S1 EKSAMEN HØST 2023 LØSNINGSFORSLAG

REALFAGSPORTALEN

Løsningsforslag til de fleste oppgavene er mer utfyllende enn det som kreves på eksamen, og er ment for å kunne gi litt mer læringsutbytte utover en ren fasit.

Innhold

DEL 1

Oppgave 1

Skriv så enkelt som mulig.

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2b^{-5}}{4}\right)^{-1} = \frac{\left(3a^2\right)^2}{\left(2b^3\right)^2} \cdot \left(\frac{4}{a^2b^{-5}}\right) = \frac{3^2a^{2\cdot 2}}{2^2b^{3\cdot 2}} \cdot \frac{4}{a^2b^{-5}} = \frac{9a^4}{4b^6} \cdot \frac{4}{a^2b^{-5}}$$

$$= \frac{9a^2}{b^6} \cdot \frac{1}{b^{-5}} = \frac{9a^2 \cdot 1}{b^6 \cdot b^{-5}} = \frac{9a^2}{b^{6-5}} = \frac{9a^2}{b^1} = \underline{\underline{\frac{9a^2}{b}}}$$

Oppgave 2

Skriv uttrykkene nedenfor i stigende rekkefølge.

$2\ln e^3 \quad , \quad 3\lg 70 \quad , \quad e^{3\ln 2}$

Husk å begrunne svaret.

Vi starter med å forenkle uttrykkene hver for seg:

- $2\ln e^3 = 3 \cdot 2\ln e = 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $3\lg 70 = 3\lg(10 \cdot 7) = 3(\lg 10 + \lg 7) = 3(1 + \lg 7) = \mathbf{3 + 3\lg 7}$
- $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = \mathbf{8}$

Vi må nå finne ut om $3\lg 70$ er større eller mindre enn $2\ln e^3$

$\lg 7 < \lg 10 \Longrightarrow 3 + 3 \cdot \lg 7 < 3 + 3 \cdot \lg 10 = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \Longrightarrow 3\lg 70 < 2\ln e^3$

Uttrykkene i stigende rekkefølge blir da

$\underline{\underline{3\lg 70\ ,\ 2\ln e^3\ ,\ e^{3\ln 2}}}$

Oppgave 3

Du kaster tre terninger.

a) Bestem sannsynligheten for at alle terningene viser forskjellig antall øyne.

Vi kaster 3 terninger og skal finne sannsynligheten for at alle terningene er forskjellige. Denne sannsynligheten kan vi løse som

$$P(\text{alle terninger er ulike}) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}}$$

$\#mulige$ er alle mulige kombinasjoner vi kan få med 3 terninger, altså er

$$\#mulige = 6 \cdot 6 \cdot 6$$

$\#gunstige$ er alle gunstige kombinasjoner der terningene er ulike. Det betyr at første terning har 6 muligheter, andre terning har 5 muligheter, og tredje terning har 4 muligheter

$$\#gunstige = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Da får vi til slutt sannsynligheten

$$P(\text{alle terninger er ulike}) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 6} = \frac{5}{3 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av terningene viser samme antall øyne.

Her skal vi finne sannsynligheten for at nøyaktig 2 av 3 terninger er like.

Her må vi, i tillegg til å finne sannsynligheten for at 2 ternigner er like, ta hensyn til antall måter dette kan skje på. Dette kan vi enten gjøre manuelt

- terning 1 og 2 er like
- terning 1 og 3 er like
- terning 2 og 3 er like

eller ved å betrakte dette mer analytisk. Antall måter to like terninger kan forekomme, er antall måter 2 like terninger kan plasseres ut på 3 plasser, altså

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = \frac{3}{1} = 3$$

Nå som vi har tatt hensyn til antall måter 2 av 3 terninger kan være like på, kan vi se på sannsynligheten for et spesifikt utfall der 2 av 3 terninger er like, for eksempel at de to første terningene er like

Dersom de to første terningene skal være like, kan vi tenke på følgende måte: Den første terningen har 6 mulige utfall, mens den andre terningenen kun vil ha ett mulig utfall ettersom den skal være lik den første terningen. Den tredje terningen skal være ulik de to første, og har derfor 5 mulige utfall.

Antall gunstige utfall blir da $6 \cdot 1 \cdot 5$.
Antall mulige utfall er fortsatt $6 \cdot 6 \cdot 6$
Sannsynligheten for at 2 av 3 terninger er like, er gitt ved

$$P(\text{2 av 3 terninger er like}) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

Vi kunne også ha løst denne oppgaven ved å se på utfallsrommet

$U = \{\text{0 like}, \text{2 like}, \text{3 like}\}$

Fra dette ser vi at

$$P(\text{0 like}) + P(\text{2 like}) + P(\text{3 like}) = 1 \iff P(\text{2 like}) = 1 - P(\text{0 like}) - P(\text{3 like})$$

der

$$P(\text{0 like}) = P(\text{ingen like}) = \frac{5}{9} \quad \text{og} \quad P(\text{3 like}) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$$

Vi har dermed at

$$P(\text{2 like}) = 1 - P(\text{0 like}) - P(\text{3 like}) = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$$

Oppgave 4

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - a^2, & x < 1 \\ x - 1\ , & x \geq 1 \end{cases}.$$

Bestem a slik at funksjonen blir kontinuerlig.

La oss starte med å kalle $f_1(x) = x^2 + 3x - a^2$ og $f_2(x) = x - 1$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 1 \\ f_2(x), & x \geq 1 \end{cases}$$

Vi vet at $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er kontinuerlige fordi de er polynomfunksjoner. Det er derfor bruddpunktet $x = 1$ til $f(x)$ som bestemmer om $f(x)$ er kontinuerlig eller ikke. Altså må

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

for at $f(x)$ skal være kontinuerlig.

Siden $f_1(x)$ ikke er definert for $x = 1$, mens $f_2(x)$ er det, må altså følgende være oppfylt for at $f(x)$ skal være kontinuerlig

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f_1(x) = f_2(1) &\iff \lim_{x \to 1} x^2 + 3x - a^2 = 1 - 1 \\ &\iff 1^2 + 3 \cdot 1 - a^2 = 0 \\ &\iff 4 - a^2 = 0 \\ &\iff a^2 = 4 \\ &\iff a = \pm 2 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er kontinuerlig dersom } a = -2 \text{ eller } a = 2}}$

Oppgave 5

En bedrift produserer en vare. De daglige kostnadene K (i kroner) ved produksjon av x enheter av varen er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 100x + 9000\,.$$

Den økonomiansvarlige i bedriften har laget programmet nedenfor.

```python
def K(x):
    return 0.1*x**2 + 100*x + 9000

grense = 200
h = 0.00001
a = 1

while (K(a + h) - K(a))/h < grense:
    a = a + 1

print(a)
```

Hva blir resultatet når programmet kjøres? Gi en praktisk tolkning av svaret.

```python
def K(x):
    return 0.1*x**2 + 100*x + 9000

grense = 200
h = 0.00001
a = 1

while (K(a + h) - K(a)) / h < grense:
    a = a + 1

print(a)
```

Definerer kostnadsfunksjonen

Setter grensekostnaden vi er interessert i

Definerer intervallbredden til den numeriske derivasjonen

Setter x-verdien while-løkken skal starte på

Kjører while-løkken inntil vi har funnet x-verdien slik at grensekostnadener 200 kr

Uttrykket til den deriverte

Printer ut x-verdien der grensekostnaden til bedriften er 200 kr

Vi kjenner igjen uttrykket $\frac{K(a+h)-K(a)}{h}$ som uttrykket til den deriverte. Vi husker også at $K'(x)$ kalles for grensekostnaden, altså kostnaden for å produsere én ekstra vare. Variabelen *grense* representerer da grensekostnaden, og programmet finner altså den x-verdien slik at grensekostnaden er 200 kr.

For å finne denne x-verdien må først finne $K'(x)$

$$K(x) = 0.1x^2 + 100x + 9000 \iff K'(x) = 0.2x + 100$$

og deretter løse likningen $K'(x) = 200$

$$K'(x) = 200 \iff 0.2x + 100 = 200 \iff 0.2x = 100 \iff x = 500$$

Når bedriften produserer 500 varer, koster det 200 kr å produsere én ekstra vare.

DEL 2

Oppgave 1

En møbelfabrikk produserer en type sofaer. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall sofaer de produserer per måned, og produksjonskostnadene per måned.

Antall sofaer	10	25	40	70	100	140	180
Produksjonskostnader (i tusen kroner)	270	550	870	1500	2200	3300	4500

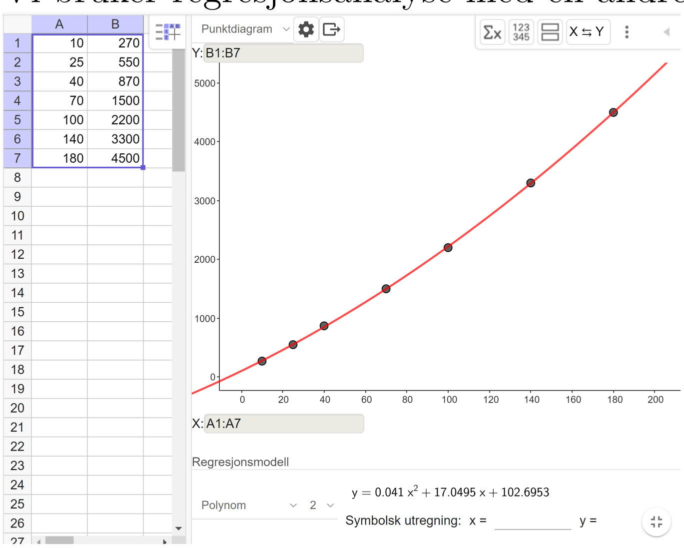
Fabrikken selger alle sofaene til en møbelkjede. De får 28 000 kroner per sofa.

a) Bruk opplysningene ovenfor til å vise at funksjonen O gitt ved

$$O(x) = -0{,}041x^2 + 11x - 103$$

er en god modell for det månedlige overskuddet (i tusen kroner) til fabrikken, dersom de produserer x sofaer.

Vi bruker regresjonsanalyse med en andregrads regresjonsmodell



Kostnadsfunksjonen blir da $K(x) = 0.041x^2 + 17x + 103$.

Produksjonskostnadene er oppgitt i tusen kroner, og vi må derfor oppgi salgsinntektene i tusen kronerogså. Møbelfabrikken selger sofaene for 28 000 kr per stykk, og inntektsfunksjonen blir derfor $I(x) = 28x$

Overskuddet blir dermed

$$O(x) = I(x) - K(x) = 28x - (0.041x^2 + 17x + 103) = \underline{\underline{-0.041x^2 + 11x - 103}}$$

b) Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd?

For å finne størst mulig overskudd må vi finne toppunktet til $O(x)$. Det kan vi gjøre på to måter:

(1) Ved å bruke ekstremalpunktkommandoen i CAS

1 $O(x) := -0.041x^2 + 11x - 103$

$\approx$ $\mathbf{O(x) := -0.041\ x^2 + 11\ x - 103}$

2 Ekstremalpunkt(O)

$\approx$ $\mathbf{\{(134.146, 634.805)\}}$

(2) Ved å løse $O'(x) = 0$ i CAS

1 $O(x) := -0.041\ x^2 + 11\ x - 103$

$\approx$ $\mathbf{O(x) := -0.041\ x^2 + 11\ x - 103}$

2 $O'(x) = 0$

NLøs: $\mathbf{\{x = 134.146\}}$

Vi ser at svarene blir de samme, nemlig $x = 134$.
Men vi må bruke andrederiverttesten for å bekrefte at ekstremalpunktet vi fant, faktisk er et toppunkt

3 $O''(134)$

$\approx$ $\mathbf{-0.082}$

$$O''(134) < 0 \implies x = 134 \text{ er et toppunkt.}$$

Overskuddet er størst når fabrikken produserer og selger 134 sofaer.

Fabrikken ønsker at overskuddet skal være 1 million kroner per måned. De vil derfor endre salgsprisen på sofaene.

c) Bestem den laveste salgsprisen de kan sette per sofa, dersom de skal få dette overskuddet.

Vi husker at kostnad, inntekt og overskudd regnes i tusen kroner, og overskuddet på 1 million kroner kan derfor skrives som 1000.

Vi skal altså ha at $O(x) = 1000$, men nå skal vi sette salgsprisen så lavt som mulig. Det betyr at inntekten nå vil være gitt ved

$$I(x) = p \cdot x \quad \text{, der } p \text{ er prisen på sofaen}$$

med $K(x) = 0.041x^2 + 17x + 103$ blir nå overskuddet

1	$I(x) := p \cdot x$ $\approx$ **$I(x) := p\,x$**
2	$K(x) := 0.041x^2 + 17x + 103$ $\approx$ **$K(x) := 0.041\,x^2 + 17\,x + 103$**
3	$O(x) := I(x) - K(x)$ $\approx$ **$O(x) := -0.041\,x^2 + p\,x - 17\,x - 103$**

Vi ønsker nå at prisen p skal være slik at det maksimale overskuddet skal være 1000. Altså må vi først løse $O'(x) = 0$ med hensyn på x, for å finne det antallet sofaer som maksimerer overskuddet

4	Løs$(O'(x) = 0, x)$ $\approx$ **$\{x = 12.195\,p - 207.317\}$**

Vi vet altså nå at det maksimale overskuddet inntreffer når antall produserte og solgte sofaer er gitt ved $x = 12.195p - 207.317$.
Setter vi dette inn i $O(x)$ får vi uttrykket til det maksimale overskuddet, uttrykt ved salgsprisen p

5	$O_{maks} := O(12.195 \cdot p - 207.317)$ $\approx$ **$O_{maks} := 6.098\,p^2 - 207.317\,p + 1659.195$**

Og til slutt kan vi nå løse $O_{maks} = 1000$ for å finne den laveste prisen som gir 1 million kroner i overskudd

6 $O_{maks} = 1000$

NLøs: $\{p = 3.55, p = 30.45\}$

Da får vi to priser $p_1 = 3.55$ og $p_2 = 30.45$
Setter vi prisene inn i uttrykket for antall solgte sofaer får vi

$$x_1 = 12.195 \cdot 3.55 - 207.317 = -164$$
$$x_2 = 12.195 \cdot 30.45 - 207.317 = 164$$

Vi ser at $p_1 = 3.55$ gir at det må produseres og selges et negativt antall sofaer, mens $p_2 = 30.45$ gir et postivt antall. Det er derfor kun prisen $p_2 = 30.45$ som er en gyldig pris.

Den laveste prisen fabrikken kan ha dersom overskuddet skal være
1 million kroner, er 3 045 kr per sofa.

Oppgave 2

Undersøkelser viser at 10 prosent av alle menn og 8 prosent av alle kvinner er venstrehendte.

På en skole er det 280 gutter og 220 jenter.

a) Bestem sannsynligheten for at minst 25 av guttene på skolen er venstrehendte.

Vi får vite at

$$P(\text{gutt er venstrehendt}) = 0.10 \quad \text{og} \quad P(\text{jente er venstrehendt}) = 0.08$$

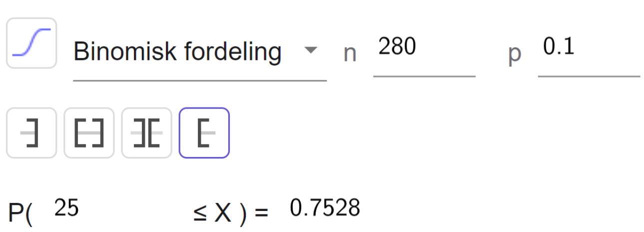
Videre kan vi definere hendelsene

X : antall gutter på skolen som er venstrehendte
Y : antall jenter på skolen som er venstrehendte

Det første vi må gjøre før vi kan regne på sannsynligheten er å fastslå at dette er en binomisk fordeling. Dette vet vi fordi

(1) En gutt er enten venstrehendt (suksess) eller ikke (ikke-suksess)
(2) $P(\text{suksess}) = 0.10$ og $P(\text{ikke-suksess}) = 1 - 0.10 = 0.90$
(3) Om en gutt er venstrehendt eller ikke, er uavhengig av de andre

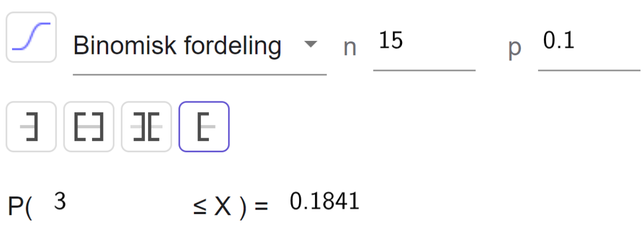
I denne oppgaven skal vi altså finne $P(X \geq 25)$, og det kan vi gjøre med sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra

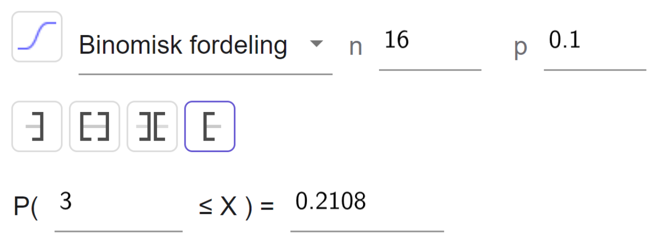


<u>Sannsynligheten for at minst 25 gutter på skolen er venstrehendte, er 0.7528</u>

b) Hvor mange gutter må det være i en klasse dersom sannsynligheten for at minst tre av guttene er venstrehendte, skal være større enn 20 prosent?

For å finne ut av hvor mange gutter det må være i en klasse for at $P(X \geq 3) > 0.20$, kan vi øke n i sannsynlighetskalkulatoren helt til sannsynligheten bikker 0.20





Her ser vi at det må være 16 eller flere gutter i en klasse for at det skal være mer enn 20% sannsynlighet for at minst 3 gutter er venstrehendte.

I en klasse er det 13 gutter og 17 jenter.

c) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig tre av elevene i klassen er venstrehendte.

For å finne sannsynligheten for at nøyaktig tre elever i klassen er venstrehendte, må vi først finne sannsynligheten for at tilfeldig elev er venstrehendt.

Sannsynligheten for at gutter og jenter er venstrehendte har vi allerede fått oppgitt i oppgaven, og sannsynligheten for at en elev er gutt eller jente, er rett og slett andelen av gutter og jenter i klassen.

Vi har derfor

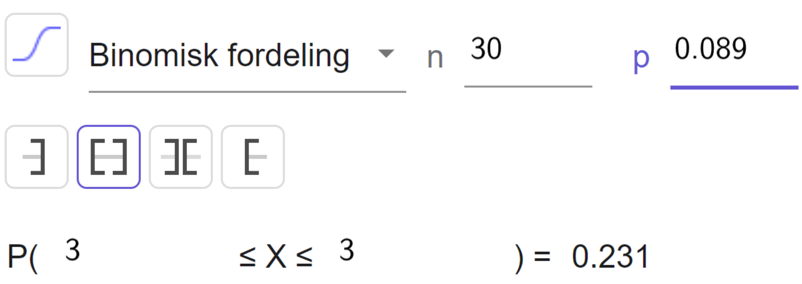
$$P(\text{gutt er venstrehendt}) = 0.10 \quad P(\text{gutt}) = \frac{13}{30}$$
$$P(\text{jente er venstrehendt}) = 0.08 \quad P(\text{jente}) = \frac{17}{30}$$

For å finne sannsynligheten for at en tilfeldig elev er venstrehendt, må vi multiplisere sannsynligheten for at en gutt er venstrehendt med andelen gutter i klassen, og multiplisere sannsynligheten for at en jente er venstrehendt med andelen jenter i klassen, og deretter legge dette sammen.

Dette gir oss

$$
\begin{aligned}
P(V) &= P(\text{gutt er venstrehendt}) \cdot P(\text{gutt}) + P(\text{jente er venstrehendt}) \cdot P(\text{jente}) \\
&= 0.10 \cdot \frac{13}{30} + 0.08 \cdot \frac{17}{30} \\
&= 0.089
\end{aligned}
$$

Nå som vi har funnet sannsynligheten for at en tilfeldig elev er venstrehendt, kan vi beregne sannsynligheten for at nøyaktig 3 elever i klassen er venstrehendt



Det er 23.1% sannsynlighet for at nøyaktig 3 elever i klassen er venstrehendte.

Vi kunne også ha løst oppgaven ved hjelp av programmering

```python
# Importerer nødvendige biblioteker
import numpy as np
from numpy import random

# Definerer feilmargin, avrundet til 4 desimaler
def feilmargin(r, N):
    return round(2 * np.sqrt(r*(1-r) / N), 4)


p1 = 0.10           # sannsynligheten for at en gutt er venstrehendt
p2 = 0.08           # sannsynligheten for at en jente er venstrehendt

n1 = 13             # antall gutter i klassen
n2 = 17             # antall jenter i klassen

# lager en liste som representerer klassen
utvalg = n1*["GUTT"] + n2*["JENTE"]

N = 100000          # antall simuleringer
n = len(utvalg)     # antall elementer i hovedmengden
gunstige = 0        # antall gunstige utfall


# Her starter selve simuleringen av det binomiske forsøket
for i in range(N):  # kjører simulering N ganger

    X = random.binomial(n1, p1)  # X: antall trekk der gutt var venstrehendt
    Y = random.binomial(n2, p2)  # Y: antall trekk der jente var venstrehendt

    # Gunstig utfall om det til sammen er tre elever som er venstrehendte
    if X + Y == 3:
        gunstige += 1

# Regner ut den relative frekvensen, avrundet til 3 desimaler
r = round(gunstige / N, 3)

# Regner ut feilmarginen til forsøket
feil = feilmargin(r, N)

# Print ut relativ frekvens fra simulering
print(f'N = {N}')
print(f'relativ frekvens = {r}')
print(f'feilmargin = {feil}')
```

```
N = 100000
relativ frekvens = 0.23
feilmargin = 0.0027
```

Oppgave 3

Per og Kåre setter inn like store beløp på hver sin konto. Per får en årlig rente på 3,00 prosent, mens Kåre får en årlig rente på 6,00 prosent.

a) Hvilket beløp må Per sette inn dersom han skal ha 30 000 kroner på kontoen etter 8 år?

Verdiutviklingen på kontoen til Per er gitt ved

$$P(x) = b \cdot 1.03^x \text{ , der } b \text{ er startbeløpet på kontoen.}$$

For å finne ut hvor mye Per må sette inn på kontoen for å ha 30 000 kr etter 8 år, må vi løse

$$P(8) = 30000$$

1	$P(x) := b \cdot 1.03^x$
	$\approx$ $\mathbf{P(x) := b\ e^{0.03x}}$
2	$P(8) = 30000$
	NLøs: $\{\mathbf{b = 23682.277}\}$

Per må sette inn 23 682.3 kr på kontoen for å ha 30 000 kr om 8 år

Påstand
Det vil gå nøyaktig dobbelt så lang tid før beløpet Per har på konto, har doblet seg, som det vil gå før beløpet Kåre har på konto, har doblet seg.

b) Argumenter for at påstanden *ikke* er riktig.

Per sin konto har en vekstrate på 1.03, og Kåre sin konto har en vekstrate på 1.06.

For å finne doblingstiden til Per og Kåre, må vi derfor løse

$$1.03^x = 2 \quad \text{og} \quad 1.06^x = 2$$

1	$1.03^x = 2$
	NLøs: $\{x = 23.45\}$
2	$1.06^x = 2$
	NLøs: $\{x = 11.896\}$

Doblingstiden til Per er 23.45 år, mens doblingstiden til Kåre er 11.896 år.

$$\frac{23.45}{11.896} = 1.971 \neq 2$$

Det tar <u>ikke</u> nøyaktig dobbelt så lang tid før beløpet Per har på konto, har doblet seg, som det tar før beløpet Kåre har på konto har doblet seg

c) Hvor lang tid vil det går før Per og Kåre til sammen har dobbelt så mye penger som de satte inn på kontoene, dersom den årlige renten er henholdsvis 3,00 prosent og 6,00 prosent?

Siden det er prosentvis vekst har ikke startbeløpet noe å si for doblingstiden. Vi kan derfor se helt bort i fra stratbeløpet til Per og Kåre, og istedenfor kun se på vekstfaktorene slik at

$$P(x) = 1.03^x \quad \text{og} \quad K(x) = 1.06^x$$

Det samlede beløpet Per og Kåre har på konto til sammen blir da

$$B(x) = P(x) + K(x)$$

Vi løser $B(x) = 2 \cdot B(0)$ for å finne doblingstiden Per og Kåres samlede kontoverdi

1	$P(x) := 1.03^x$
	$\approx$ $P(x) := e^{0.03x}$
2	$K(x) := 1.06^x$
	$\approx$ $K(x) := e^{0.058x}$
3	$B(x) := P(x) + K(x)$
	$\approx$ $B(x) := e^{0.058x} + e^{0.03x}$
4	$B(x) = 2 \cdot B(0), x = 1$
	NLøs: $\{x = 15.243\}$

Det tar 15.2 år før Per og Kåres samlede kontoverdi har doblet seg.

Oppgave 4

Du kaster fem terninger.

a) Bestem sannsynligheten for at minst to av terningene viser samme antall øyne.

Vi skal altså finne $P(\text{minst 2 like terninger})$.

Hvis vi ser på utfallsrommet for antall like terninger ved kast av 5 terninger

$$U = \left\{0 \text{ like}, 2 \text{ like}, 3 \text{ like}, 4 \text{ like}, 5 \text{ like}\right\}$$

ser vi at

$$P(\text{minst 2 like}) = 1 - P(0 \text{ like})$$

Vi kan derfor først fokusere på $P(0 \text{ like})$. Dersom ingen av terningene skal være like, får vi at det kan skje på

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720 \text{ måter.}$$

Totalt antall ulike terningkombinsasjoner vi kan få med de 5 terningene er

$$6^5 = 7776$$

Sannsynligheten for ingen like terninger er dermed

$$P(0 \text{ like}) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}} = \frac{720}{7776} = 0.093$$

Sannsynligheten for minst 2 like terninger blir derfor

$$P(\text{minst 2 like}) = 1 - P(0 \text{ like}) = 1 - 0.093 = \underline{\underline{0.907}}$$

La X være summen av antall øyne på de fem terningene.

b) Bruk programmering til å bestemme $P(X > 20)$.

For å lage programmet kan vi lage en hjelpefunksjon som "kaster" terningene ved å returnere et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6. Deretter kaster vi de 5 terningene, {t1, t2, t3, t4, t5}, og regner ut summen av disse.

Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20. Vi må så gjenta disse kastene mange ganger, og så regne ut den relative frekvensen, $r = \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{antall forsøk}}$

```python
# Importer nødvendige biblioteker
import numpy as np
from numpy import random

# Definerer feilmargin, avrundet til 4 desimaler
def feilmargin(r, N):
    return round(2 * np.sqrt(r*(1-r) / N), 4)


# kast_terning() representerer et terningkast ved å returnere
# et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6
def kast_terning():
    return random.randint(1, 7)

# Definer variabler for simulering
N = 100000      # antall simuleringer
gunstige = 0    # antall gunstige utfall fra simuleringer

# Simulering
for i in range(N):
    # Kaster terninger
    t1 = kast_terning()
    t2 = kast_terning()
    t3 = kast_terning()
    t4 = kast_terning()
    t5 = kast_terning()

    # Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20
    if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 > 20:
        gunstige += 1

# Regner ut relativ frekvens avrundet til 3 desimaler
r = round(gunstige / N, 3)

# Regner ut feilmarginen til forsøket
feil = feilmargin(r, N)

# Print ut relativ frekvens fra simulering
print(f'N = {N}')
print(f'relativ frekvens = {r}')
print(f'feilmargin = {feil}')
```

```
N = 100000
relativ frekvens = 0.221
feilmargin = 0.0026
```

Det er også mulig å skrive et program som tester ut alle mulige kombinasjoner istedenfor å simulere terningkastene

```python
mulige = 6**5         # antall mulige kombinasjoner når det kastes 5 terninger
gunstige = 0          # variabel som teller opp antall gunstige utfall

# Hver løkke representerer en terning
for t1 in range(1, 7):
    for t2 in range(1, 7):
        for t3 in range(1, 7):
            for t4 in range(1, 7):
                for t5 in range(1, 7):

                    # sjekker som summen er større enn 20
                    if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 > 20:
                        gunstige += 1

# Regner ut sannsynligheten
p = round(gunstige / mulige, 3)

# Skriver ut sannsynligheten
print(f'P(X > 20) = {p}')
```

```
P(X > 20) = 0.221
```

Begge programmene gir det samme svaret, nemlig $\underline{\underline{P(X > 20) = 0.221}}$

c) Bestem den største verdien av k som er slik at $P(X \geq k) > 0,8$.

Her gjenbruker vi programmet fra oppgave b, men hvor vi kan fjerne det som ikke trengs - for eksempel hjelpemetoden for å regne ut feilmargin.

Vi kan videre pakke inn simuleringsdelen av programmet i en egen metode så det er lettere å gjenbruke den. Deretter kan vi sette terningsummen, k, til å være 5 ettersom det er den laveste summen terningene kan ha.

Deretter må vi kjøre simulereringen og øke verdien av k helt til sannsynligheten bikker under 0.8. Dette kan vi gjøre ved hjelp av en while-løkke

```python
# Importer nødvendige biblioteker
from numpy import random

# kast_terning() representerer et terningkast ved å returnere
# et tilfeldig tall fra og med 1 til og med 6
def kast_terning():
    return random.randint(1, 7)

# Samler hele simuleringen i en metode slik at den er enklere å gjenbruke
def simulering_med_sum(k):
    # Definer variabler for simulering
    N = 100000      # antall simuleringer
    gunstige = 0    # antall gunstige utfall fra simuleringer

    # Simulering
    for i in range(N):
        # Kaster terninger
        t1 = kast_terning()
        t2 = kast_terning()
        t3 = kast_terning()
        t4 = kast_terning()
        t5 = kast_terning()

        # Vi har et gunstig utfall dersom summen er større enn 20
        if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 >= k:
            gunstige += 1

    # Regner ut relativ frekvens avrundet til 3 desimaler
    return round(gunstige / N, 3)


# Definerer startsummen
k = 5

# Kjører løkken så lenge sannsynligheten er større en 0.8
while simulering_med_sum(k) > 0.8:
    print(f'P(X ≥ {k})  = {simulering_med_sum(k)}')
    k += 1
```

```
P(X ≥ 5)  = 1.0
P(X ≥ 6)  = 1.0
P(X ≥ 7)  = 0.999
P(X ≥ 8)  = 0.997
P(X ≥ 9)  = 0.993
P(X ≥ 10)  = 0.984
P(X ≥ 11)  = 0.968
P(X ≥ 12)  = 0.942
P(X ≥ 13)  = 0.902
P(X ≥ 14)  = 0.847
```

Her ser vi at den siste gyldige verdien for k er 14.
Den største verdien av k slik at $P(X \geq k) > 0.8$ er 14.

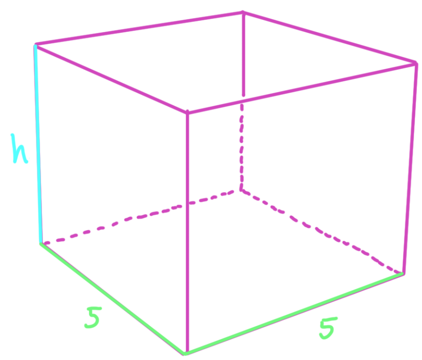
Vi kunne også ha løst oppgaven ved å gjøre den samme tilpasningen med programmet som testet ut alle mulige kombinasjoner

```python
# Samler hele programmet i en metode slik at den er enklere å gjenbruke
def sannsynlighet_sum(k):
    mulige = 6**5      # antall mulige kombinasjoner når det kastes 5 terninger
    gunstige = 0       # variabel som teller opp antall gunstige utfall

    # Hver løkke representerer en terning
    for t1 in range(1, 7):
        for t2 in range(1, 7):
            for t3 in range(1, 7):
                for t4 in range(1, 7):
                    for t5 in range(1, 7):

                        # sjekker som summen er større enn 20
                        if t1 + t2 + t3 + t4 + t5 >= k:
                            gunstige += 1

    # Regner ut sannsynligheten
    return round(gunstige / mulige, 3)


# Definerer startsummen
k = 5

# Kjører løkken så lenge sannsynligheten er større en 0.8
while sannsynlighet_sum(k) > 0.8:
    print(f'P(X ≥ {k})  = {sannsynlighet_sum(k)}')
    k += 1
```

Oppgave 5

Du skal lage en kasse uten lokk. Den skal ha form som et rett prisme. Grunnflaten i kassen skal være kvadratisk. For at vekten ikke skal bli for stor, kan ikke det samlede arealet av platene som brukes til å lage kassen, være mer enn 120 dm^2.

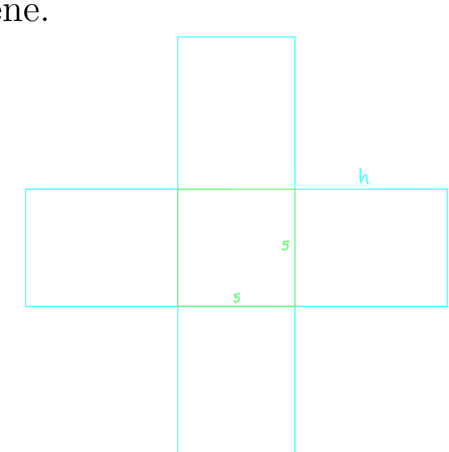
a) Hva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være 5 dm?



Vi skal her finne det maksimale volumet, men hvor vi har fått en overflatebegrensning på 120 dm^2.

Det betyr at vi må finne den største høyden h kassen kan ha, uten å overskride arealbegresningen.

La oss først finne et uttrykk for overflaten av kassen, eller det rette prismet som det egentlig er. Da kan vi brette ut prismet og så regne ut arealet av hver av flatene.



Vi ser da at den totale overflaten blir

$$A = 5^2 + 4 \cdot 5h = 25 + 20h$$

Nå som vi har funnet høyden h til kassen, kan vi sette dette inn i formelen for volumet av et rett prisme

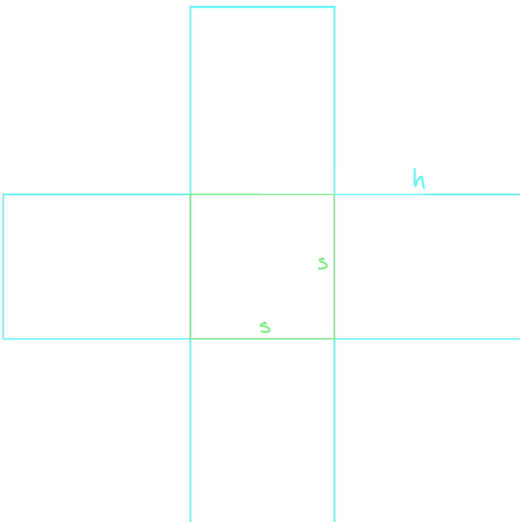
$$V = Gh, \quad \text{der } G \text{ er arealet av grunnflaten, altså } G = 5^2 = 25$$

$$V = 25 \cdot 4.75 = 118.75$$

Det største volumet kassen kan ha er 118.75 dm^3.

b) Hva er det maksimale volumet kassen kan få?

Vi har fortsatt den samme overflatebegrensningen på 120 dm^2, men nå er ikke sidene i grunnflaten låst til å være 5 dm.



La oss sette sidene i grunnflaten til å være s, slik at overflaten av prismet nå blir

$$A = s^2 + 4 \cdot sh = s^2 + 4sh$$

Videre kan vi finne h uttrykt med s ved å løse $A = 120$

1 $A := s^2 + 4\,s\,h$

$\rightarrow$ $\mathbf{A := s^2 + 4\,h\,s}$

2 Løs$(A = 120, h)$

$\rightarrow$ $\left\{ \mathbf{h = \frac{-s^2 + 120}{4\,s}} \right\}$

Volumet av prismet blir dermed

$$V = Gh = s^2 h = s^2 \cdot \frac{-s^2 + 120}{4s} = s \cdot \frac{-s^2 + 120}{4} = \frac{-s^3 + 120s}{4} = -0.25s^3 + 25s$$

Deretter finner vi det maksimale volumet ved å finne toppunktet til

$$V(s) = -0.25s^3 + 25s$$

Det kan vi gjøre enten ved å bruke ekstremalpunkt-kommandoen, eller ved å løse likningen $V'(s) = 0$, i CAS

4 Ekstremalpunkt(V)

$\approx$ $\mathbf{\{\cancel{(-5.774, -96.225)}, (5.774, 96.225)\}}$

5 $V'(s) = 0$

NLøs: $\mathbf{\{\cancel{s = -5.774}, s = 5.774\}}$

I begge tilfeller ser vi at vi må ekskludere løsningen med $s = -5.774$, fordi s er sidelengden til grunnflaten i det rette prismet, og kan derfor ikke være negativ.

Det betyr at vi sitter igjen med at $s = 5.774$ er den sidelengden som gir størst volum.

Likevel bør vi bruke andrederiverttesten for å forsikre oss om at $s = 5.774$ faktisk er et toppunkt til volumfunksjonen

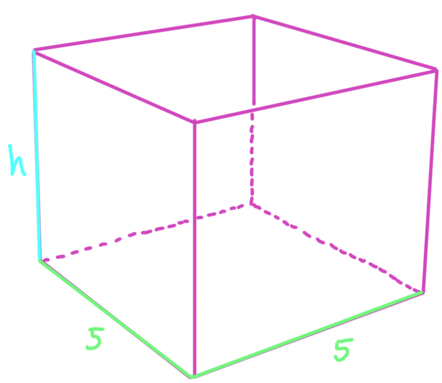
6	V″(5.774)
	≈ **−8.661**
7	V(5.774)
	≈ **96.225**

$$V''(5.774) < 0 \Longrightarrow s = 5.774 \text{ er et toppunkt.}$$

$$\underline{\underline{\text{Det største volumet prismet kan ha, er } 96.225\ \text{dm}^3.}}$$

Du skal lage en slik kasse som rommer 80 dm^3.

c) Hva er det minste samlede arealet platene kan ha, dersom du skal lage en slik kasse?



Nå har vi motsatt situasjon av det vi hadde i oppgave b. Nå er volumet avgrenset til 80 dm^3, og så skal vi minimere overflaten.

Overflaten er fortsatt gitt ved $A = s^2 + 4sh$, og volumet er gitt ved $V = s^2 h$

Vi kan så finne h uttrykt med s ved å løse $V = 80$ med hensyn på h, og deretter sette inn dette for h i uttrykket for overflaten, $A = s^2 + 4sh$

1	$A := s^2 + 4\,s\,h$
	$\rightarrow\ \mathbf{A := s^2 + 4\,h\,s}$
2	$V := s^2 \cdot h$
	$\approx\ \mathbf{V := h\,s^2}$
3	Løs($V = 80, h$)
	$\approx\ \left\{\mathbf{h = \frac{80}{s^2}}\right\}$
4	$A_1(s)$:= ByttUt(A, \$3)
	$\approx\ \mathbf{A_1(s) := \frac{s^3 + 320}{s}}$

Nå som vi har funnet et uttrykk for overflaten, $A_1(s)$, der $V = 80$ er tatt hensyn til, kan vi finne bunnpunktet til overflatefunksjonen.

5	Ekstremalpunkt($A_1(s)$)
	$\approx\ \mathbf{\{(5.429, 88.417)\}}$
6	$A_1''(5.429)$
	$\approx\ \mathbf{6}$

Vi bruker andrederiverttesten for å forsikre oss om at det er bunnpunktet vi har funnet.

Når volumet av kassen er 80 dm^3, er den minste overflaten kassen kan ha 88.417 dm^2.

Oppgave 6

La *f* være en tredjegradsfunksjon.

Avgjør for hver av påstandene nedenfor om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

a) Påstand 1:
Grafen til *f* har minst ett ekstremalpunkt.

Dersom $f(x)$ skal ha minst ett ekstremalpunkt, må $f'(x)$ ha minst ett nullpunkt. Det betyr at

$f'(x) = 0$ må ha minst én løsning.

Siden $f(x)$ er en tredjegradsfunksjon, vil $f'(x)$ være en andregradsfunksjon. La $f'(x)$ være en vilkårlig andregradsfunksjon

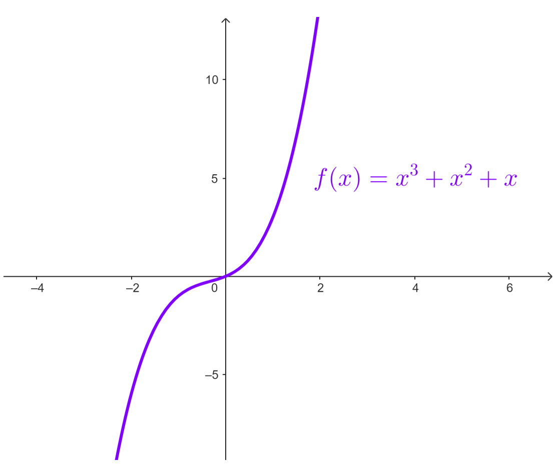
$$f'(x) = ax^2 + bx + c$$

La oss videre betrakte potensielle nullpunkter til $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0$$

Likningen har ingen løsning dersom $b^2 - 4ac < 0$

$f'(x) = 0$ har altså ikke nødvendigvis en løsning, hvilket betyr at $f(x)$ ikke nødvendigvis har et ekstremalpunkt.



$f(x) = x^3 + x^2 + x$ er et eksempel på en tredjegradsfunksjon uten ekstremalpunkter.

<u>Påstanden er altså usann.</u>

b) Påstand 2:
Alle linjer på formen $y = ax + b$, der $a, b \in \mathbb{R}$, vil skjære grafen til f.

$f(x)$ er fortsatt en tredjegradsfunksjon. La derfor $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og den rette linjen være $g(x) = px + q$

Dersom den rette linjen $g(x)$ skal skjære $f(x)$, må $f(x) = g(x)$ alltid ha en løsning.

Vi vet at en tredjegradsfunksjon $f(x)$ har minst ett nullpunkt, hvilket vi kan vise ved at

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\text{eller}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

I begge tilfeller bytter $f(x)$ fortegn mellom $-\infty$ og ∞, som betyr at grafen til $f(x)$ må ha krysset x-aksen på et eller annet tidspunkt, altså må $f(x)$ ha minst ett nullpunkt.

La oss igjen se på $f(x) = g(x)$, som må være oppfylt for at $g(x)$ skal skjære $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= px + q \\ ax^3 + bx^2 + cx + d - px - q &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + (c-p)x + (d-q) &= 0 \end{aligned}$$

Hvis vi nå lar $h(x) = ax^3 + bx^2 + (c-p)x + (d-q)$, har vi at

$$f(x) = g(x) \iff h(x) = 0$$

Siden $h(x)$ også er en tredjegradsfunksjon, betyr det at $h(x)$ har minst ett nullpunkt, som igjen betyr at $f(x) = g(x)$ må ha minst én løsning. Altså betyr det at en rett linje vil skjære en tredjegradsfunksjon i minst ett punkt.

Påstanden er sann.

c) Påstand 3:
Dersom grafen til f har et vendepunkt for $x = 3$, er $f'(1) = f'(5)$.

$f(x)$ er fortsatt en tredjegradsfunksjon.
Den enkle måten å undersøke om påstanden er sann, er å se om det finnes en tredjegradsfunksjon som oppfyller

$$f''(3) = 0 \qquad \text{og} \qquad f'(1) = f'(5)$$

1	$f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ → $\mathbf{f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$
2	$f''(3) = 0$ → $\mathbf{18\,a + 2\,b = 0}$
3	$f'(1) = f'(5)$ → $\mathbf{3\,a + 2\,b + c = 75\,a + 10\,b + c}$
4	{\$2, \$3} Løs: $\left\{\left\{\mathbf{a = \frac{-1}{9}\,b, b = b}\right\}\right\}$

Her ser vi at $a = -\frac{1}{9}b$, og at b er det vi kaller en *fri variabel*. c og d har vi ikke nok informasjon til å kunne bestemme, så de kan vi la stå uendret.
Da får vi at

$$f(x) = -\frac{1}{9}bx^3 + bx^2 + cx + d$$

La oss sjekke om $f(x)$ oppfyller kravene i påstanden:

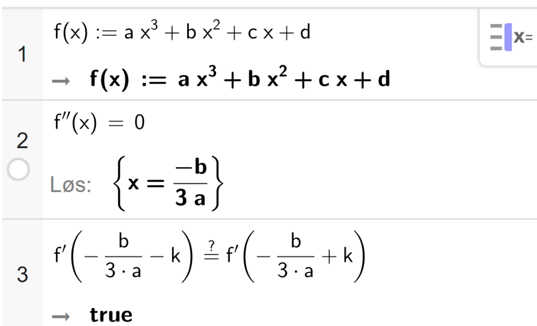
1	$f(x) := -\frac{1}{9} \cdot b \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ → $\mathbf{f(x) := \frac{-1}{9}\,b\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$
2	$f''(3)$ → $\mathbf{0}$
3	$f'(1) \stackrel{?}{=} f'(5)$ → **true**

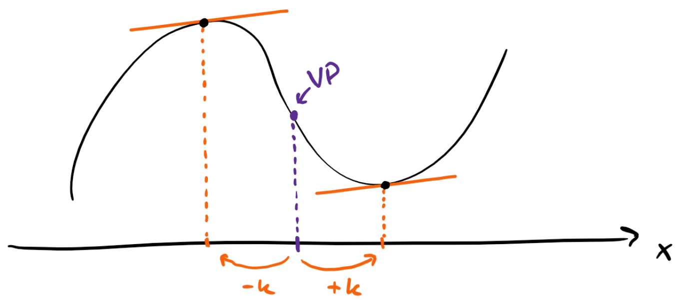
Her ser vi at $f(x)$ oppfyller kravene i påstanden, og påstanden er derfor sann.

Det vi viste her, var kun for det helt spesifikke tilfellet der $f''(3) = 0$ og $f'(1) = f'(5)$. Altså at akkurat denne tredjegradsunksjonen hadde en stigning som var symmetrisk om vendepunktet i $x = 3$.

Dette kan vi faktisk også vise at alltid gjelder helt generelt for alle tredjegradsfunksjoner. Sett at x-verdien til vendepunktet er $x = x_0$, kan vi altså da vise at

$$f'(x_0 - k) = f'(x_0 + k)$$





Helt generelt er vendepunktet til en tredjegradsfunksjon alltid $x = -\frac{b}{3a}$,
og stigningstallene er alltid symmetrisk om vendepunktet.