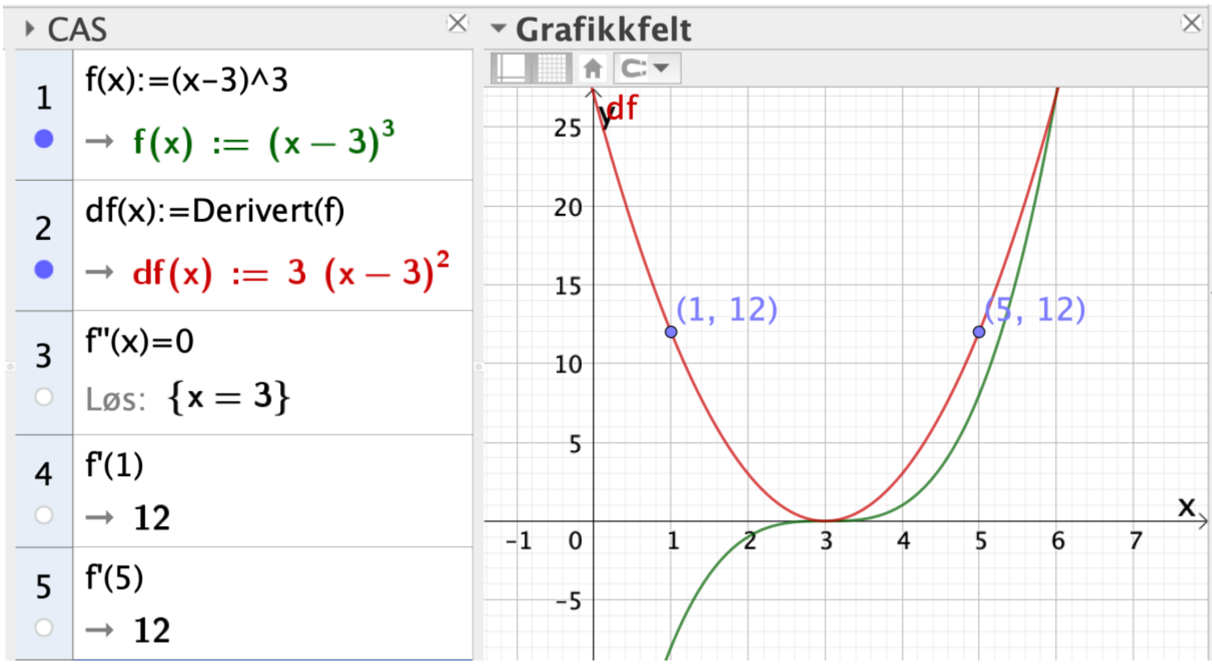
Den deriverte er en andregradsfunksjon med y-verdier som er momentan vekstfart til tredjegradsfunksjonen. Da gjelder generelt

$$f'(s+x) = f'(s-x)$$

Siden den deriverte av tredjegradsfunksjonen er en andregradsfunksjon, finner vi likningen for symmetrilinjen ved å finne bunn- eller toppunktet til den deriverte. Dette er der den andrederiverte er lik null, som også gir oss vendepunktet.

CAS

1	f(x):=a*x^3 + b*x^2 + c*x + d $\rightarrow\ f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	f'(x) $\rightarrow\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$
3	f'(x)=0 Løs: $\left\{x = \frac{-\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}, x = \frac{\sqrt{-3\,a\,c + b^2} - b}{3\,a}\right\}$
4	f''(x) $\rightarrow\ 6\,a\,x + 2\,b$
5	f''(x)=0 Løs: $\left\{x = -\frac{b}{3\,a}\right\}$
6	f'(−b/(3a)+2) $\rightarrow\ \frac{3\,a\,c + 36\,a^2 - b^2}{3\,a}$
7	f'(−b/(3a)−2) $\rightarrow\ \frac{3\,a\,c + 36\,a^2 - b^2}{3\,a}$
8	f'(−b/(3a)+2) == f'(−b/(3a)−2) $\rightarrow$ true



Vi får oppgitt at x = 3 befinner seg i bunnpunktet til den deriverte. Symmetriegenskapen gir at

$$f'(3-2) = f'(3+2)$$
$$f'(1) = f'(5)$$

Som skulle vises. Påstanden er sann.