DEL 1

Oppgave 1

Skriv så enkelt som mulig.

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1} = \frac{(3a^2)^2}{(2b^3)^2} \cdot \frac{4}{a^2b^{-5}} = \frac{3^2 a^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{2^2} b^6} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{a^2} b^{-5}}$$

$$= \frac{9a^2}{b^6 \cdot b^{-5}} = \underline{\underline{\frac{9a^2}{b}}}$$

Oppgave 2

Skriv uttrykkene nedenfor i stigende rekkefølge.

$2\ln e^3 \quad , \quad 3\lg 70 \quad , \quad e^{3\ln 2}$

Husk å begrunne svaret.

Skal skrive $2\ln e^3$, $3\lg 70$, $e^{3\ln 2}$ i stigende rekkefølge:

- $2\ln e^3 = 2 \cdot 3\ln e = 6 \cdot 1 = \underline{6}$
- $3\lg 70 = 3 \cdot \lg(10 \cdot 7) = 3(\lg 10 + \lg 7) = 3(1 + \lg 7) = \underline{3 + 3\lg 7}$
- $e^{3\ln 2} = \cancel{e}^{\cancel{\ln} 2^3} = 2^3 = \underline{8}$

Vi ser at $3\lg 70 = 3 + 3\lg 7$, der $\lg 7 < \lg 10 = 1$ som betyr at

$3 + 3\lg 7 < 3 + 3 \cdot 1 = 6 \Rightarrow 3\lg 70 < 6 \Leftrightarrow 3\lg 70 < 2\ln e$

I stigende rekkefølge får vi dermed:

$\underline{\underline{3\lg 70,\ 2\ln e^3,\ e^{3\ln 2}}}$

Oppgave 3

Du kaster tre terninger.

a) Bestem sannsynligheten for at alle terningene viser forskjellig antall øyne.

Vi kaster 3 terninger og skal finne sannsynligheten for at alle terningene er forskjellige.

Denne sannsynligheten kan vi løse som $\frac{\#\text{gunstige}}{\#\text{mulige}}$

#mulige er alle mulige kombinasjoner vi kan få med 3 terninger:

#mulige = $6 \cdot 6 \cdot 6$

#gunstige er alle kombinasjoner der terningene er ulike. Det betyr at første terning har 6 muligheter, andre terning har 5 muligheter, og tredje terning har 4 muligheter

#gunstige = $6 \cdot 5 \cdot 4$

$$P(\text{alle terninger er ulike}) = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{6} \cdot 6 \cdot \cancel{6}_{3}} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{10}{18} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av terningene viser samme antall øyne.

Her skal vi finne sannsynligheten for at nøyaktig 2 av 3 terninger er like.

Her må vi, i tillegg til å finne sannsynligheten for at to terninger er like, ta hensyn til antall måter dette kan skje på. Altså at

↳ terning 1 og 2 er like

↳ terning 1 og 3 er like

↳ terning 2 og 3 er like

De to like terningene kan plasseres ut på 3 forskjellige måter. Dette kunne vi også funnet ut ved å skrive $\binom{3}{2} = 3$

Nå som vi har tatt hensyn til antall måter to terninger kan være like på, kan vi se på sannsynligheten for at de to første terningene er like

antall muligheter terning 1	antall muligheter terning 2	antall muligheter terning 3
6	1	5

første terning vil ha 6 muligheter.
andre terning skal være lik første terning og har derfor kun 1 mulighet.
tredje terning skal være ulik de to første og har dermed 5 muligheter.

$$\left.\begin{array}{l} \#\text{ gunstige} = 6\cdot 1\cdot 5 \\ \\ \#\text{ mulige} = 6\cdot 6\cdot 6 \end{array}\right\} P(\text{terning 1 og 2 er like}) = \frac{\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{6}\cdot 6\cdot 6} = \underline{\frac{5}{36}}$$

$$P(2 \text{ av } 3 \text{ terninger er like}) = 3\cdot\frac{5}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

Oppgave 4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - a^2, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Bestem a slik at funksjonen blir kontinuerlig.

Vi har gitt funksjonen $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - a^2, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

og skal bestemme a slik at $f(x)$ er kontinuerlig.

Vi kan kalle $f_1(x) = x^2 - 3x - a^2$ og $f_2(x) = x - 1$ slik at

$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 1 \\ f_2(x), & x \geq 1 \end{cases}.$ For at $f(x)$ skal være kontinuerlig, må

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = f_2(1)$$

- $\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} x^2+3x-a^2 = 1^2+3\cdot 1-a^2 = \boxed{4-a^2}$

- $f_2(1) = 1-1 = \boxed{0}$

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = f_2(1) \Leftrightarrow 4-a^2=0 \Leftrightarrow 4=a^2 \Leftrightarrow a^2=4$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{4} = \underline{\underline{\pm 2}}$$

<u>$f(x)$ er kontinuerlig dersom $a=-2 \lor a=2$</u>

Oppgave 5

En bedrift produserer en vare. De daglige kostnadene K (i kroner) ved produksjon av x enheter av varen er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 100x + 9000.$$

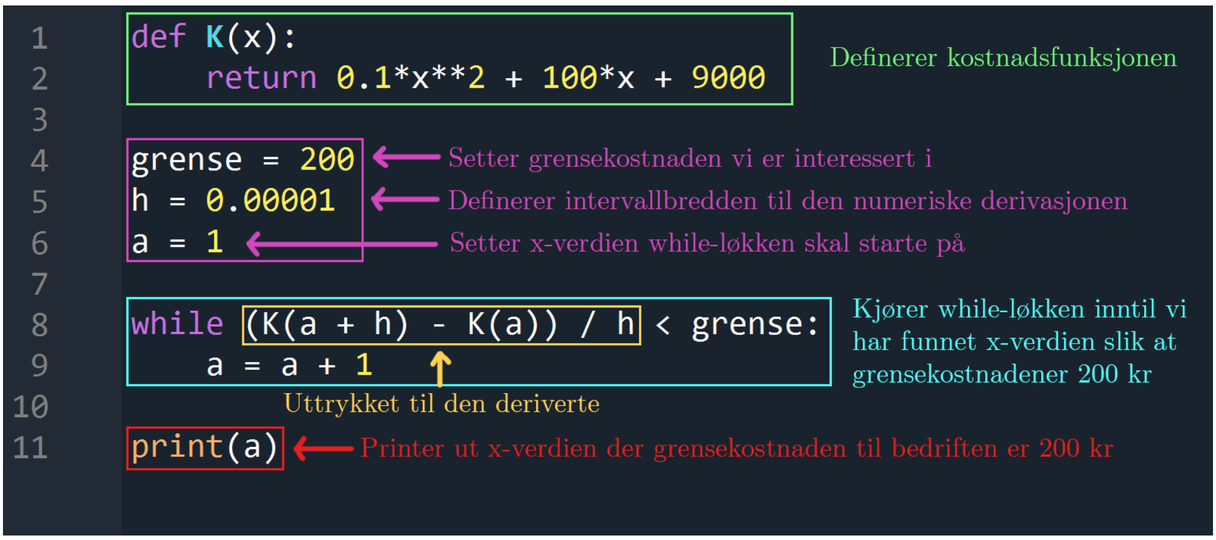
Den økonomiansvarlige i bedriften har laget programmet nedenfor.

```python
def K(x):
    return 0.1*x**2 + 100*x + 9000

grense = 200
h = 0.00001
a = 1

while (K(a + h) - K(a))/h < grense:
    a = a + 1

print(a)
```

Hva blir resultatet når programmet kjøres? Gi en praktisk tolkning av svaret.

Kostnadsfunksjonen til en bedrift er

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 100x + 9000$$



Vi kjenner igjen uttrykket $\frac{K(a+h)-K(a)}{h}$ som uttrykket for den derivete. Vi husker også at $K'(x)$ kalles for grensekostnaden, altså kostnaden for å produsere én ekstra enhet.

Variabelen grense representerer den grensekostnaden.

Programmet finner altså den x-verdien slik at grensekostnaden er 200kr.

For å finne denne x-verdien må vi løse $K'(x) = 200$

$$K'(x) = 0{,}2x + 100 \quad \Rightarrow K'(x) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}2x + 100 = 200$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2x = 100 \quad | : 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 500}}$$

Når bedriften produserer 500 enheter, koster det 200kr å produsere én ekstra enhet.

DEL 2

Oppgave 1

En møbelfabrikk produserer en type sofaer. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall sofaer de produserer per måned, og produksjonskostnadene per måned.

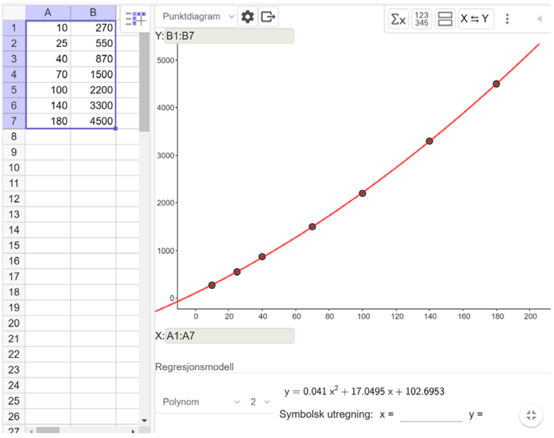
Antall sofaer	10	25	40	70	100	140	180
Produksjonskostnader (i tusen kroner)	270	550	870	1500	2200	3300	4500

Fabrikken selger alle sofaene til en møbelkjede. De får 28 000 kroner per sofa.

a) Bruk opplysningene ovenfor til å vise at funksjonen O gitt ved

$$O(x) = -0{,}041x^2 + 11x - 103$$

er en god modell for det månedlige overskuddet (i tusen kroner) til fabrikken, dersom de produserer x sofaer.



Ved hjelp av regresjonsanalyse med 2. grads polynom som regresjonsmodell får vi kostnadsfunksjonen $K(x)$

$$K(x) = 0{,}041x^2 + 17x + 103$$

Inntekten til møbelfabrikken er videre

$I(x) = 28x$, i tusen kroner

Slik at overskuddet blir

$$O(x) = I(x) - K(x) = 28x - (0{,}041x^2 + 17x + 103) = \underline{\underline{-0{,}041x^2 + 11x - 103}}$$

b) Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd?

For å finne størst mulig overskudd, må vi finne toppunktet $O(x)$.
Det kan gjøre på to måter:

① Bruk ekstremalpunkt('funksjon') kommandoen i CAS:

1	$O(x) := -0.041x^2 + 11x - 103$
	$\approx$ $O(x) := -0.041\,x^2 + 11\,x - 103$
2	Ekstremalpunkt(O)
	$\approx$ $\{(134.146, 634.805)\}$

② Løs $O'(x) = 0$ i CAS:

1	$O(x) := -0.041\,x^2 + 11\,x - 103$
	$\approx$ $O(x) := -0.041\,x^2 + 11\,x - 103$
2	$O'(x) = 0$
	NLøs: $\{x = 134.146\}$

Vi ser at svarene blir de samme, nemlig $x = 134$.

Men vi må bruke andrederiverttesten for å bekrefte at vi fant et toppunkt

3	$O''(134)$
	≈ -0.082

$O''(134) < 0 \Rightarrow$ $\underline{x = 134 \text{ er et toppunkt}}$

Overskuddet er størst når fabrikken produserer og selger 134 sofaer

Fabrikken ønsker at overskuddet skal være 1 million kroner per måned. De vil derfor endre salgsprisen på sofaene.

c) Bestem den laveste salgsprisen de kan sette per sofa, dersom de skal få dette overskuddet.

i tusen kroner

Vi skal altså ha at $O(x) = 1000$, men nå skal vi sette salgsprisen så lavt som mulig. Det betyr at inntekten nå er gitt ved

$I(x) = p \cdot x$, der p er prisen på sofaen

med $K(x) = 0{,}041x^2 + 17x + 103$, blir nå overskuddet

1	$I(x) := p \cdot x$
	$\approx I(x) := p\,x$
2	$K(x) := 0.041x^2 + 17x + 103$
	$\approx K(x) := 0.041\,x^2 + 17\,x + 103$
3	$O(x) := I(x) - K(x)$
	$\approx O(x) := -0.041\,x^2 + p\,x - 17\,x - 103$

Og vi ønsker nå at prisen p skal være slik at det maksimale overskuddet skal 1 million. Altså må vi først løse $O'(x) = 0$

løser med hensyn på x

4	$\text{Løs}(O'(x) = 0, x)$
	$\approx \{x = 12.195\,p - 207.317\}$

Vi vet altså nå at det maksimale overskuddet inntreffer ved $x = 12{,}195p - 207{,}317$

5	$O_{maks} := O(12.195 \cdot p - 207.317)$
	$\approx O_{maks} := 6.098\,p^2 - 207.317\,p + 1659.195$

Og til slutt kan vi nå løse $O_{maks} = 1000$ for å finne den laveste prisen vi kan kan sette for å oppnå 1 million kroner i overskudd

i tusen kroner

6	$O_{maks} = 1000$
	NLøs: $\{p = 3.55, p = 30.45\}$

Da får vi to priser; $p = 3{,}55$ og $p = 30{,}45$

7	$x_1 := 12.195 \cdot 3.55 - 207.317$
	$\approx x_1 := -164.025$
8	$x_2 := 12.195 \cdot 30.45 - 207.317$
	$\approx x_2 := 164.021$

Vi ser at dersom $p = 3{,}55$ må fabrikken produsere -164 varer, mens dersom $p = 30{,}45$ må fabrikken produsere 164 varer. $p = 3{,}55$ er altså ikke en gyldig prisen.

Den laveste prisen fabrikken kan ha dersom overskuddet skal være 1 million er 3045 kr per sofa

Oppgave 2

Undersøkelser viser at 10 prosent av alle menn og 8 prosent av alle kvinner er venstrehendte.

På en skole er det 280 gutter og 220 jenter.

a) Bestem sannsynligheten for at minst 25 av guttene på skolen er venstrehendte.

Vi får vite at P(gutt er venstrehendt) = 0,10 og at P(jente er venstrehendt) = 0,08.

La X: antall gutter på skolen som er venstrehendte
og Y: antall jenter på skolen som er venstrehendte

Vi har her med en binomisk fordeling å gjøre, til tross for at dette er trekk uten tilbakelegg (elevene på skolen blir kun spurt én gang). De 500 elevene på skolen er et så utrolige lite utvalg sammenlignet med hele Norges befolkning.
Vi kan derfor anta at sannsynligheten for at en gutt er venstrehendt er lik for alle delforsøkene.

Vi skal altså finne $P(X \geq 25)$, og det kan vi gjøre med sannsynlighetskalkulatoren

Binomisk fordeling n 280 p 0.1

P(25 ≤ X) = 0.7528

Sannsynligheten for at minst 25 gutter på skolen er venstrehendte er 0,7528

b) Hvor mange gutter må det være i en klasse dersom sannsynligheten for at minst tre av guttene er venstrehendte, skal være større enn 20 prosent?

For å finne ut hvor mange gutter det må være i en klasse for at $P(X \geq 3) > 0{,}20$, kan vi dra n i sannsynlighetskalkulatoren:

Binomisk fordeling n 15 p 0.1

P(3 ≤ X) = 0.1841

Binomisk fordeling n 16 p 0.1

P(3 ≤ X) = 0.2108

Her ser vi at det må være 16 gutter i en klasse for at det skal være mer enn 20% sannsynlighet for at minst 3 gutter er venstrehendte

I en klasse er det 13 gutter og 17 jenter.

c) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig tre av elevene i klassen er venstrehendte.

I klassen er det 13 gutter og 17 jenter.

Vi skal finne sannsynligheten for at nøyaktig 3 elever er venstrehendte.

Her bør vi dere først finne sannsynligheten for at en elev er venstrehendt. La oss derfor definere noen hendelser og tilhørende sannsynligheter

V : elev er venstrehendt $\qquad P(V) =$ denne skal vi finne

G : elev er gutt $\qquad P(G) = \frac{13}{30} \qquad P(V|G) = 0,10$ sannsynligheten for at en mann er venstrehendt

J : elev er jente $\qquad P(J) = \frac{17}{30} \qquad P(V|J) = 0,08$ sannsynligheten for at en jente er venstrehendt

Siden G og J er disjunkte hendelser, altså at det ikke er noen overlapp (ingen elever er både gutt og jente), kan vi finne P(V) på følgende måte

$$P(V) = P(V|G) \cdot P(G) + P(V|J) \cdot P(J) = 0,10 \cdot \frac{13}{30} + 0,08 \cdot \frac{17}{30} = \underline{0,089}$$

Binomisk fordeling n 30 p 0.089

P(3 ≤ X ≤ 3) = 0.231

Det er 0,231 sannsynlighet for at nøyaktig 3 elever i klassen er venstrehendte

Vi kunne også løst denne oppgaven ved programmering:

```python
# Importerer nødvendige biblioteker
import numpy as np
from numpy import random

# Definerer feilmargin, avrundet til 4 desimaler
def feilmargin(r, N):
    return round(2 * np.sqrt(r*(1-r) / N), 4)


p1 = 0.10           # sannsynligheten for at en gutt er venstrehendt
p2 = 0.08           # sannsynligheten for at en jente er venstrehendt

n1 = 13             # antall gutter i klassen
n2 = 17             # antall jenter i klassen

# lager en liste som representerer klassen
utvalg = n1*["GUTT"] + n2*["JENTE"]

N = 100000          # antall simuleringer
n = len(utvalg)     # antall elementer i hovedmengden
gunstige = 0        # antall gunstige utfall


# Her starter selve simuleringen av det binomiske forsøket
for i in range(N):  # kjører simulering N ganger

    X = random.binomial(n1, p1)  # X: antall trekk der gutt var venstrehendt
    Y = random.binomial(n2, p2)  # Y: antall trekk der jente var venstrehendt

    # Gunstig utfall om det til sammen er tre elever som er venstrehendte
    if X + Y == 3:
        gunstige += 1

# Regner ut den relative frekvensen, avrundet til 3 desimaler
r = round(gunstige / N, 3)

# Regner ut feilmarginen til forsøket
feil = feilmargin(r, N)

# Print ut relativ frekvens fra simulering
print(f'N = {N}')
print(f'relativ frekvens = {r}')
print(f'feilmargin = {feil}')
```

```
N = 100000
relativ frekvens = 0.23
feilmargin = 0.0027
```

Oppgave 3

Per og Kåre setter inn like store beløp på hver sin konto. Per får en årlig rente på 3,00 prosent, mens Kåre får en årlig rente på 6,00 prosent.

a) Hvilket beløp må Per sette inn dersom han skal ha 30 000 kroner på kontoen etter 8 år?

Verdiutviklingen på kontoen til Per er gitt ved

$P(x) = b \cdot 1{,}03^x$, der b er startbeløpet på kontoen

For å finne ut av hvor mye Per må sette inn på kontoen for å ha 30 000kr etter 8 år, må vi løse

$P(8) = 30\,000$

1	$P(x) := b \cdot 1.03^x$ $\approx$ $\mathbf{P(x) := b\ e^{0.03x}}$
2	$P(8) = 30000$ NLøs: $\{\mathbf{b = 23682.277}\}$

Per må sette inn 23 682,3 kr på kontoen for å ha 30 000 om 8 år

Påstand
Det vil gå nøyaktig dobbelt så lang tid før beløpet Per har på konto, har doblet seg, som det vil gå før beløpet Kåre har på konto, har doblet seg.

b) Argumenter for at påstanden *ikke* er riktig.

Per sin konto har en vekstrate på 1,03
Kåre sin konto har en vekstrate på 1,06

For å finne doblingstiden til Per og Kåre, må vi løse

$1{,}03^x = 2$ og $1{,}06^x = 2$

1	$1.03^x = 2$ NLøs: $\{x = 23.45\}$
2	$1.06^x = 2$ NLøs: $\{x = 11.896\}$

doblingstiden til Per er 23,45 år, mens doblingstiden til kåre er 11,896 år.

$$\frac{23{,}45}{11.896} = 1{,}971 \neq 2$$

Det tar ikke nøyaktig dobbelt så lang tid før beløpet Per har på konto, har doblet seg, som det vil gå for beløpet Kåre har på konto har doblet seg

c) Hvor lang tid vil det går før Per og Kåre til sammen har dobbelt så mye penger som de satte inn på kontoene, dersom den årlige renten er henholdsvis 3,00 prosent og 6,00 prosent?

Siden det er prosentvis vekst, har ikke startbeløpet noe å si for doblingstiden
Vi kan derfor se helt bort ifra startbeløpet til Per og Kåre, og heller kun se på vekstfaktorene slik at

$P(x) = 1{,}03^x$ og $B(x) = 1{,}06^x$

Det samlede beløpet Per og Kåre har på konto til sammen blir da

$B(x) = P(x) + K(x)$

For å finne ut hvor lang tid det tar for $B(x)$ har doblet seg, løser vi
$B(x) = 2 \cdot B(0)$ i CAS

1	$P(x) := 1.03^x$
	≈ $P(x) := e^{0.03x}$
2	$K(x) := 1.06^x$
	≈ $K(x) := e^{0.058x}$
3	$B(x) := P(x) + K(x)$
	≈ $B(x) := e^{0.058x} + e^{0.03x}$
4	$B(x) = 2 \cdot B(0), x = 1$
	NLøs: $\{x = 15.243\}$

Vi ser at det tar 15,3 år (15 år 2 måneder og 27 dager)
før Per og Kåres samlede kontoverdi har doblet seg

Oppgave 4

Du kaster fem terninger.

a) Bestem sannsynligheten for at minst to av terningene viser samme antall øyne.

Vi skal altså finne P(minst 2 like terninger)

Vi vet også at P(minst 2 like terninger) = 1 - P(ingen like terninger)

Vi kan derfor fokusere på P(ingen like terninger)

Sannsynligheten for at ingen terninger er like, kan vi løse med $\frac{\#\text{gunstige}}{\#\text{mulige}}$

$\#\text{gunstige} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ $\quad \#\text{mulige} = 6^5 = 7776$

$P(\text{ingen like terninger}) = \frac{720}{7776} \Rightarrow P(\text{minst 2 like terninger}) = 1 - \frac{720}{7776} = \frac{49}{54} \approx \underline{\underline{0{,}907}}$

Sannsynligheten for at minst 2 terninger er like, er 0,907

Dette kunne også ha blitt løst ved hjelp av programmering

```python
# Importer nødvendige biblioteker
import numpy as np
from numpy import random

# Definerer feilmargin, avrundet til 4 desimaler
def feilmargin(r, N):
    return round(2 * np.sqrt(r*(1-r) / N), 4)


# kast_terning() representerer et terningkast ved å returnere
# et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6
def kast_terning():
    return random.randint(1, 7)

# Definer variabler for simulering
N = 100000      # antall simuleringer
gunstige = 0    # antall gunstige utfall fra simuleringer

# Simulering
for i in range(N):
    # Kaster terninger
    t1 = kast_terning()
    t2 = kast_terning()
    t3 = kast_terning()
    t4 = kast_terning()
    t5 = kast_terning()

    # Lager en liste som lagrer resultatet til terningene
    terningresultater = [t1, t2, t3, t4, t5]

    # Gjør om listen til et sett slik at duplikater blir fjernet
    terning_sett = set(terningresultater)

    # Lengden/antall elementer i settet representerer antall ulike terninger
    antall_ulike_terninger = len(terning_sett) - 1

    # Finner deretter antall like terninger
    antall_like_terninger = 5 - antall_ulike_terninger


    # Vi har et gunstig utfall dersom minst to av terningene er like
    if antall_like_terninger >= 2:
        gunstige += 1

# Regner ut relativ frekvens avrundet til 3 desimaler
r = round(gunstige / N, 3)

# Print ut relativ frekvens fra simulering
print(f'N = {N}')
print(f'relativ frekvens = {r}')
```

```
N = 100000
relativ frekvens = 0.906
feilmargin = 0.0018
```

La X være summen av antall øyne på de fem terningene.

b) Bruk programmering til å bestemme $P(X > 20)$.

For å lage dette programmet, kan vi lage en hjelpefunksjon som "kaster" terningene.
Deretter kaster vi 5 terninger (t_1, t_2, t_3, t_4 og t_5), og regner ut summen av disse: $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$

Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20.

Vi må se gjenta dette forsøket mange ganger, f.eks. 100 000 ganger, og så regne ut den relative frekvensen:

```python
# Importer nødvendige biblioteker
import numpy as np
from numpy import random

# Definerer feilmargin, avrundet til 4 desimaler
def feilmargin(r, N):
    return round(2 * np.sqrt(r*(1-r) / N), 4)


# kast_terning() representerer et terningkast ved å returnere
# et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6
def kast_terning():
    return random.randint(1, 7)

# Definer variabler for simulering
N = 100000      # antall simuleringer
gunstige = 0    # antall gunstige utfall fra simuleringer

# Simulering
for i in range(N):
    # Kaster terninger
    t1 = kast_terning()
    t2 = kast_terning()
    t3 = kast_terning()
    t4 = kast_terning()
    t5 = kast_terning()

    # Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20
    if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 > 20:
        gunstige += 1

# Regner ut relativ frekvens avrundet til 3 desimaler
r = round(gunstige / N, 3)

# Regner ut feilmarginen til forsøket
feil = feilmargin(r, N)

# Print ut relativ frekvens fra simulering
print(f'N = {N}')
print(f'relativ frekvens = {r}')
print(f'feilmargin = {feil}')
```

```
N = 100000
relativ frekvens = 0.221
feilmargin = 0.0026
```

Det er også mulig å skrive et program som tester ut alle mulige kombinasjoner isteden for å simulere terningkast

```python
mulige = 6**5          # antall mulige kombinasjoner når det kastes 5 terninger
gunstige = 0           # variabel som teller opp antall gunstige utfall

# Hver løkke representerer en terning
for t1 in range(1, 7):
    for t2 in range(1, 7):
        for t3 in range(1, 7):
            for t4 in range(1, 7):
                for t5 in range(1, 7):

                    # sjekker som summen er større enn 20
                    if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 > 20:
                        gunstige += 1

# Regner ut sannsynligheten
p = round(gunstige / mulige, 3)

# Skriver ut sannsynligheten
print(f'P(X > 20) = {p}')
```

```
P(X > 20) = 0.221
```

c) Bestem den største verdien av k som er slik at $P(X \geq k) > 0{,}8$.

Her gjenbruker vi programmet fra oppgave b), men hvor vi kan fjerne det som ikke trengs, for eksempel hjelpemetoden for å regne ut feilmargin.

Vi kan videre pakke inn simuleringsdelen av programmet i en egen metode så det er lettere å gjenbruke den. Deretter kan vi sette terningsummen, k, til å være 5 ettersom det er 100% sannsynlighet for at terningsummen er større enn dette. Så må vi kjøre simuleringen og øke verdien av k helt til sannsynligheten ikke lenger er større enn 0,8. Dette gjør vi med en while-løkke:

```python
# Importer nødvendige biblioteker
from numpy import random

# kast_terning() representerer et terningkast ved å returnere
# et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6
def kast_terning():
    return random.randint(1, 7)

# Samler hele simuleringen i en metode slik at den er enklere å gjenbruke
def simulering_med_sum(k):
    # Definer variabler for simulering
    N = 100000      # antall simuleringer
    gunstige = 0    # antall gunstige utfall fra simuleringer

    # Simulering
    for i in range(N):
        # Kaster terninger
        t1 = kast_terning()
        t2 = kast_terning()
        t3 = kast_terning()
        t4 = kast_terning()
        t5 = kast_terning()

        # Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20
        if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 >= k:
            gunstige += 1

    # Regner ut relativ frekvens avrundet til 3 desimaler
    return round(gunstige / N, 3)


# Definerer startsummen
k = 5

# Kjører løkken så lenge sannsynligheten er større en 0.8
while simulering_med_sum(k) > 0.8:
    print(f'P(X ≥ {k})  = {simulering_med_sum(k)}')
    k += 1
```

```
P(X ≥ 5)  = 1.0
P(X ≥ 6)  = 1.0
P(X ≥ 7)  = 0.999
P(X ≥ 8)  = 0.997
P(X ≥ 9)  = 0.993
P(X ≥ 10)  = 0.984
P(X ≥ 11)  = 0.968
P(X ≥ 12)  = 0.942
P(X ≥ 13)  = 0.902
P(X ≥ 14)  = 0.847
```

Her ser vi at den siste gyldige verdien for k er 14. Den største verdien k kan ha slik at $P(X \geq k) > 0{,}8$ er 14

Vi kunne også gjort det samme med programmet som testet ut alle mulige kombinasjoner

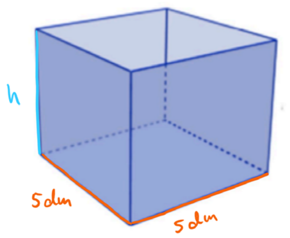
```python
# Samler hele programmet i en metode slik at den er enklere å gjenbruke
def sannsynlighet_sum(k):
    mulige = 6**5      # antall mulige kombinasjoner når det kastes 5 terninger
    gunstige = 0       # variabel som teller opp antall gunstige utfall

    # Hver løkke representerer en terning
    for t1 in range(1, 7):
        for t2 in range(1, 7):
            for t3 in range(1, 7):
                for t4 in range(1, 7):
                    for t5 in range(1, 7):

                        # sjekker som summen er større enn 20
                        if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 >= k:
                            gunstige += 1

    # Regner ut sannsynligheten
    return round(gunstige / mulige, 3)


# Definerer startsummen
k = 5

# Kjører løkken så lenge sannsynligheten er større en 0.8
while sannsynlighet_sum(k) > 0.8:
    print(f'P(X ≥ {k})  = {sannsynlighet_sum(k)}')
    k += 1
```

```
P(X ≥ 5)  = 1.0
P(X ≥ 6)  = 1.0
P(X ≥ 7)  = 0.999
P(X ≥ 8)  = 0.997
P(X ≥ 9)  = 0.993
P(X ≥ 10)  = 0.984
P(X ≥ 11)  = 0.968
P(X ≥ 12)  = 0.941
P(X ≥ 13)  = 0.902
P(X ≥ 14)  = 0.848
```

Oppgave 5

Du skal lage en kasse uten lokk. Den skal ha form som et rett prisme. Grunnflaten i kassen skal være kvadratisk. For at vekten ikke skal bli for stor, kan ikke det samlede arealet av platene som brukes til å lage kassen, være mer enn 120 dm^2.

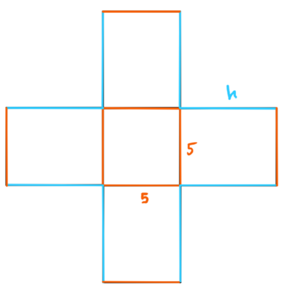
a) Hva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være 5 dm?



Vi skal her finne det maksimale volumet, men hvor vi har fått en arealbegrensning på 120 dm^2.

Det betyr at vi må finne den største høyden, h, esken kan ha uten å overskride arealbegrensningen.

La oss først finne et uttrykk for arealet av det rette prismet, og da kan vi starte med å brette det ut:



Vi ser da at arealet blir

$A = 5^2 + 4 \cdot 5h = 25 + 20h$

Deretter kan vi finne h ved å løse $A = 120$

$A = 120 \Leftrightarrow 25 + 20h = 120 \Leftrightarrow 20h = 95 \;|:20 \Leftrightarrow \boxed{h = 4{,}75}$

For å finne volumet, bruker vi formelen for volum av et rett prisme

$V = Gh$, der G er arealet av grunnflaten. Altså har vi $G = 25$ og $h = 4{,}75$

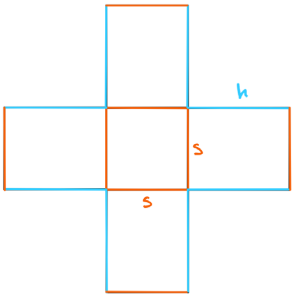
$V = 25 \cdot 4{,}75 = \underline{118{,}75}$

<u>Det største volumet kassen kan ha er 118,75 dm^3</u>

b) Hva er det maksimale volumet kassen kan få?

Vi har fortsatt den samme arealbegrensningen på 120 dm², men nå er ikke sidene i grunnflaten låst til å være 5 dm.

La oss sette sidene i grunnflaten til å være s, slik at arealet av prismet nå blir



$A = s^2 + 4sh$, der $A = 120$ fortsatt er en begrensning.

La oss finn h uttrykt med s, ved å løse $A = 120$

1 $A := s^2 + 4\,s\,h$

→ $\mathbf{A := s^2 + 4\,h\,s}$

2 Løs(A = 120, h)

→ $\left\{h = \frac{-s^2 + 120}{4\,s}\right\}$

Volumet av prismet er gitt ved $V = Gh = s^2 \cdot h$, og nå kan vi sette inn for h

3 $V(s) := s^2 \cdot \frac{-s^2 + 120}{4\,s}$

≈ $\mathbf{V(s) := -0.25\,s^3 + 30\,s}$

Deretter finner vi det maksimale volumet ved å finne toppunktet til V(s).

Det kan vi gjøre ved å bruke ekstremalpunkt('funksjon') kommandoen

4 Ekstremalpunkt(V)

≈ $\{(-6.32, -126.49), (6.32, 126.49)\}$

eller ved å løse $V'(s) = 0$

5 $V'(s) = 0$

NLøs: $\{s = -6.32, s = 6.32\}$

I begge tilfeller ser vi at vi må ekskludere $s = -6.32$ fordi en sidelengde ikke kan være negativ. Det betyr at vi sitter igjen med $s = 6.32$.

Likevel bør vi bruke andrederiverttesten for å forsikre oss om at $s = 6.32$ er et toppunkt:

6 $V''(6.32)$

≈ -9.48

7 $V(6.32)$

≈ 126.49

$V''(6.32) < 0 \Rightarrow s = 6.32$ er et toppunkt

<u>Det største volumet prismet kan få er 126,49 dm³</u>

Du skal lage en slik kasse som rommer 80 dm^3.

c) Hva er det minste samlede arealet platene kan ha, dersom du skal lage en slik kasse?

Nå har vi motsatt situasjon av det vi hadde i oppgave b). Nå er volumet satt til 80dm^3 og så skal vi minimere overflaten.

Arealet er fortsatt gitt ved $A = s^2 + 4sh$ og volumet er gitt ved $V = s^2 \cdot h$

Vi kan finne h uttrykt med s ved å løse V = 80 med hensyn på h, og deretter sette inn dette uttrykket for h inn i $A = s^2 + 4sh$:

1	$A := s^2 + 4\,s\,h$ $\rightarrow$ $\mathbf{A := s^2 + 4\,h\,s}$
2	$V := s^2 \cdot h$ $\approx$ $\mathbf{V := h\,s^2}$
3	Løs(V = 80, h) $\approx$ $\left\{\mathbf{h = \frac{80}{s^2}}\right\}$
4	$A_1(s)$:= ByttUt(A, \$3) $\approx$ $\mathbf{A_1(s) := \frac{s^3 + 320}{s}}$

Nå som vi har funnet et uttrykk for arealet der V = 80 er tatt hensyn til, kan vi finne bunnpunktet til A :

5	Ekstremalpunkt(A_1(s)) $\approx$ $\mathbf{\{(5.429, 88.417)\}}$
6	$A_1''(5.429)$ $\approx$ $\mathbf{6}$

Vi bruker andrederiverttesten for å bekrefte at vi fant bunnpunktet.

Når volumet av det rette prismet er 80dm^3, er 88,417dm^2 den minste overflaten det kan ha

Oppgave 6

La *f* være en tredjegradsfunksjon.

Avgjør for hver av påstandene nedenfor om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

a) Påstand 1:
Grafen til *f* har minst ett ekstremalpunkt.

Dersom f(x) skal ha minst ett ekstremalpunkt, må f '(x) ha minst ett nullpunkt. Det betyr at

$f'(x) = 0$ må ha minst én løsning

Siden f(x) er en tredjegradsfunksjon, vil f '(x) være en andregradsfunksjon.

$f'(x) = ax^2 + bx + c$

Da vet vi at $f'(x) = 0$ ikke alltid har noen løsning:

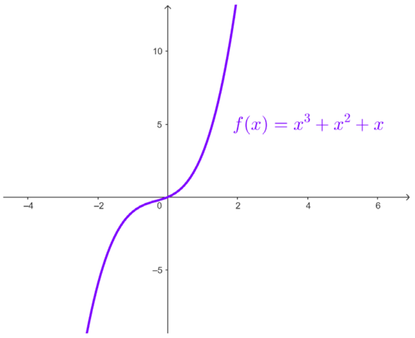
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ har ingen løsning dersom $b^2 - 4ac < 0$

$b^2 - 4ac < 0 \iff b^2 < 4ac$, Siden a både kan være positiv og negativ må vi dele opp ulikheten

$c < -\frac{b^2}{4a}$ hvis $a < 0$

$c > \frac{b^2}{4a}$ hvis $a > 0$

$f'(x) = 0$ har altså ikke minst én løsning, hvilket betyr at $f(x)$ ikke har minst ett ekstremalpunkt



$f(x) = x^3 + x^2 + x$ er et eksempel på en tredjegradsfunksjon uten ekstremalpunkter

Påstanden er usann

b) Påstand 2:
Alle linjer på formen $y = ax + b$, der $a, b \in \mathbb{R}$, vil skjære grafen til f.

Igjen er $f(x)$ en tredjegradsfunksjon. La $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og den rette linjen $g(x) = px + q$

Dersom den rette linjen $g(x)$ skal skjære $f(x)$, må $f(x) = g(x)$ alltid ha en løsning.

Fra før vet vi at en tredjegradsfunksjon har minst ett nullpunkt.
Kort forklart kan vi vise dette ved at

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ eller $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ og $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

I begge tilfeller bytter $f(x)$ fortegn et sted mellom $-\infty$ og ∞ som betyr at den må ha minst ett nullpunkt.

La oss nå igjen se på $f(x) = g(x)$, som må være oppfylt for at linjen skal skjære grafen til $f(x)$

$$f(x) = g(x) \iff \overbrace{f(x) - g(x)}^{h(x)} = 0 \iff ax^3 + bx^2 + cx + d - (px + q) = 0$$

$$\iff ax^3 + bx^2 + cx + d - px - q = 0 \iff \underbrace{ax^3 + bx^2 + (c-p)x + (d-q)}_{h(x)} = 0$$

La $h(x) = f(x) - g(x)$. Da ser vi at $h(x)$ også er en tredjegradsfunksjon, altså må $h(x) = 0$ ha minst én løsning.

Det medfører da at $f(x) = g(x)$ også må ha minst én løsning, altså skjærer den rette linjen, $g(x)$, $f(x)$ i minst ett punkt.

Påstanden er sann

c) Påstand 3:
Dersom grafen til f har et vendepunkt for $x = 3$, er $f'(1) = f'(5)$.

Denne påstanden er sann

Den enkle måten å vise dette på er å se om det finnes et tredjegradspolynom som oppfyller

$$f''(3) = 0 \quad \text{og} \quad f'(1) = f'(5)$$

1	$f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$
2	$f''(3) = 0$ $\rightarrow$ $\mathbf{18\,a + 2\,b = 0}$
3	$f'(1) = f'(5)$ $\rightarrow$ $\mathbf{3\,a + 2\,b + c = 75\,a + 10\,b + c}$
4	{\$2, \$3} Løs: $\left\{\left\{a = \frac{-1}{9}\,b, b = b\right\}\right\}$

Her ser vi at $a = -\frac{1}{9}b$, og at b blir det vi kaller for en fri variabel. c og d har vi ikke nok informasjon til å bestemme, så de kan vi la stå. Da får vi at

$$f(x) = -\frac{1}{9}bx^3 + bx^2 + cx + d$$

La oss sjekke om $f(x)$ oppfyller kravene i påstanden:

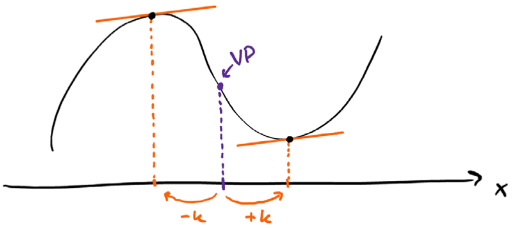
1	$f(x) := -\frac{1}{9}\cdot b\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := \frac{-1}{9}\,b\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$
2	$f''(3)$ $\rightarrow$ $\mathbf{0}$
3	$f'(1) \stackrel{?}{=} f'(5)$ $\rightarrow$ **true**

Her ser vi at $f(x)$ oppfyller kravene i påstanden, og vi har bevist at påstanden er sann

Det vi viste her var at for akkurat denne tredjegradsfunksjonen var stigningen til grafen symmetrisk om x-verdien til vendepunktet. Altså at $f'(1) = f'(5)$ fordi vendepunktet $x = 3$ er midt mellom $x = 1$ og $x = 5$.

Dette kan vi vise at alltid gjelder helt generelt:

1	$f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$
2	$f''(x) = 0$ Løs: $\left\{x = \frac{-b}{3\,a}\right\}$
3	$f'\left(-\frac{b}{3\cdot a} - k\right) \stackrel{?}{=} f'\left(-\frac{b}{3\cdot a} + k\right)$ $\rightarrow$ **true**



Helt generelt er vendepunktet til $f(x)$ alltid $x = -\frac{b}{3a}$.
Her ser vi da at stigningen til $f(x)$ er symmetrisk om vendepunktet