S1 Eksamen H2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

26. november 2023

Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1} &= \frac{\left(3a^2\right)^2}{\left(2b^3\right)^2} \cdot \frac{\left(a^2b^{-5}\right)^{-1}}{4^{-1}} \\
&= \frac{3^2 \cdot a^4}{2^2 \cdot b^6} \cdot \frac{a^{-2} \cdot b^5}{4^{-1}} \\
&= \frac{3^2 \cdot a^4 \cdot a^{-2} \cdot b^5}{4 \cdot 4^{-1} \cdot b^6} \\
&= \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^5}{4^0 \cdot b^6} \\
&= \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^5}{1 \cdot b \cdot b^5} = \frac{9a^2}{b}
\end{aligned}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$\begin{aligned}
2\ln\left(e^3\right) &= 2 \cdot 3 \cdot \ln(e) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \\
e^{3 \cdot ln2} &= e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8 \\
3\lg(70) &= 3 \cdot \lg(7 \cdot 10) = 3 \cdot (\lg(7) + \lg(10)) \\
&= 3 \cdot (\lg(7) + 1) = 3 \cdot \lg 7 + 3 \\
\lg(1) &< \lg 7 < \lg(10) \\
0 &< \lg 7 < 1 \Rightarrow 3 \cdot \lg(70) < 6
\end{aligned}$$

Ut fra analysen over kan vi skrive tallene i stigende rekkefølge slik:

$$3 \cdot \lg 70, \quad 2\ln e^3, \quad e^{31n2}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

Det er 6 mulige utfall for hver terning, så det er totalt $6^3 = 216$ mulige utfall for tre terninger. Det er 6 muligheter for å velge antall øyne på første terning og 5 for andre og 4 for tredje. Antall gunstige utfall blir da $6 \cdot 5 \cdot 4$

$$Sannsynlighet = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall muligeutfall}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} = 0,56$$

Det er 56% sannsynlighet for at nøyaktig to terninger viser samme antall øyne.

b)

Antall mulige utfall er gitt ved $6^3 = 216$

Antall gunstige utfall:

Det er 6 muligheter for å velge det første tallet og 1 mulighet for å velge det andre tallet. Det tallet som skal være forskjellig kan velges på 5 måter. Men alle tre tall kan bytte plass, så vi må multiplisere med 3. La oss kalle de to tallene som er like for x, og det tallet som er forskjellig for y. Da har vi:

$$(x, x, y)$$
$$(x, y, x)$$
$$(y, x, x)$$

Et eksempel når $x = 1$, og y kan da ha verdiene $2, 3, 4, 5, 6$:

$$(1,1,2)\,,\,(1,1,3)\,,\,(1,1,4)\,,\,(1,1,5)\,,\,(1,1,6)$$
$$(1,2,1)\,,\,(1,3,1)\,,\,(1,4,1)\,,\,(1,5,1)\,,\,(1,6,1)$$
$$(2,1,1)\,,\,(3,1,1)\,,\,(4,1,1)\,,\,(5,1,1)\,,\,(6,1,1)$$

Sannsynligheten da blir:

$$\frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{6^3} = \frac{3 \cdot .6 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{3.5}{6.6} = \frac{5}{2 \cdot 6} = \frac{5}{12} = 0,42$$

Det er 42% sannsynlighet for at nøyaktig to terninger viser samme antall øyne.

Oppgave 4 (2 poeng)

En funksjon er kontinuerlig i et punkt hvis grenseverdien fra høyre er lik grenseverdi fra venstre (m.a.o. grenseverdien eksisterer) og den er lik funksjonsverdien i punktet. Denne funksjonen er kontinuerlig overalt (begge delene er polynomer) men vi må sjekke kontinuitet i delingspunktet(x=1).

$$\lim_{x\to 1^+}(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 1 - 1 = 0$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 1^2 + 3\cdot 1 - a^2 = 4 - a^2$$
$$f(1) = 1 - 1 = 0$$
$$4 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

a må være enten 2 eller -2 for at funksjonen skal være kontinuerlig.

Oppgave 5 (2 poeng)

a)

Når programmet kjøres regnes det hvilken produksjonsmengde x gir grensekostnaden på 200 kr per enhet. Vi kan regne den slik:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 2\cdot 0,1x + 100 \\ &= 0,2x + 100 \\ K'(x) &= 200 \\ 0,2x + 100 &= 200 \\ 0,2x = 100 \Rightarrow x &= \frac{100\cdot 10}{0,2\cdot 10} = \frac{100\cdot 10}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \end{aligned}$$

Kostnaden øker med 200 kr når bedriften øker produksjonsmengde fra 500 til 600 enheter.

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (6 poeng)

a)

Vi legger punktene i et regneark i geogebra, lager liste med punkter så bruker vi polynom regresjon av grad 2 som gir oss kostnad funksjon $K(x)$. Vi definerer inntektfunksjon i CAS (rad 1) og overskudd er definert som inntekt minus kostnad (rad 2).

	A	B
1	Antall sofaer	Produksjonskostnader (i tusen kroner)
2	10	270
3	25	550
4	40	870
5	70	1500
6	100	2200
7	140	3300
8	180	4500

Figur 2

Antall sofaer

Produksjonskostnader (i tusen kroner)

$l1 = \{(A2, B2), (A3, B3), (A4, B4), (A5, B5), (A6, B6), (A7, B7), (A8, B8)\}$

$= \{(10, 270), (25, 550), (40, 870), (70, 1500), (100, 2200), (140, 3300), (180, 4500)\}$

$K(x) = \text{RegPoly}(l1, 2)$

$= 0.041\,x^2 + 17.05\,x + 102.695$

Figur 3

1 $I(x) := 28\,x$

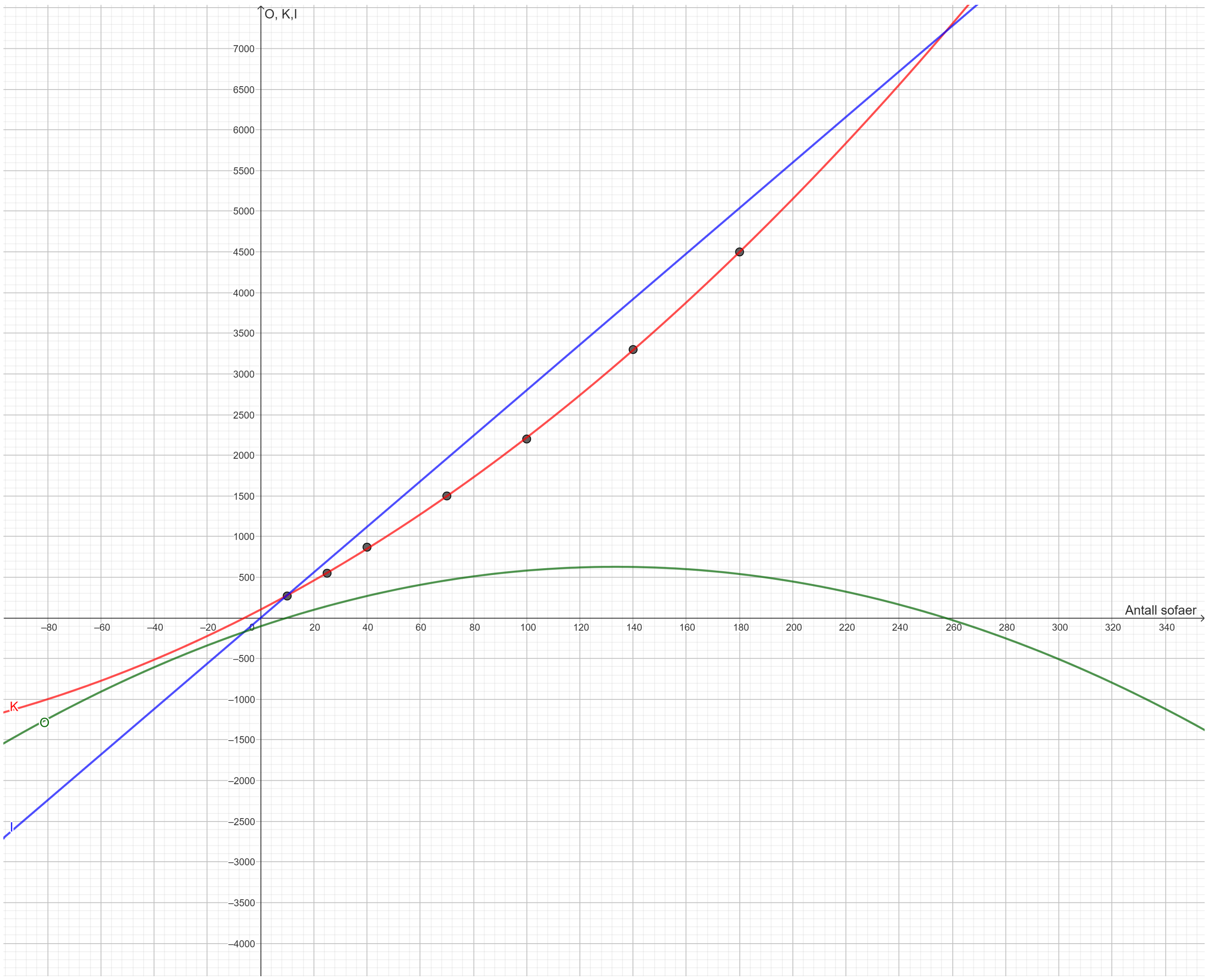
$\approx$ $\mathbf{I(x) := 28\,x}$

2 $O(x) := I(x) - K(x)$

$\approx$ $\mathbf{O(x) := -0.041\,x^2 + 10.95\,x - 102.695}$

Figur 4

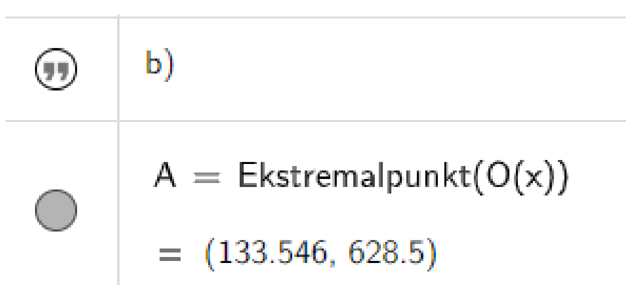
Grafene til kostnads-, inntekt - og overskuddsfunksjonene er vist under:

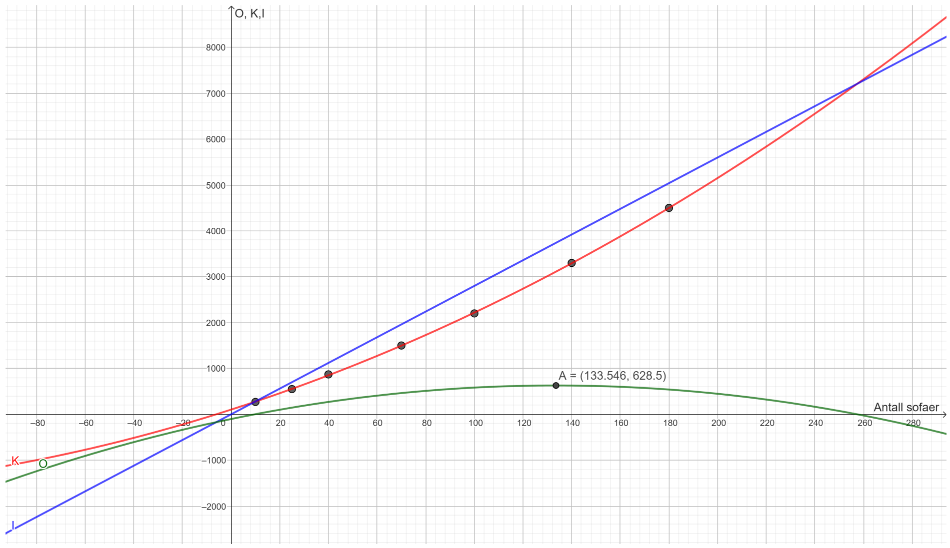


Figur 5

b)

Vi bruker graftegner til å tegne grafene til kostnads-, inntekts- og overskuddfunksjonene så bruker kommando Ekstremalpunkt (funksjon) for å finne toppunktet (se utklippene under).





Figur 6

Bedriften må produsere 134 sofaer for at overskuddet skall være størst.

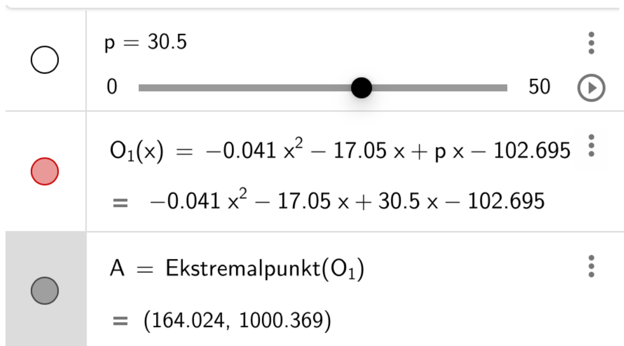
c)

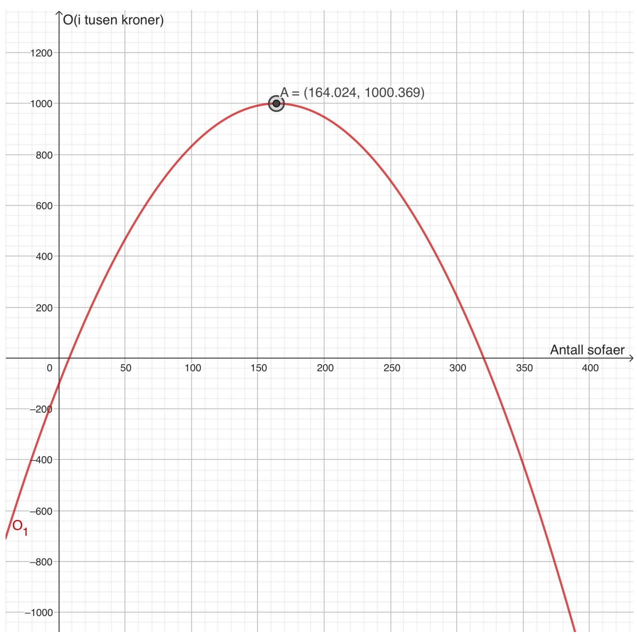
Vi lager en ny inntektsfunksjon (rad 4) og setter prisen ukjent lik p så lager vi en ny overskuddsfunskjon (rad 5). Vi løser ligningene i rad 6 (overskudd er 1000 tusen kroner) og rad 7 (Overskuddet er størst) sammen og da får vi at prisen må være minst på $30,497$ tusen kroner for at overskuddet skal være på 1 million.

3	c)
4	$I_1(x) := p\,x$ $\approx\ \mathbf{I_1(x) := p\,x}$
5	$O_1(x) := I_1(x) - K(x)$ $\approx\ \mathbf{O_1(x) := -0.041\,x^2 + p\,x - 17.05\,x - 102.695}$
6	$O_1(x) = \frac{1000000}{1000}$ $\approx\ \mathbf{p\,x - 0.041\,x^2 - 17.05\,x - 102.695 = 1000}$
7	$\text{Derivert}(O_1(x)) = 0$ $\approx\ \mathbf{p - 0.082\,x - 17.05 = 0}$
8	$\text{Løs}(\{\$6, \$7\}, \{p, x\})$ $\approx\ \mathbf{\{\{p = 30.497, x = 163.999\}, \{p = 3.602, x = -163.999\}\}}$

Figur 7

Vi kunne også løst oppgaven ved å lage en glider for prisen p og endre den til overskuddet blir tusen (altså 1 million siden alt er oppgitt i tusen kroner).





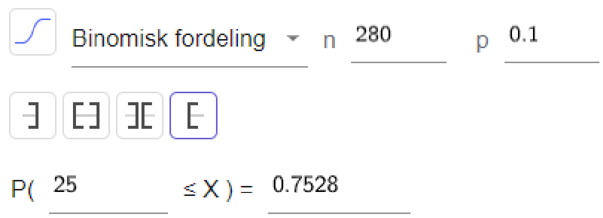
Oppgave 2 (6 poeng)

a)

Det er binomisk fordeling fordi

1. vi har to mulige utfall (venstrehendt eller ikke venstrehend) for hver person.
2. det at en person er venstrehendt eller ikke venstrehendt påvirker ikke at neste person er det.
3. sannsynligheten for å være venstrehendt er det samme for hvert individ.

Vi bruker sannsynlighetskalkulator i geogebra:

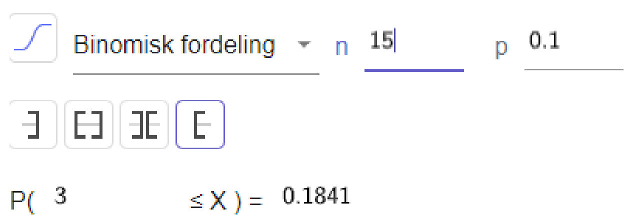


Figur 8

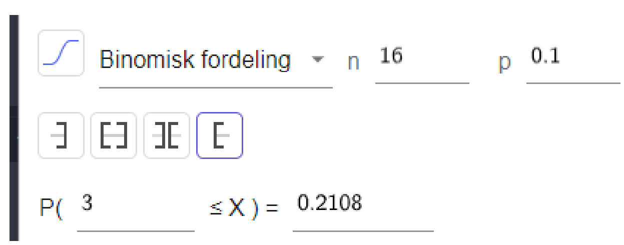
Sannsynligheten for at minst 25 av guttene er venstrehendte er 75%

b)

Vi tester med ulike tall for antall gutter i klassen via sannsynlighetskalkulator i geogebra til sannsynligheten blir 20%:



Figur 9: n=15



Figur 10: n=16

Fra utklippene over ser vi at når det er 15 gutter i klassen er sannsynligheten for at minst tre av dem er venstrehendte er $18,41\%$. Vi tester derfor med $n = 16$ og da blir sannsynligheten $21,08\%$. Det må være minst 16 gutter i klassen.

Vi kan bruke også Python for å løse oppgaven:

```
1  from scipy.stats import binom
2
3  n = 1
4  p = 0.1
5  Sannsynlighet=0.2 # Ønsket sannsynlighet
6  X = 3
7  while (1 - binom.cdf(X - 1, n, 0.1))<Sannsynlighet:
8      n=n+1
9  print(n)
10
```

```
16
```

Figur 11

I linje 5 regner vi $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

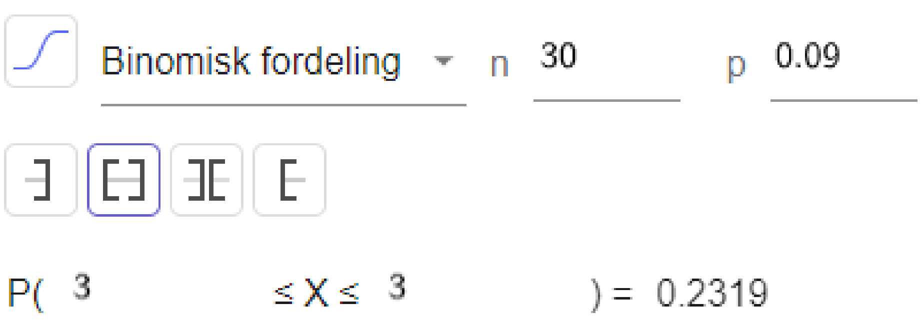
c)

Først må vi regne ut sannsynligheten for at et menneske er venstrehendt uavhengig om det er mann eller kvinne.

sannsynligheten for at et menneske er venstrehendt=P(mann) $\cdot$ P(venstrehendt gitt at det er mann) + P(kvinne)$\cdot$ P(venstrehendt gitt at det er kvinne)

$$= 50\% \cdot 10\% + 50\% \cdot 8\% = 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.08 = 0.09$$

Vi bruker sannsynlighetskalkulator i geogebra:



Figur 12

Fra utklippet over ser vi at sannsynligheten for at tre av elevene i klassen er venstrehendte er 23.19% .

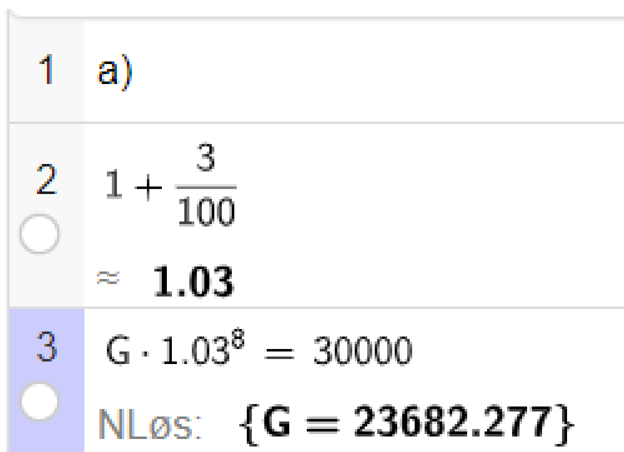
Oppgave 3 (6 poeng)

a)

Vi har

$$\begin{aligned} \text{Ny Verdi } &= \text{Gammel Verdi} \cdot \text{Vekstfaktor}^{\textit{antall perioder}} \\ N &= G \cdot V^n \end{aligned}$$

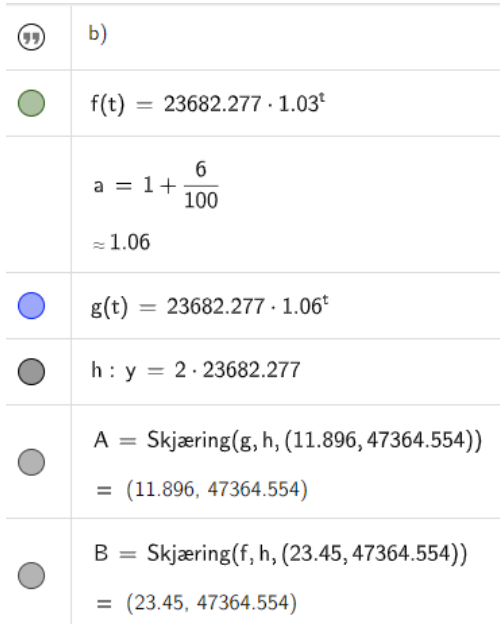
Vi bruker Cas. Vi finner først vekstfaktor (rad 2) så løser vi ligningen for G og finner at han må sette 23682,277 kr i banken nå for å få 30000kr i banken om 8 år.



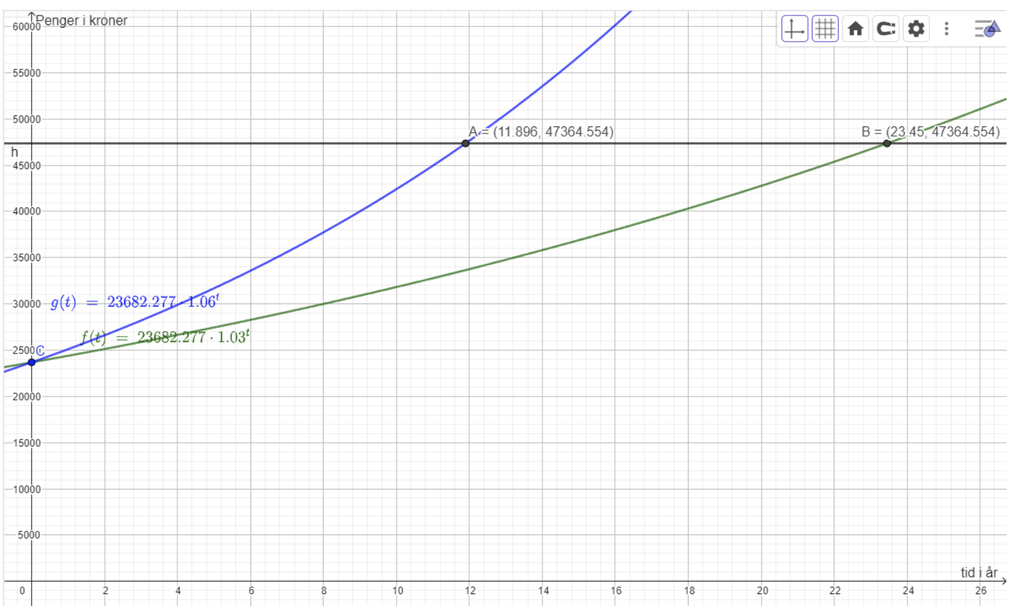
Figur 13

b)

La $f(t), g(t)$ være funksjoner som gir oss hvor mye penger Per og Kåre har på konto etter t år respektivt. Vi finner skjæring mellom grafene til begge funksjonene og linjen $y = 2 \cdot 23682,277$ via graftegner i geogebra.



Figur 14



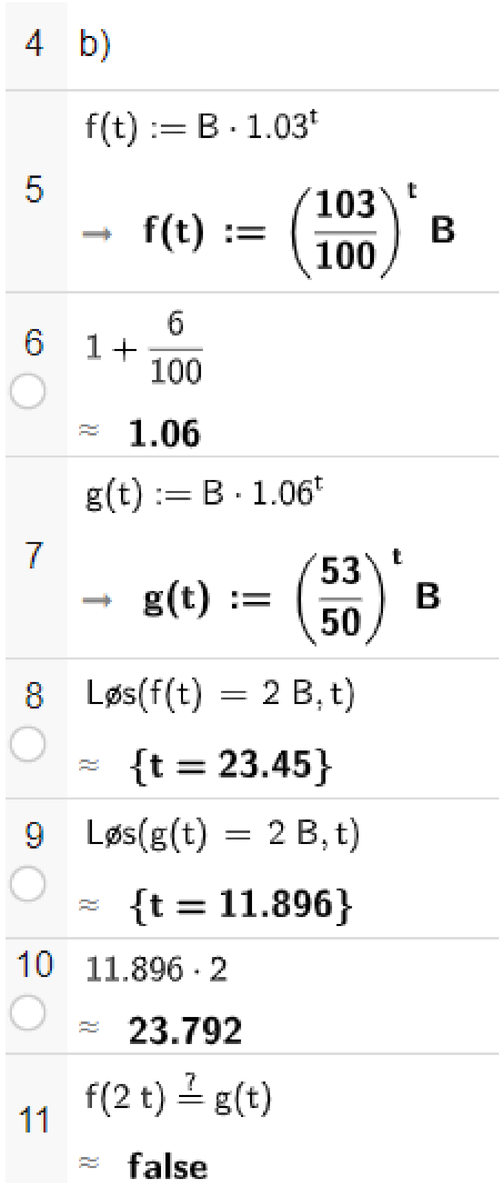
Figur 15

Fra utklippene ser vi at beløp til Per fordobler seg etter $23,45$ år mens til Kåre etter $11,896$ og

$$2 \cdot 11,896 = 23.792 \neq 23,45$$

Over har vi antatt at de hadde $23682,277\,Kr$ hver på konto i starten.

Vi kunne også løst oppgaven ved å bruke betingelse sjekking i geogebra (rad 11) eller på generell basis (start beløpet er ukjent B) (rad 8,9,10):



Figur 16

c)

Jeg forstår at oppgaven ber oss om å finne når Per og Kåre til sammen skal ha dobbelt så mye på konto som de til sammen satte på konto i starten. Jeg lar beløpet de satte på konto i starten være B og da må vi løse ligningen:

$$\begin{aligned} g(t) + g(t) &= 2B + 2B \\ B \cdot 1.03^t + B \cdot 1.06^t &= 4B \\ 1.03^t + 1.06^t &= 4 \end{aligned}$$

12	c)
13	Løs(f(t) + g(t) = 2 B + 2 B, t) → {?}
14	$1.03^t + 1.06^t = 4$ NLøs: **{t = 15.243}**

Figur 17

CAS vil ikke løse første ligningen og derfor måtte jeg forenkle den først. Fra utklippene i ser vi at det vil ta litt over 15 år for at Per og Kåre skal ha dobbelt å mye penger på konto som de hadde på konto i starten.

Oppgave 4 (6 poeng)

a)

Vi kan bruke denne koden

```python

from random import randint
N=1000000 # antall forsøk
gunstige=0
for i in range(N):
    a=randint(1,6) # Tering 1 (vi får et tilfeldig tall mellom 1 og 6 inkludert 1 og 6)
    b=randint(1,6) #Tering 2
    c=randint(1,6) # Tering 3
    d=randint(1,6) # Tering 4
    e=randint(1,6) # Tering 5
    if a==b or a==c or a==d or a==e or b==c or b==d or b==e or c==d or c==e or d==e: # minst to antall øyne er like
        gunstige=gunstige+1  # Summere antall gunstige utfall

print(gunstige/N)           #regne sannsynlighet (gunstige/mulige)

```

```
0.907643
```

Figur 18

eller denne som kjører fortere:

```python
1  from itertools import product
2
3  # Alle mulige kombinasjoner av øyne på 5 terninger
4  MuligeUtfall = list(product(range(1, 7), repeat=5))
5
6  # Antall gunstige utfall (Minst to terning viser samme antall øyne)
7  GunstigeUtfall= sum(1 for utfall in MuligeUtfall if len(set(utfall)) <5)
8
9  # Totalt antall utfall
10 AntallMuligeUtfall = 6**5
11
12 # Sannsynligheten for at minst to terninger viser samme antall øyne
13 Sannsynlighet = GunstigeUtfall/AntallMuligeUtfall
14
15 print(f"Sannsynlighet for minst to terninger viser samme antall øyne: {Sannsynlighet:.4f}")
```

```
Sannsynlighet for minst to terninger viser samme antall øyne: 0.9074
```

Figur 19

b)

Vi kan bruke denne Python-koden:

```python
from random import randint
N=1000000 # antall forsøk
gunstige=0
for i in range(N):
    a=randint(1,6) # Tering 1 (vi får et tilfeldig tall mellom 1 og 6 inkludert 1 og 6)
    b=randint(1,6) #Tering 2
    c=randint(1,6) # Tering 3
    d=randint(1,6) # Tering 4
    e=randint(1,6) # Tering 5
    if a+b+c+d+e >20: # sum av antalløyne er større enn 20
        gunstige=gunstige+1  # Summere antall gunstige utfall

print('Sannsynligheten for  at X>20 = ',gunstige/N)          #regne sannsynlighet (gunstig/mulige)
```

```
Sannsynligheten for  at X>20 =  0.221731
```

Figur 20

I linje 7 har jeg brukt Set som ikke godtar gjentakende verdier (duplikater) og derfor kan vi bruke len () funksjon for å sjekke om to tall er like. Naturligvis hvis lengden av set er mindre enn 5 da er det minst to gjentatte verdier.

c)

Vi lager en funksjon som gir oss sannsynlighet med k som input så kjører vi den mellom k=0 til K=30 som er største sum for antall øyne på 5 terninger:

```
from random import randint
def Sannsynlighet(k):
    # Alle mulige kombinasjoner av øyne på 5 terninger
    MuligeUtfall = list(product(range(1, 7), repeat=5))

    # Antall gunstige utfall (Minst to terning viser samme antall øyne)
    GunstigeUtfall= sum(1 for utfall in MuligeUtfall if sum(utfall) >k)

    # Totalt antall utfall
    AntallMuligeUtfall = 6**5

    # Sannsynligheten for at minst to terninger viser samme antall øyne
    P = GunstigeUtfall/AntallMuligeUtfall
    return P

for k in range(5*6+1):
    if Sannsynlighet(k)>0.8 and Sannsynlighet(k)<0.9:
        print ('Den største verdien for k er' ,k,'og sannsynligheten er da ',Sannsynlighet(k))

Den største verdien for k er 13 og sannsynligheten er da  0.8479938271604939
```

Figur 21

Oppgave 5 (6 poeng)

a)

Vi løser oppgaven i CAS:

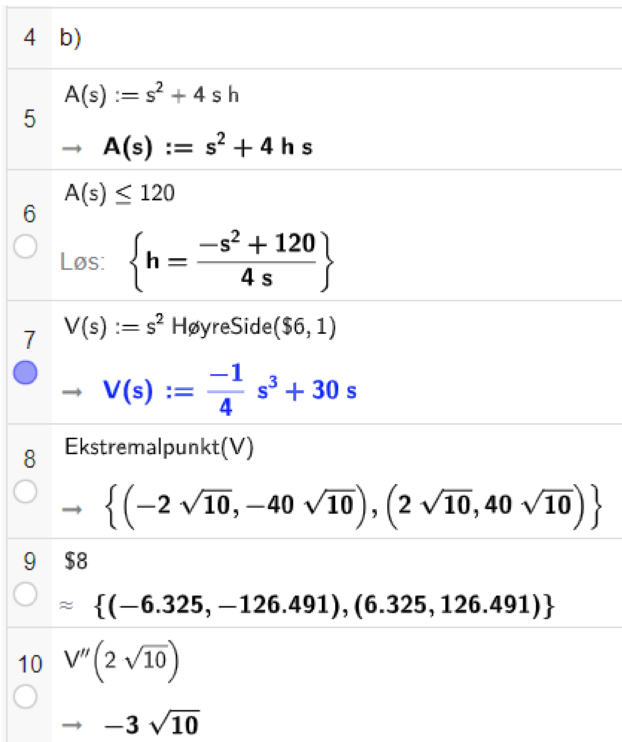
La h stå for høyden av kassen og s for sidelengde på kvadratet i grunnflaten. Samlede areal er arealet av grunnflaten + arealene av de 4 like sideflatene og dette skal være mindre enn eller lik 120 (se rad 1 og 2). Størst volum er regnet i rad 3 og det er på $118,75\,dm^3$

1. $5^2 + 4 \cdot 5\,h \leq 120$
   Løs: $\left\{h \leq \frac{19}{4}\right\}$
2. $1
   $\approx \{h \leq 4.75\}$
3. VolumKasse $:= 5^2 \cdot 4.75$
   $\approx$ **VolumKasse := 118.75**

Figur 22

b)

Vi definerer en samlede areal funksjon (rad 5), så bruker vi at samlede areal $\leq 120\,dm^2$ til å regne høyden uttrykt ved sidelengden i grunnflaten (rad 6). Deretter definerer vi en funksjon for volumet av kassen uttrykt med s (rad 7) . Vi finner ekstremalpunkter for funksjonen og får to løsninger, men vi godtar kun den positive løsningen (rad 8). Vi kan bekrefte at punktet $s = 6,325$ er et toppunkt via andrederiverttest (rad 10). Det maksimale volumet kassen kan få er på $126,491\,dm^3$ (rad 9)



Figur 23

c)

Vi bruker CAS til finne høyden uttrykt ved sidelengden s (se rad 12) og definerer en ny samlede areal funksjon $A_1(s)$ ved å bytte h i $A(s)$.Vi deriver $A_1(s)$ og setter den lik null for å finne bunnpunktet(rad 14). Vi bekrefter bunnpunktet ved bruk av andrederiverttest (rad 16). Det minste samlede arealet er $88,417\,dm^2$ (rad 15)

11 c)

12 $80 = s^2 h$

Løs: $\left\{ h = \frac{80}{s^2} \right\}$

13 $A_1(s) := \text{ByttUt}(A(s), \$12)$

$\rightarrow \; A_1(s) := s^2 + \frac{320}{s}$

14 $A_1'(s) = 0$

Løs: $\left\{ s = 2 \sqrt[3]{20} \right\}$

15 $A_1(\text{HøyreSide}(\$14, 1))$

$\approx \; 88.417$

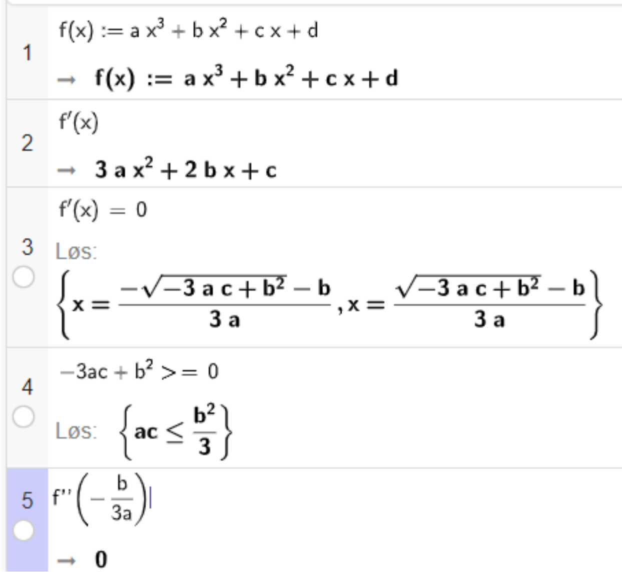
16 $A_1''(\text{HøyreSide}(\$14, 1))$

$\rightarrow \; 6$

Oppgave 6 (6 poeng)

a)

Påstanden er ikke sann. Den generelle formen på en tredjegradsfunksjon er gitt i rad 1. Vi ser at den kan ha maks 2 ekstremalpunkter fordi den deriverte er andre gradspolynom og den kan ha enten et nullpunkt, 2 nullpunkter eller ingen i R avhengig av utrykket under kvadratrot tegnet. Hvis utrykket under rottegnet er negativt er det ingen ekstremalpunkter, hvis det er null har funksjon et terrasepunkt (se rad 5) og hvis det er positivt har funksjonen et toppunkt og et bunnpunkt (rad 3).



Figur 24

Et enklere metode ville vært å komme med et moteksempel:

La $f(x)$ være oppgitt ved $f(x) = x^3$. Den deriverte blir $f'(x) = x^2 > 0$ er null i $x = 0$ men skifter ikke fortegn der.Dermed har funksjonen ingen ekstremalpunkter og påstanden blir feil.

b)

Påstanden er sann. $f(x)$ er et polynom av tredjegrads, da er den kontinuerlig og har $\mathbf{R}$ som definisjonsmengde og verdimengde. En rettlinje$y = ax + b$ har også $\mathbf{R}$ som definisjonsmengde og verdimengde , da må de skjære hverandre i minst et punkt.

c)

Påstanden er sann. Vi finner den dobbeltderiverte og setter den lik null i $x = 3$ og da finner vi en sammenheng mellom a og b (rad 11). Vi bytter ut for a og sjekker likheten via geogebra og ser at påstanden er riktig.

9	c)
10	$f''(x)$ $\rightarrow$ $\mathbf{6\,a\,x + 2\,b}$
11	$f''(3) = 0$ Løs: $\left\{ \mathbf{a = \frac{-1}{9}\,b} \right\}$
12	$f'(1)$ $\rightarrow$ $\mathbf{3\,a + 2\,b + c}$
13	$f'(5)$ $\rightarrow$ $\mathbf{75\,a + 10\,b + c}$
14	ByttUt(f′(1), \$10) $\stackrel{?}{=}$ ByttUt(f′(5), \$10) $\rightarrow$ **true**

Figur 25