2PY Eksamen H2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

2 desember 2023

Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (4 poeng)

1a)

Vi må finne ut hvor mange enkeltbilletter koster 415 kr. Hvis vi lær x være antall enkeltbilletter

$$x \cdot 25 = 415$$
$$x = \frac{415}{25} = 16,6$$

415 kr dekker 16 enkelte reiser. Hun bør vurdere fleksikort hvis hun skal ha flere enn 16 reiser.

1b)

20 enkeltbilletter koster $20 \cdot 25 = 500kr$ og et fleksikort koster 415 kr , da regner vi endring i prosent slik:

$$\frac{500-415}{500} = \frac{85}{500} = \frac{85}{5 \cdot 100} = \frac{17}{100} = 0,17 = 17\%$$

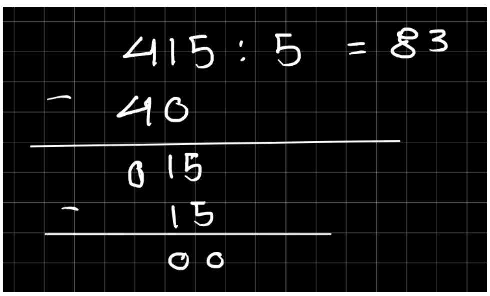
Hun sparer 17% ved å kjøpe et fleksikort.

Metode 2: veien om 1 prosent

500 tilsvarer fullpris 100% og da blir 1% lik 5 kr. Dermed tilsvarer 415 kr 83% fordi $\frac{415}{5} = 83\%$ .Hun betaler 83% av fullpris på 20 enkeltbilletter, da blir rabatten $100\% - 83\% = 17\%$

Metode 3: regne vekstfaktor V ved å dele Ny verdi (N) på Gammel verdi (G)

$$N = G \cdot V$$
$$415 = 500 \cdot V$$
$$V = \frac{415}{500} = \frac{415}{5 \cdot 100} = \frac{83}{100} = 0,83 = 83\%$$
$$100\% - 83\% = 17\%$$



Oppgave 2 (2 poeng)

En generell form for en lineær funksjon er

$$N(t) = at + b$$

der a er stigningstallet som beskriver hvor mye funksjonsverdien y øker når variabelen t øker med 1. Den kan regnes ved å finne to punkter. Vi setter året 2002 som startåret ($t = 0$) og det er oppgitt at antall registrerte personbiler er $1,9\,millioner$ og da får vi punktet (1, 1,9). Antall registrete personbiler i 2022 (tilsvarer $t = 20$) er $2,9\,millioner$, da får vi punktet (20, 2,9). Stigningstallet er endring av y delt på endring av t,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{2,9 - 1,9}{20 - 0} = \frac{1}{20} = \frac{10}{2 \cdot 100} = \frac{5}{100} = 0,05$$

b er konstantleddet (skjæring med y-aksen) og tilsvarer antall registrerte personbiler ved $t = 0$ (altså 2002). Da får vi at $b = 1,9$

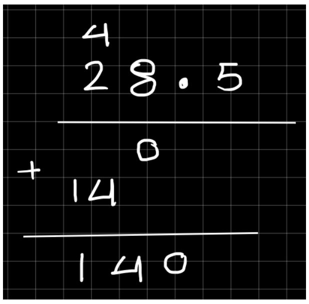
Funksjonen som gir oss antall registrerte personbiler t år etter 2000 er

$$N(t) = 0,05t + 1,9$$

$$\begin{aligned} 2030 - 2002 &= 28 \\ N(28) &= 0,05 \cdot 28 + 1,9 \\ &= 1,4 + 1,9 = 3,3 \end{aligned}$$

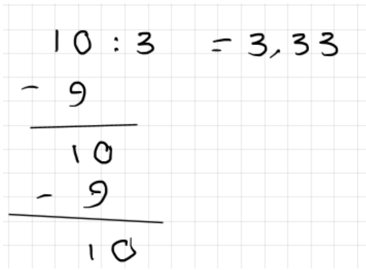
Det skal være 3,3 millioner registrerte personbiler i Norge i 2030 ifølge modellen. Utregning:

$$0,05 \cdot 28 = \frac{5}{100} \cdot 28 = \frac{5 \cdot 28}{100} = \frac{140}{100} = 1,4$$



Oppgave 3 (2 poeng)

$$\frac{solens\,masse}{Joedens\,masse} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{30-24} = \frac{1}{3} \cdot 10^{6} = \frac{10}{3} \cdot 10^{5} = 3,33 \cdot 10^{5}$$



Massen til sola er omtrent $3,33 \cdot 10^5$ større enn massen til jorda.

Oppgave 4 (2 poeng)

Siden antall tall er 10 som er partall er median gjennomsnittet av de to tallene i midten og siden median er 8 må summen av dem da være 16. Vi vet også at halvparten av tallene skal være mindre enn eller lik 8 og den andre halvparten må være større enn eller lik 8. Typetall er 5, noe som betyr at tallet 5 må gjentas minst 2 ganger.

Alternativ 1:

$$5, 5, 5, 5, 8, 8, 12, 12, 15, 15$$

En strategi til å komme til tallene er å starte med,

$$5, 5, 5, 5, 8, 8$$

da vet vi at median er 8 og vi mangler kun 4 verdier og summen av dem regnes ved å bruke definisjon av gjennomsnitt $\overline{X}$:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{\sum x}{n} \\
\frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + x}{10} &= 9 \\
\frac{20 + 16 + x}{10} &= 9 \\
\frac{36 + x}{10} &= 9 \\
36 + x &= 10 \cdot 9 \\
36 + x &= 90 \\
x &= 90 - 36 = 54
\end{aligned}$$

Nå gjenstår det å velge 4 tall som er større enn 8 og summen av dem skal være 54 og en mulighet er:

$$x = 12 + 12 + 15 + 15$$

Alternativ 2:

$$5, 5, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 16$$

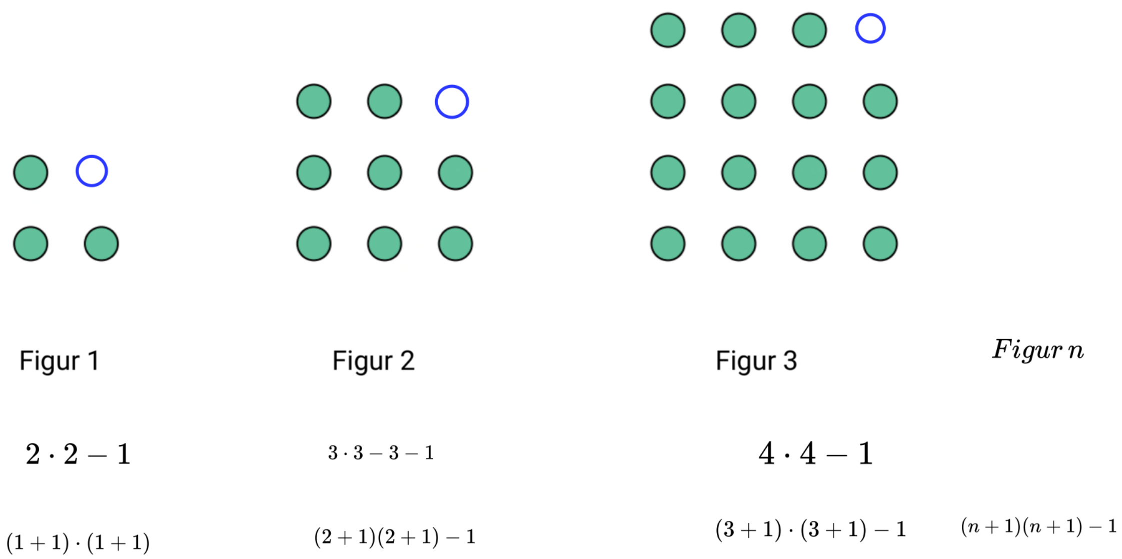
Vi bruker samme strategi som ble gjort i frøste alternativet,men vi må ikke bruke 8 og halvparten av tallene skal være forskjellige fra første alternativ:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{\sum x}{n} \\
9 &= \frac{3 \cdot 5 + 6 + 7 + 9 + x}{10} \\
9 &= \frac{15 + 22 + x}{10} \\
9 &= \frac{37 + x}{10} \\
9 &= \frac{37 + x}{10} | \cdot 10 \\
37 + x &= 90 \\
x &= 90 - 37 = 53
\end{aligned}$$

$$x = 10 + 13 + 14 + 16$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Disse figurene ligner på kvadrattallene, men vi mangler en sirkel i hver figur,



Fra opplysningen fra figuren over, kan vi finne den generelle formen antall sirkler i figur nummer n slik:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= (n+1)(n+1) - 1 \\
&= n^2 + n + n + 1 - 1 \\
&= n^2 + 2n
\end{aligned}
$$

Metode 2 :

Vi finner differansen (første differanse) mellom antall sirklene i hver to etterfølgende figurer og hvis den er de samme, kan vi representere utrykket for antall sirklene i figur nummer n med en lineær funksjon.

Hvis de første differansene er ikke like, men andre differansene (differanse av differansene) er like, kan vi representere antall sirklene med andregradsfunksjon.

Figur nummer	**0**		**1**		**2**		**3**		**4**
Antall sirkler	0		3		8		15		24
Første differanse		3		5		7		9	
Andre differanse			2		2		2		
Tredje differanse				0		0			

Fra tabellen over, ser vi at andre differansen er det samme (den er 2) og da kan vi representere antall sirkler i figur nummer n med en andregradsfunksjon:

$$f(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$$

c: er antall sirkler i figur nummer null og fra tabellen ser vi at $c = 0$.

b: er andre differansen delt på 2(dette gjelder alltid, men bevis for det utelates), så $b = \frac{2}{2} = 1$

a: kan finnes ved å bruke at antall sirkler i figur nummer 1 er 3, med andre ord $f(1) = 3$.

$$
\begin{aligned}
f(n) &= an^2 + bn + c \\
f(n) &= an^2 + 1 \cdot n + 0 \\
f(n) &= an^2 + n \\
f(1) &= 3 \\
a \cdot (1)^2 + 1 &= 3 \\
a + 1 &= 3 \\
a &= 3 - 1 = 2
\end{aligned}
$$

Utrykket for antall sirkler i figur nummer n er:

$$f(n) = n^2 + 2n$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (4 poeng)

1a)

Vi løser oppgaven via geogebra graftegner. Vi finner toppunktet og bunnpunktet ved å bruke kommando *Ekstremalpunkt (Polynom)* og finner at toppunktet er B og bunnpunktet er A (se skjermbildene nedenfor),

$$T(x) = -\frac{1}{1000}\left(0.003\,x^3 - x^2 + 25\,x - 3800\right), \quad (0 \le x \le 300)$$

a)

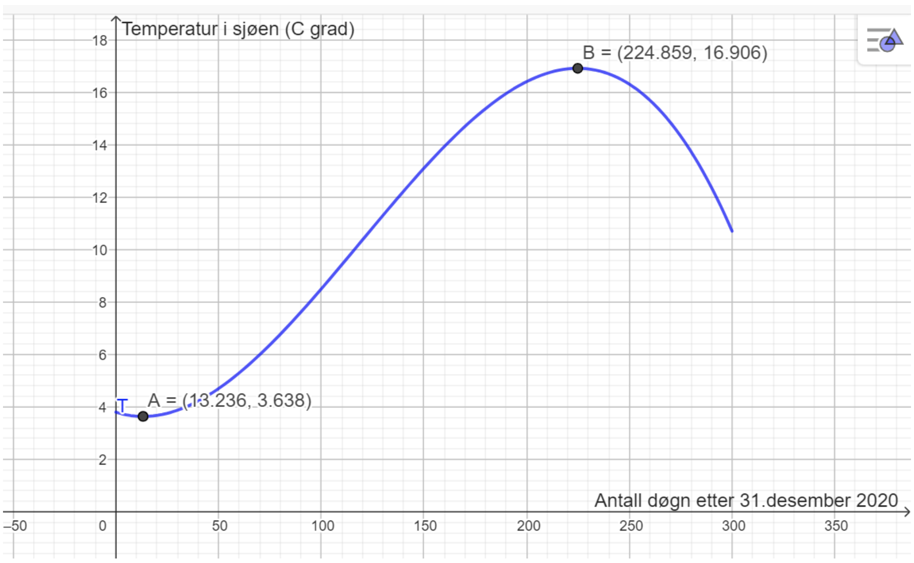
Ekstremalpunkt(T)

$= A = (13.236, 3.638)$

$B = (224.859, 16.906)$

$a = y(B) - y(A)$

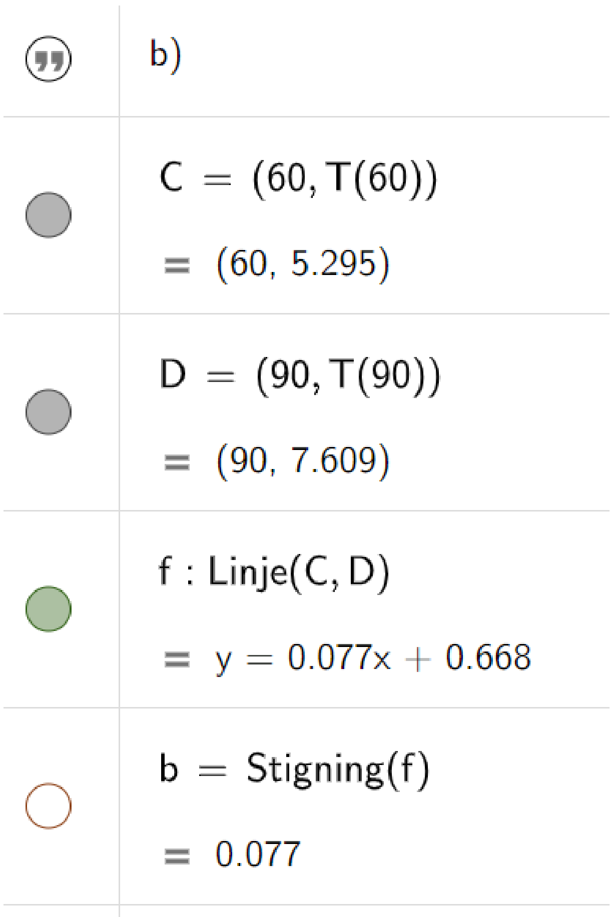
$= 13.268$

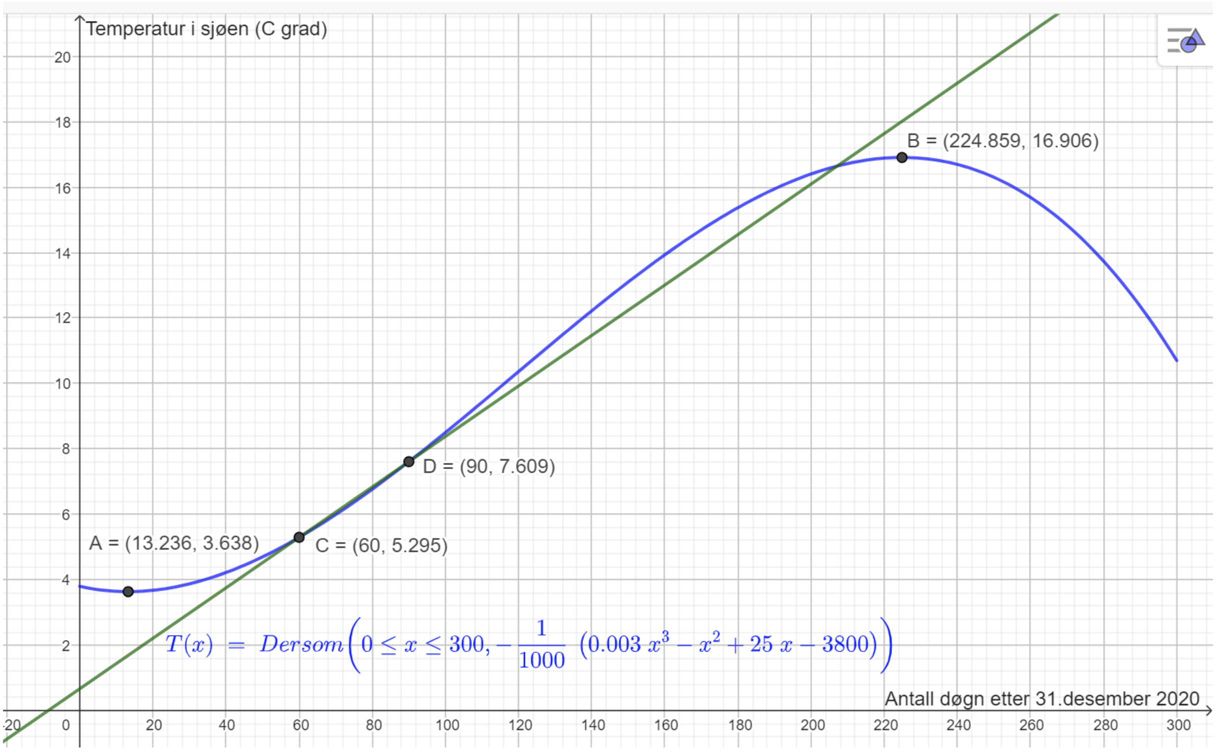


Forskjellen mellom det høyeste og laveste temperatur i sjøen de 300 første dagene i 2021 er $13,268$℃

1b)

Januar i 2021 er 31 dager og februar er 28 dager og mars er 31 dager, da blir første mars tilsvarende $x = 60$ og 31 mars $x = 90$. Vi bruker geogebra (algebrafelt) til å regne gjennomsnittlig vekstfart mellom de to dagene. Vi skriver de to punktene i geogebra, tegner en linje mellom dem ved å bruke kommando *Linje(punkt, Punkt)*, så finner vi stigning ved å bruke kommando *Stigning(Linje)*,



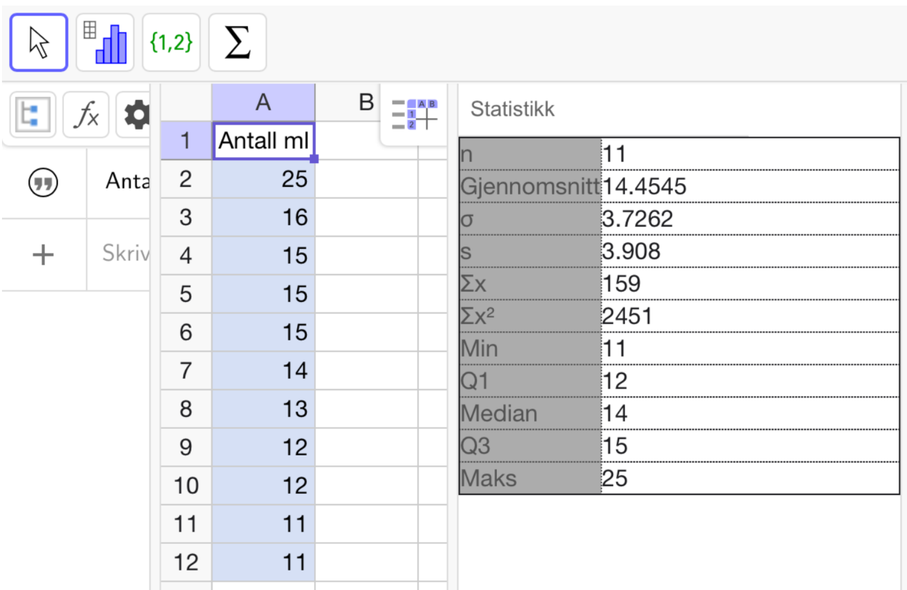


Temperaturen i sjøen steg med $0,0077$℃ per døgn i mars.

Oppgave 2 (6 poeng)

2a)

Typetall (observasjonen som forekommer flest ganger) er 15 mål. Variasjonsbredde=maks verdi-min verdi=25-11=14. Vi finner median ved å sette verdiene for antall mål for hver spiller i regneark i geogebra, så trykke på regresjonstegnet i menyen for å få oppsummering av statistiske sentral-og spredningsmål (se utklippet nedenfor).



n	11
Gjennomsnitt	14.4545
σ	3.7262
s	3.908
Σx	159
Σx²	2451
Min	11
Q1	12
Median	14
Q3	15
Maks	25

Fra utklippet ovenfor ser vi at median er 14 mål.

2b)

Fra skjermbildet i oppgave a) ser vi at gjennomsnittet for antall mål er $14,45$ mål og standardavvik (s) er på $3,9$ mål.

2c)

Sesong	Typetall	Median	Gjennomsnitt	Standardavvik
2021	–	11	14,5	6,7
2022	15	14	14,5	3,9

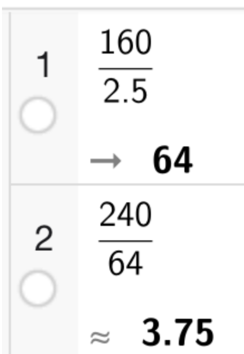
Tabell 1: Sammenligning av målscoringen til de 11 fotballspillerne med flest mål i sesongene 2021 og 2022

Siden medianen for antall mål i sesongen 2022 er høyere enn i 2021, indikerer det at det ble scoret flere mål i 2022 enn i 2021. Gjennomsnittet for sesongene 2021 og 2022 er omtrent det samme, rundt 14,5 mål per spiller. Imidlertid er gjennomsnittet ikke det mest robuste statistiske målet for antall mål i 2021, da dataene ikke er symmetriske. Noen få høye verdier har ført til et høyt gjennomsnitt. Standardavviket i 2021 er omtrent dobbelt så stort som i 2022, noe som indikerer større variasjon i antall mål blant spillerne i 2021 enn i 2022, der det var mer jevnt.

På bakgrunn av disse tallene kan vi konkludere med at målscoringen i elitefotballen har vist en positiv trend de siste årene. Spillerne scorer flere mål, og det er en jevnere fordeling mellom spillerne.

Oppgave 3 (2 poeng)

Hvis $2,5\%$ prisøkning tilsvarer 160 kr , da vil 1% økning tilsvare 64 kr og 240 kr vil tilsvare $3,75\%$ prisøkning,



Eller vi kan regne ut den originale prisen (G) (rad 3), så regne prosenten p når prisøkning er 240 kr (rad 4),

3	$G + 160 = G \cdot \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)$
	NLøs: $\{\mathbf{G = 6400}\}$
4	$6400 + 240 = 6400 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
	NLøs: $\{\mathbf{p = 3.75}\}$

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi vet at inntekt er antall solgte enheter ganger pris per enhet. La prisen på handlenett være p, og antallet solgte enheter av grønne handleposer være x , da blir inntekten,

inntekt = antall blå handlenett $\cdot\, pris +$ antall svarte handlenett $\cdot\, pris +$ antall grønne handlenett $\cdot\, pris$

$$\begin{aligned} I_1 &= x \cdot p + 2x \cdot p + 3 \cdot x \cdot p \\ &= 6 \cdot x \cdot \end{aligned}$$

Vi løser oppgaven i geogebra (se rad 1),

1	$I_1 := 3\,x\,p + 2\,x\,p + x\,p$
	$\rightarrow\ \mathbf{I_1 := 6\,p\,x}$
2	$I_2 := 3\,x \left(1 + \frac{5}{100}\right) p + 2\,x\,p \left(1 + \frac{10}{100}\right) + x\,p \left(1 + \frac{15}{100}\right)$
	$\rightarrow\ \mathbf{I_2 := \frac{13}{2}\,p\,x}$
3	$\frac{I_2 - I_1}{I_1} \cdot 100$
	$\approx\ \mathbf{8.333}$
4	$\text{Løs}(I_2 = I_1\,V, V)$
	NLøs: $\{\mathbf{V = 1.083}\}$
5	$1.083 - 1$
	$\approx\ \mathbf{0.083}$
6	$0.083 \cdot 100$
	$\approx\ \mathbf{8.3}$

For å finne økningen i inntekten i prosent, må vi finne ut hva den nye prisen blir for hvert av de tre handlenettene. Vi bruker ideen at,

$$\text{Ny verdi} = \text{Gammel verdi} \ \cdot \text{Vekstfaktor}$$
$$\text{Vekstfaktor} = 1 + \frac{p}{100} \quad \text{ved p\% økning}$$

Blå handlenett:

$$p \cdot (1 + \frac{15}{100}) = 1,15 \cdot p$$

Svarte handlenett:

$$p \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 1,1 \cdot p$$

Grønne handlenett:

$$p \cdot (1 + \frac{5}{100}) = 1,05 \cdot p$$

Den nye inntekten er da gitt i rad 2. Prosentvis økning er da gitt ved,

$$\frac{Ny\,inntekt - Gammel\,inntekt}{Gammel\,inntekt} \cdot 100$$

(se rad 3). Alternativt kan man finne vekstfaktor så prosenten (rad 4,5,6). Uansett metode inntekten øker med $8,3\%$.

Oppgave 5 (4 poeng)

Emilie tenker litt feil. Antall roser de kjøper, og den totale prisen for vasen og rosene er ikke proporsjonale størrelser. Selv om jo flere roser de kjøper, desto mer må de betale, men forholdet mellom total prisen og antall roser er ikke konstant .

La x være antall roser og p pris per rose og V prisen for vasen da har vi:

$$\text{Total pris} = \text{antall roser} \cdot \text{pris per rose} + \text{pris for vasen}$$
$$T(x) = p \cdot x + V$$
$$\frac{T}{x} = p + \frac{V}{x}$$

Emma har rett. Om vi tenker at klassen har kjøpt en vase med noen blomster i og betalt en total pris T, da blir beløpet hver av dem må betale omvendt proporsjonalt med hvor mange som blir med og spleiser på gaven. Vi lær n være antall elever som er med på å spleise på gaven og T det totale beløpet som skal betales og B beløpet hver elev må betale, da har vi

$$\text{Beløpet hver elev må betale} = \frac{\text{Totalt pris}}{\text{antall elever som er med}}$$
$$B = \frac{T}{n}$$

Når antall elever (n) øker, minker beløpet hver elev må betale B.

Men om hver elev bidrar likt, blir ikke totalprisen og antall elever omvendt proporsjonale.
La oss definere
n : antall elever
b :antall roser hver elev bidrar med
x: antall roser totalt
V :prisen for vasen
T total prisen (vasen med blomstene) p: pris av en blomst
B: beløpet hver elev må betale
da har vi:

$$P(n) = \frac{T}{n}$$
$$T(x) = V + px$$
$$x = n \cdot b$$
$$T(x) = V + p \cdot n \cdot b$$
$$= V + p \cdot b \cdot n$$
$$B(n) = \frac{V + p \cdot b \cdot n}{n} = \frac{V}{n} + \frac{p \cdot b \cdot n}{n} = \frac{V}{n} + p \cdot b$$
$$B \cdot n = V + p \cdot b \cdot n$$

Vi ser at om vi ganger hvor mye hver elev må betale B med antall elever som er med, får vi ikke en konstan. Dermed er de to størrelsene ikke omvendt proporsjonale. Vi kan vise påstandene med tall eksempler i Excell:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Pris for en rose	12						
2	Vase pris	225						
3	Antall roser	Total pris	Totalpris/Antall roser					
4	1	237	237					
5	2	249	124,5					
6	3	261	87					
7	4	273	68,25					
8								
9	Antall elever(n)	Antall roser hver elev bidrar med(b)	Antall roser totalt(x)	Pris per rose(p)	Pris for Vasen(V)	Total pris(T)	Beløpet per elev(T)	B*n
10	1	2	2	12	225	249	249	249
11	2	2	4	12	225	273	136,5	273
12	3	2	6	12	225	297	99	297
13	4	2	8	12	225	321	80,25	321
14	5	2	10	12	225	345	69	345
15	6	2	12	12	225	369	61,5	369
16	7	2	14	12	225	393	56,14285714	393
17	8	2	16	12	225	417	52,125	417
18	9	2	18	12	225	441	49	441
19	10	2	20	12	225	465	46,5	465
20								

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Pris for en rose	12						
2	Vase pris	225						
3	Antall roser	Total pris	Totalpris/Antall roser					
4	1	=A4*$B$1+$B$2	=B4/A4					
5	2	=A5*$B$1+$B$2	=B5/A5					
6	3	=A6*$B$1+$B$2	=B6/A6					
7	4	=A7*$B$1+$B$2	=B7/A7					
8								
9	Antall elever(n)	hver elev bidrar med(b)	Antall roser totalt(x)	Pris per rose(p)	Pris for Vasen(V)	Total pris(T)	Beløpet per elev(T)	B*n
10	1	2	=A10*B10	12	225	=C10*D10+E10	=F10/A10	=G10*A10
11	2	2	=A11*B11	12	225	=C11*D11+E11	=F11/A11	=G11*A11
12	3	2	=A12*B12	12	225	=C12*D12+E12	=F12/A12	=G12*A12
13	4	2	=A13*B13	12	225	=C13*D13+E13	=F13/A13	=G13*A13
14	5	2	=A14*B14	12	225	=C14*D14+E14	=F14/A14	=G14*A14
15	6	2	=A15*B15	12	225	=C15*D15+E15	=F15/A15	=G15*A15
16	7	2	=A16*B16	12	225	=C16*D16+E16	=F16/A16	=G16*A16
17	8	2	=A17*B17	12	225	=C17*D17+E17	=F17/A17	=G17*A17
18	9	2	=A18*B18	12	225	=C18*D18+E18	=F18/A18	=G18*A18
19	10	2	=A19*B19	12	225	=C19*D19+E19	=F19/A19	=G19*A19
20								

Figur 2: Enter Caption

Oppgave 6 (4 poeng)

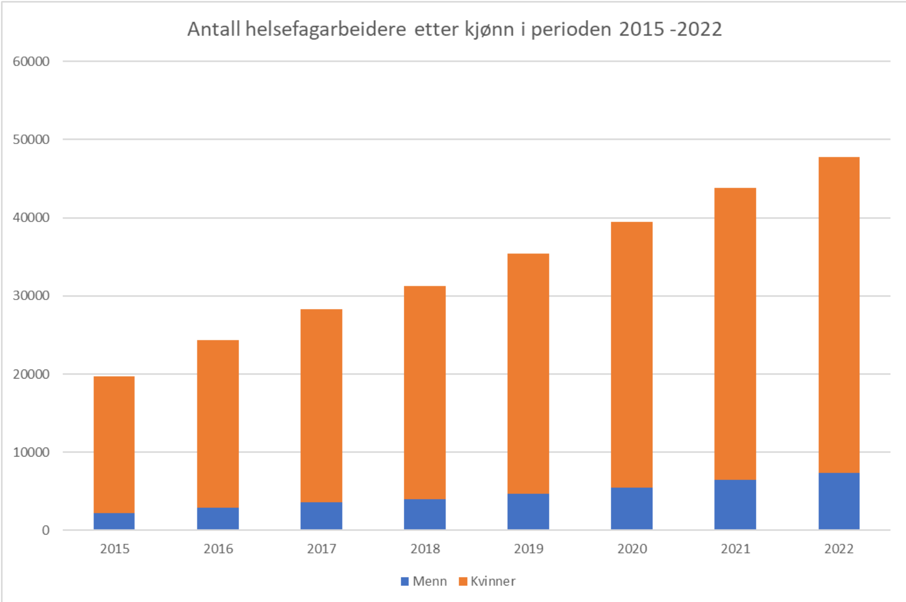
Helsefagarbeidere i Norge i perioden 2015-2022)

	A	B	C	D	E	F
1	År	Menn	Kvinner	Totalt	Andel men %	Andel kvinner %
2	2015	2232	17493	19725	11,32	88,68
3	2016	2911	21439	24350	11,95	88,05
4	2017	3558	24785	28343	12,55	87,45
5	2018	3957	27327	31284	12,65	87,35
6	2019	4698	30733	35431	13,26	86,74
7	2020	5511	33958	39469	13,96	86,04
8	2021	6447	37357	43804	14,72	85,28
9	2022	7317	40472	47789	15,31	84,69

	A	B	C	D	E	F
1	År	Menn	Kvinner	Totalt	Andel men %	Andel kvinner %
2	2015	2232	17493	=B2+C2	=(B2/D2)*100	=(C2/D2)*100
3	2016	2911	21439	=B3+C3	=(B3/D3)*100	=(C3/D3)*100
4	2017	3558	24785	=B4+C4	=(B4/D4)*100	=(C4/D4)*100
5	2018	3957	27327	=B5+C5	=(B5/D5)*100	=(C5/D5)*100
6	2019	4698	30733	=B6+C6	=(B6/D6)*100	=(C6/D6)*100
7	2020	5511	33958	=B7+C7	=(B7/D7)*100	=(C7/D7)*100
8	2021	6447	37357	=B8+C8	=(B8/D8)*100	=(C8/D8)*100
9	2022	7317	40472	=B9+C9	=(B9/D9)*100	=(C9/D9)*100
10						

Figur 3: Med formler

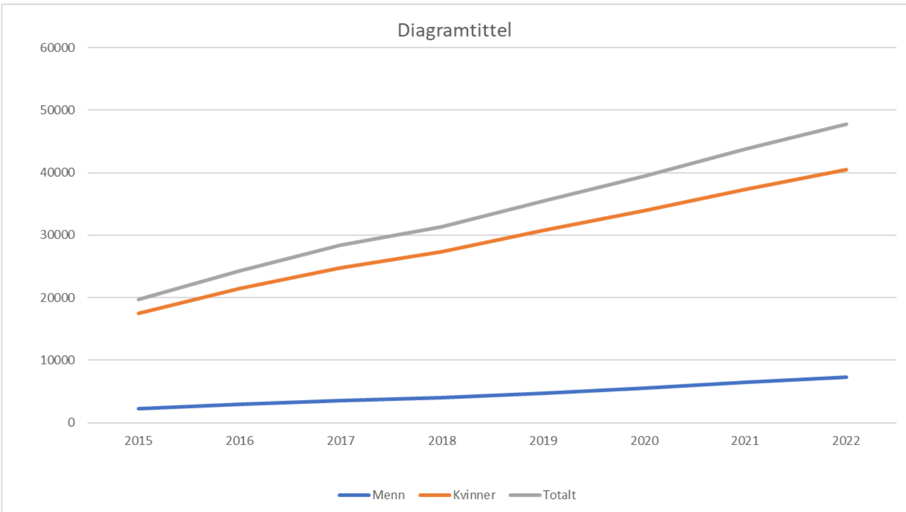
Stolpediagram som viser antall helsefagarbeider etter kjønn:



Figur 4: Stolpediagram

Vi ser at det er flest kvinner som jobber som helsefagarbeidere i alle år, men antallet vokser uansett kjønn.

Utvikling av antall helsefagarbeidere etter kjønn i perioden 2015-2022:



Figur 5: Linjediagram

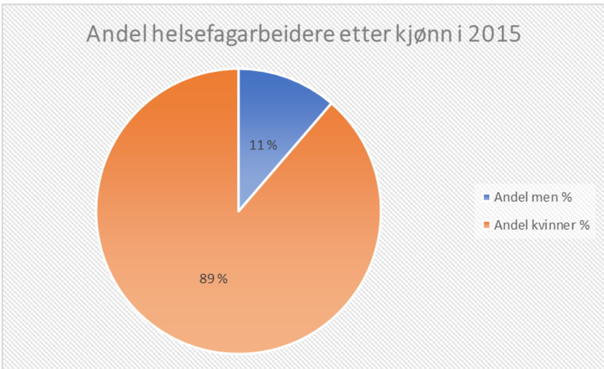
Fra linjediagrammet over ser at det er lineær økning av antall helsefagarbeider fra 2015 til 2022 uansett kjønn, men antallet kvinnelige helsefagarbeidere er mer enn dobbelt som mye som antall mannlige helsefagarbeidere.

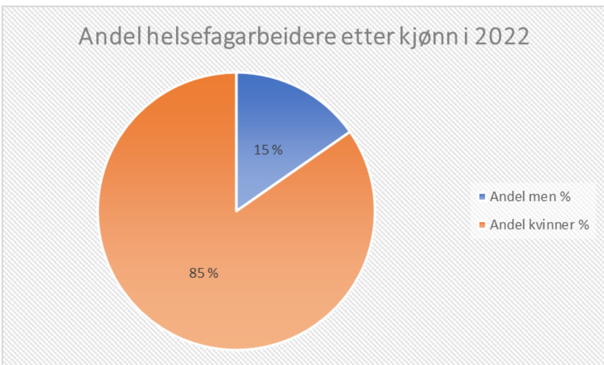
	Gjennomsnittlig endring per år i perioden 2015-2022
Menn	$\frac{7317-2232}{2022-2015} = 726,43$ personer per år
Kvinner	$\frac{40472-17493}{2022-2015} = 3282,71$ personer per år
Totalt	$\frac{47789-19725}{2022-2015} = 4009,14$ personer per år

Tabell 2

Fra tabellen ser vi at antallet mannlige helsefagarbeidere økte med 726 personer per år i gjennomsnitt i perioden 2015-2022, mens antallet kvinnelige helsefagarbeidere økte med 3282 personer per år i gjennomsnitt i samme periode. Det betyr at antallet kvinnelige helsefagarbeidere økte 4,5 ganger mer enn antallet mannlige helsefagarbeidere. Totalt sett økte antallet helsefagarbeidere med $4009,14$ personer per år i gjennomsnitt i perioden 2015-2022.

Sammenligning av andel mannlige og kvinnelige helsefagarbeidere i 2015 og 2022





Fra de to spektrogrammene ser vi at andel mannlige helsefagarbeidere økte med 5 prosentpoeng 1 2022 enn det var i 2015, men andel kvinnelige helsefagarbeidere minket 4 prosentpoeng enn det var i 2015.

	Økning i prosent fra 2015 til 2022
Menn	$\frac{7317-2232}{2232} \cdot 100 = 227,82\%$
Kvinner	$\frac{40472-17493}{17493} \cdot 100 = 131,36\%$
Totalt	$\frac{47789-19725}{19725} \cdot 100 = 142,28\%$

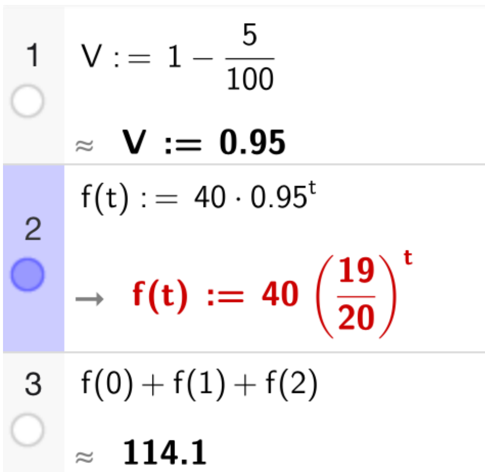
Tabell 3

Fra tabellen ovenfor, ser vi andelen mannlige helsefagarbeidere økte med 227,82 % 1 2022 enn det var i 2015, mens kvinnelige helsefagarbeidere økte med 131,36% i2022 enn det var i 2015. Totalt sette økte antallet helsefagarbeidere med 142,28 % i 2022 sammenlignet med 2015.

Oppgave 7 (8 poeng)

7a)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven. Vi finner først vekstfaktor (rad 1), så definerer funksjonen $f(t)$ som gir oss utslipp t år etter 2022 (rad 2). Summen av utslippene de første tre årene er på $114,1$ millioner tonn CO2-ekvivalenter (rad 3)



7b)

Vi kan bruke programmet nedenfor for å regne det samlede utslippet etter lang tid. Programmet kreves at brukeren gir antall år(n). Det samlede utslippet vil stabilisere seg på $800\,tonn$ over svært lang tid.

```python
def U(t):                   # Funksjon gir oss utslipp etter t pr
    return 40*(1-5/100)**t  # (1-5/100) er vekstfaktor


def SamledeUtslipp(n):      # Funksjon som gir oss samlede utskipp etter n år
    SumUtslipp=0            # Sette første sum lik null siden sum første året er det samme som funksjonsverdi (U) i t=0
    for i in range (n):
        SumUtslipp=SumUtslipp+U(i)
    return print( f'Det samlede utslippet etter {n} år er på {round(SumUtslipp,2)} '  )
```

```python
#Vi kjøre funksjonen for flere år inni en liste
{SamledeUtslipp(10), SamledeUtslipp(50), SamledeUtslipp(100),
 SamledeUtslipp(200),SamledeUtslipp(233),SamledeUtslipp(234),SamledeUtslipp(1000)}
```

```
Det samlede utslippet etter 10 år er på 321.01
Det samlede utslippet etter 50 år er på 738.44
Det samlede utslippet etter 100 år er på 795.26
Det samlede utslippet etter 200 år er på 799.97
Det samlede utslippet etter 233 år er på 799.99
Det samlede utslippet etter 234 år er på 800.0
Det samlede utslippet etter 1000 år er på 800.0
{None}
```

7c)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven. Vi definerer en funksjon $U(t)$ (rad 1) som gir oss utslippet etter t år når utslippet i år er u og utslippet reduseres med 5% hvert år. Vi regner samlede utslipp ved å bruke kommando *Sum(Utrykk,variabel, start,slutt)* og da får vi $20u$ (rad 2). Utslippet etter veldig lang tid vil være 20 ganger som utslippet i starten.

1. $U(t) := u\left(1-\frac{5}{100}\right)^t$

   $\rightarrow\ \mathbf{U(t) := \left(\frac{19}{20}\right)^t u}$

2. $\sum_{t=0}^{1000} U(t)$

   $\approx\ \mathbf{20\,u}$

3. $\frac{20\,u}{u}$

   $\approx\ \mathbf{20}$

Vi kan også bruke programmet fra b) til å løse oppgaven. Samlede utslippet (S) er gitt ved:

$$S = u + u\cdot 0,95 + u\cdot 0,95^2 + \ldots + \qquad = u\left(1 + 0,95 + 0,95^2 + \ldots +\right)$$

Vi har tatt u som felles faktor, og da kan vi lage en funksjon i Python som gir oss summen av 0.95^t der t starter fra 0.

```
def U(t):                      # Funksjon gir oss utslipp etter t år
    return (1-5/100)**t    # (1-5/100) er vekstfaktor


def SamledeUtslipp(n) :        # Funksjon som gir oss samlede utskipp etter n år
    SumUtslipp=0               # Sette forste sum lik null siden sum forste året er det samme som funksjonsverdi (U) i t=0
    for i in range (n):
        SumUtslipp=SumUtslipp+U(i)
    return print (f'Det samlede utslippet etter {n} år er på u. {round(SumUtslipp,2)} ' )
```

```
SamledeUtslipp(1000)
```

```
Det samlede utslippet etter 1000 år er på u. 20.0
```

Figur 6

7d)

Vi kan følge samme ide som i oppgave c). Summen (S) av utslippene når utslippet i år er u og utslippet reduseres med $p\%$ hvert år er gitt ved

$$S = u + u \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) + u \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 + \ldots + \quad = u\left(1 + \left(1 - \frac{p}{100}\right) + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 + \ldots +\right)$$

$$T = u \cdot \frac{100}{p}$$

Vi kan setter de to utrykkene like og da kan vi stryke u fra begge sider:

$$T = S$$

$$u \cdot \frac{p}{100} = u\left(1 + \left(1 - \frac{p}{100}\right) + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 + \ldots +\right)$$

$$\frac{p}{100} = \left(1 + \left(1 - \frac{p}{100}\right) + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 + \ldots + \ldots\right)$$

Vi kan også bruke programmering for å sjekke likheten:

```
def U(t,u,p):                  # Funksjon gir oss utslipp etter t år med tid, start utslipp og nedgang prosent som input
    return u*(1-p/100)**t      # (1-5/100) er vekstfaktor


def SamledeUtslipp(n,u,p ) :   # Funksjon som gir oss samlede utskipp etter n år
    SumUtslipp=0               # Sette forste sum lik null siden sum forste året er det samme som funksjonsverdi (U) i t=0
    for i in range (n):
        SumUtslipp=SumUtslipp+U(i,u,p)
    return round(SumUtslipp,2)

def T(u,p):              # Funksjon som gir samlede utslipp via Ole formel
    return round(u*(100/p),2)

#Vi sammenligner utrykkene ved å sette u=1 og sjekke likhet for prosenter mellom 1 og 100 og bruke 1000 år (veldig lang tid)
#og print resultatene kun hvis de to utrykkene er ikke like
for p in range(1,101):
    if SamledeUtslipp(1000, 1,p)!=T(1,p):
        print( f'Prosent nedgang er {p}%,\n Samlede utslipp:\n via Sum {SamledeUtslipp(10000, 1,p)} og via Ole formel {T(1,p)} ' )
```

```
Prosent nedgang er 32%,
 Samlede utslipp:
 via Sum 3.13 og via Ole formel 3.12
```

Fra utskriften til programmet ser vi at de to utrykkene er like med to desimaler nøyaktighet bortsett fra når $p = 32\%$da er de like med kun en desimal nøyaktighet.

Man kan også bruke Geogebra eller Excel til å finne om formlene gir samme svar for ulike verdier av u og p mens holde n konstant (n bør være stor nok for at summen skal stabilisere seg på en verdi)

Oppgave 8 (6 poeng)

8a)

Først finner vi hvor mye utslippene skal være i 2030 ved å bruke at,

$$Ny\,verdi = Gammel\,verdi \cdot Vekstfaktor$$
$$Vekstfaktor = 1 - \frac{prosenttallet}{100}$$

(se rad 2). Deretter lager vi liste med de to punktene som er oppgitt i denne tabellen (rad 3),

År etter 2022	Utslipp i millioner tonn CO2-ekvivalenter
0	48.9
8	23.085

Tabell 4

Siden Anders argumenterer for at utslippet skal reduseres med et fast antall tonn hvert år, kan dette beskrives ved hjelp av en lineær modell. Vi benytter kommandoen *RegLin(Liste med punkt)* for å finne modellen $f(x)$ (se rad 4).

På den andre siden, i følge Arne, vil utslippene minske med en fast prosentandel hvert år. I dette tilfellet kan en eksponentiell modell være hensiktsmessig. Vi bruker kommandoen *RegEksp(Liste med punkt)* for å finne modellen $g(x)$ (se rad 5).

a)

$$a = 51.3\left(1 - \frac{55}{100}\right)$$

$$= 23.085$$

$L = \{(0, 48.9), (8, 23.085)\}$

$= \{(0,\ 48.9),\ (8,\ 23.085)\}$

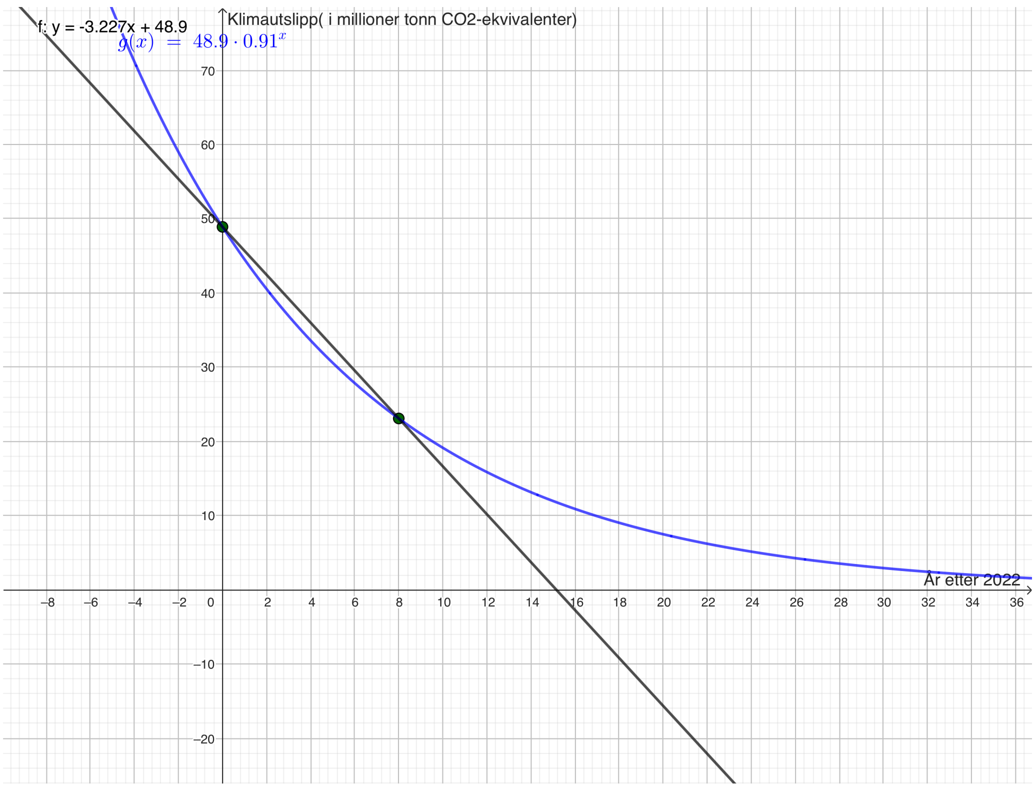
$f : \text{RegLin}(L)$

$= \ y = -3.227x + 48.9$

$g(x) = \text{RegEksp}(L)$

$= \ 48.9 \cdot 0.91^x$

Grafen til f og g er gitt nedenfor:



8b)

Hvis utslippene skal reduseres med 90% fra 1990, må utslippene i 2050 bli $5,13$ millioner tonn CO_2-ekvivalenter (rad 2), men hvis utslippene skal reduseres med 95% fra 1990, må utslippene i 2050 bli $2,565$ millioner tonn CO_2-ekvivalenter (rad 3) .

Fra 2022 til 2050 er det 28 år. Modellen f til Anders viser at utslippet er -41.453 millioner tonn CO_2-ekvivalenter (rad 4). Selv om Norge ville nå målet ved å følge denne modellen, gir modellen et negativt resultat, noe som ikke gir mening eller kan tolkes som at Norge vil ta imot utslipp fra andre land.

Arnes modell gir en mer logisk prediksjon, med et utslipp på $3,535$ millioner tonn CO_2-ekvivalenter (rad 5). Dette betyr at Norge vil nå målet om en reduksjon på 90% fra 1990, men vil ikke oppnå målet om 95% reduksjon fra utslippene i 1990. Det er verdt å merke seg at Arnes modell forutsetter at utslippene skal reduseres med $1 - 0,91 = 0,09 = 9\%$ hvert år fra utslippet i 2022.

b)

$$b = 51.3 \left(1 - \frac{90}{100}\right)$$
$$= 5.13$$

$$c = 51.3 \left(1 - \frac{95}{100}\right)$$
$$= 2.565$$

$$d = f(28)$$
$$= -41.453$$

$$e = g(28)$$
$$= 3.535$$