Utdanningsdirektoratet

Eksamen

20.11.2023

REA3024 Matematikk R2

EKSAMEN ETTER KUNNSKAPSLØFTET LK06

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar. (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Tønne: https://tonnegarden.no/tonner/ Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på nettsidene til Utdanningsdirektoratet.

Del 1

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \cos(4x - 1)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\tan x}$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Rekn ut integralet

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Kva fortel svaret deg?

Oppgåve 3 (4 poeng)

Rekn ut integrala

a) $\int x \cdot \mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \dfrac{3x+1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

Oppgåve 4 (2 poeng)

Bestem konvergensområdet til den geometriske rekkja

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + \cdots.$$

Oppgåve 5 (4 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av dei fire første ledda, når du får vite at $a_1 = 4$.

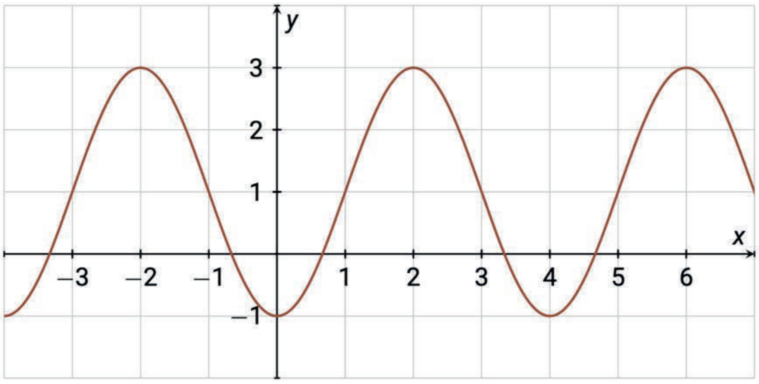
I ei aritmetisk rekkje er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

Oppgåve 6 (6 poeng)

Figuren til høgre viser grafen til ein funksjon *f* på forma

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d\,.$$



a) Bruk grafen til å bestemme A, c, φ og d.

b) Grunngi at $f(x)$ kan skrivast på forma

$$f(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

c) Løys likninga

$$f(x) = 2\,, \qquad x \in [0,4]\,.$$

Oppgåve 7 (6 poeng)

Eit plan α er gitt ved likninga

$$x-2y+2z+1=0.$$

Vi har gitt punktet $A(4,\ 2,\ 2)$.

a) Bestem ei parameterframstilling for linja gjennom A som står normalt på planet α.

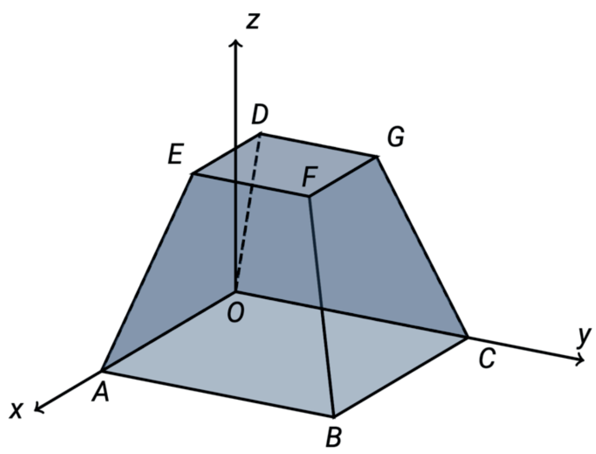
b) Bestem avstanden frå A til α.

Vi speglar punktet A om α og får eit punkt B.

c) Bestem koordinatane til B.

Oppgåve 8 (4 poeng)

Figuren til høgre viser ein rett avkorta pyramide med hjørne i punkta $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(1,1,3)$, $E(3,1,3)$, $F(3,3,3)$ og $G(1,3,3)$.



Forlengingane av AE og OD skjer kvarandre i eit punkt T.

a) Bestem koordinatane til T.

b) Bruk vektorrekning til å bestemme volumet av den avkorta pyramiden.

Oppgåve 9 (4 poeng)

Løys differensiallikningane

a) $y'+2y=1 \quad , \quad y(0)=3$

b) $(4+x^2)\cdot y' = 2x-2xy$

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Tabellen nedanfor viser vasstanden (tidvasshøgda) ved Stord verft i Sunnhordland, for nokre tidspunkt 24. april 2023.

Tidvatn er dei periodiske endringane i havnivået som oppstår som eit resultat av gravitasjonskreftene som månen og sola verkar på jorda med.

Tal på timar etter midnatt	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Vasstand (cm)	99,6	119	94,3	60,5	53,4	76,0	96,7	115	99,9	68,1

Ei oljeplattform skal slepast ut frå verftet dagen etter. Dette må gjerast når vasstanden er meir enn 90 cm.

a) Lag ein modell *f* som du kan bruke til å bestemme vasstanden ved verftet i den aktuelle perioden.

b) Når vil vasstanden auke raskast den 25. april, ifølgje modellen?

Det vil ta 2 timar å slepe ut oljeplattforma.

c) Ved kva for eit klokkeslett kan dei seinast starte med å slepe ut plattforma?

Oppgåve 2 (6 poeng)

I januar 2023 var folketalet i eit land 14,4 millionar. Den årlege veksten i folketalet var då 2,2 %. Då folketalet var 13,1 millionar, var den årlege veksten i folketal 2,5 %.

For å lage ein modell *N(t)* for folketalet i dette landet kan vi bruke differensiallikninga

$$\frac{N'}{N} = a - bN\ .$$

Her er $N(t)$ folketalet (i millionar) t år etter januar 2023.

a) Vis at $a = 0{,}055$ og $b = 0{,}0023$.

b) Løys differensiallikninga.

c) Bestem $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$. Gi ei praktisk tolking av svaret.

Oppgåve 3 (8 poeng)

Gitt punkta $A(1, 0, -1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(-1, 4, 4)$ og $D(t, 3-t^2, 2t+5)$, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Rekn ut $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Kva fortel svaret deg?

Ei kuleflate har sentrum i *D* og tangerer planet α som går gjennom A, B og C .

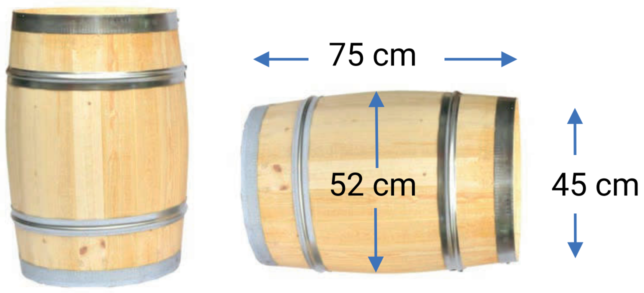
Kuleflata tangerer planet α i eit punkt *T*.

b) Bestem koordinatane til *T* når $t = 1$.

c) Bestem radiusen til kuleflata, uttrykt ved *t*.

d) Bestem dei eksakte koordinatane til *T* når kuleflata har minst mogleg radius.

Oppgåve 4 (4 poeng)



Ei tønne er 75 cm høg. Diameteren i botnen og toppen er 45 cm.
Den største diameteren er 52 cm.

Sida i tønna frå toppen til botnen er forma som ein parabel.

Bruk blant anna integrasjon til å bestemme volumet av tønna.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Tønne: https://tonnegarden.no/tonner/ Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \cos(4x - 1)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\tan x}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Regn ut integralet

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hva forteller svaret deg?

Oppgave 3 (4 poeng)

Regn ut integralene

a) $\int x \cdot \mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \dfrac{3x+1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 4 (2 poeng)

Bestem konvergensområdet til den geometriske rekken

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + \cdots.$$

Oppgave 5 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$.

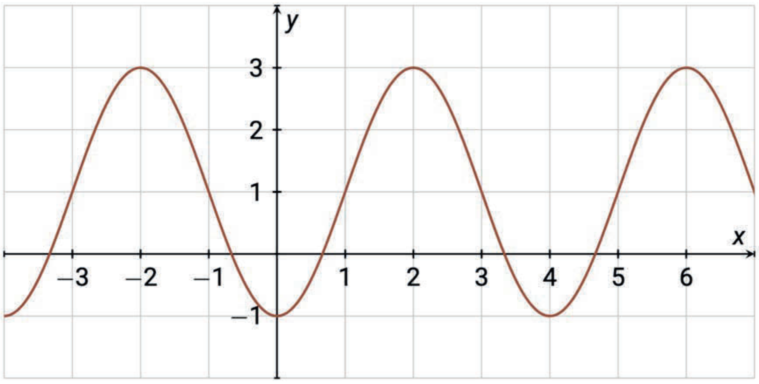
I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

Oppgave 6 (6 poeng)

Figuren til høyre viser grafen til en funksjon f på formen

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d\,.$$



a) Bruk grafen til å bestemme A, c, φ og d.

b) Begrunn at $f(x)$ kan skrives på formen

$$f(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

c) Løs likningen

$$f(x) = 2\,, \qquad x \in [0,4]\,.$$

Oppgave 7 (6 poeng)

Et plan α er gitt ved likningen

$$x-2y+2z+1=0.$$

Vi har gitt punktet $A(4, 2, 2)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen gjennom A som står normalt på planet α.

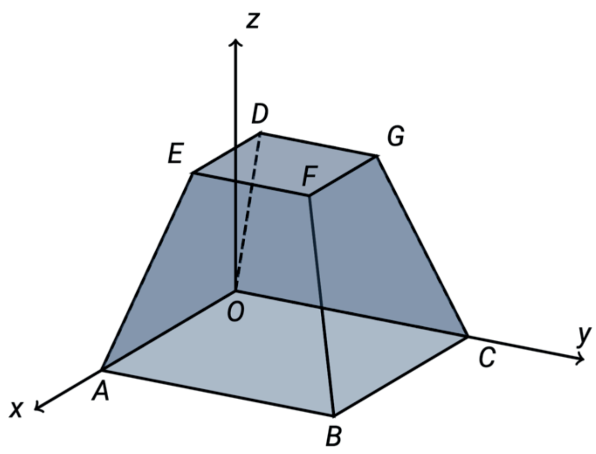
b) Bestem avstanden fra A til α.

Vi speiler punktet A om α og får et punkt B.

c) Bestem koordinatene til B.

Oppgave 8 (4 poeng)

Figuren til høyre viser en rett avkortet pyramide med hjørner i punktene $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(1,1,3)$, $E(3,1,3)$, $F(3,3,3)$ og $G(1,3,3)$.



Forlengelsene av AE og OD skjærer hverandre i et punkt T.

a) Bestem koordinatene til T.

b) Bruk vektorregning til å bestemme volumet av den avkortede pyramiden.

Oppgave 9 (4 poeng)

Løs differensiallikningene

a) $y'+2y=1$, $y(0)=3$

b) $(4+x^2)\cdot y'=2x-2xy$

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser vannstanden (tidevannshøyden) ved Stord verft i Sunnhordland, for noen tidspunkter 24. april 2023.

Tidevann er de periodiske endringene i havnivået som oppstår som et resultat av gravitasjonskreftene som månen og solen virker på jorden med.

Antall timer etter midnatt	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Vannstand (cm)	99,6	119	94,3	60,5	53,4	76,0	96,7	115	99,9	68,1

En oljeplattform skal slepes ut fra verftet dagen etter. Dette må gjøres når vannstanden er mer enn 90 cm.

a) Lag en modell *f* som du kan bruke til å bestemme vannstanden ved verftet i den aktuelle perioden.

b) Når vil vannstanden øke raskest den 25. april, ifølge modellen?

Det vil ta 2 timer å slepe ut oljeplattformen.

c) Ved hvilket klokkeslett kan de senest starte med å slepe ut plattformen?

Oppgave 2 (6 poeng)

I januar 2023 var folketallet i et land 14,4 millioner. Den årlige veksten i folketallet var da 2,2 %. Da folketallet var 13,1 millioner, var den årlige veksten i folketall 2,5 %.

For å lage en modell *N(t)* for folketallet i dette landet kan vi bruke differensiallikningen

$$\frac{N'}{N} = a - bN \,.$$

Her er $N(t)$ folketallet (i millioner) t år etter januar 2023.

a) Vis at $a = 0{,}055$ og $b = 0{,}0023$.

b) Løs differensiallikningen.

c) Bestem $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 3 (8 poeng)

Gitt punktene $A(1,\, 0,\, -1)$, $B(1,\, 1,\, 0)$, $C(-1,\, 4,\, 4)$ og $D(t, 3-t^2, 2t+5)$, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Regn ut $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Hva forteller svaret deg?

En kuleflate har sentrum i D og tangerer planet α som går gjennom A, B og C.

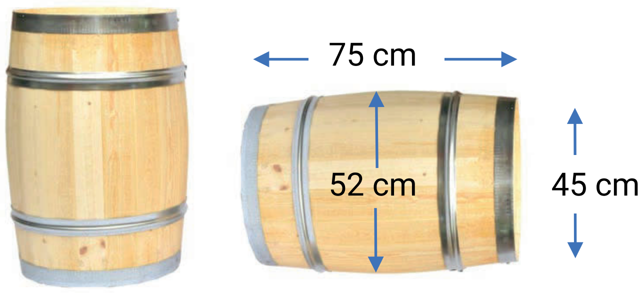
Kuleflaten tangerer planet α i et punkt T.

b) Bestem koordinatene til T når $t = 1$.

c) Bestem radiusen til kuleflaten, uttrykt ved t.

d) Bestem de eksakte koordinatene til T når kuleflaten har minst mulig radius.

Oppgave 4 (4 poeng)



En tønne er 75 cm høy. Diameteren i bunnen og toppen er 45 cm.
Den største diameteren er 52 cm.

Siden i tønnen fra toppen til bunnen er formet som en parabel.

Bruk blant annet integrasjon til å bestemme volumet av tønnen.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!