Eksamen
Matematikk 1P
Løsningsforslag

Martin Ansnes

Vår 2024

Del 1

Oppgave 1

2 ‰ av verdens befolkning er 18 millioner. Det vil si at 1 ‰ er 9 millioner, og verdens befolkning er 1000 ganger så stor som dette. Verdens befolkning på dette tidspunkter er derfor 9 milliarder.

Oppgave 2

a) 20 000 er beløpet hun setter inn i banken. 1,0485 er vekstfaktoren som tilsvarer en vekst på 4,85 %. Det er renta.

b) Vi ser at det defineres en funksjon $f(x) = 20000 \cdot 1{,}0485^x$ i linje 1 og 2. Fra oppgaveteksten vet vi at det er mengden penger hun har på konto etter x år. Deretter defineres verdiene `start = 0` og `slutt = 10`. Til slutt regnes verdien

$$v = \frac{f(\texttt{slutt}) - f(\texttt{start})}{\texttt{slutt} - \texttt{start}} = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0}$$

ut. Dette er den gjennomsnittlige vekstfarten for funksjonen fra $x = 0$ til $x = 10$. Det vil si gjennomsnittlig årlig vekst i kroner på kontoen til Ada i løpet av de første 10 årene. Det er dette tallet som skrives ut i linje 9.

Oppgave 3

En graf som viser sammenheng mellom to proporsjonale størrelser, er en rett linje som går gjennom origo. Det er kun f som har denne egenskapen. En graf som viser sammenheng mellom to omvendt proporsjonale størrelser, er en hyperbel som aldri vil krysse verken x- eller y-aksen. Det er kun p som har denne egenskapen.

Oppgave 4

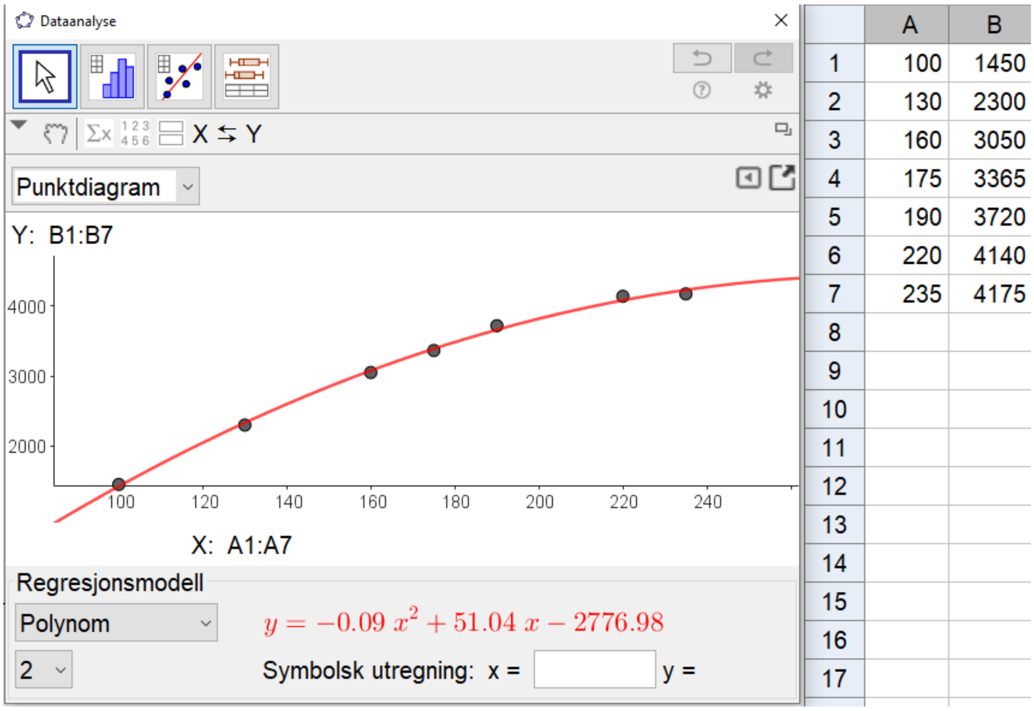
a) $B = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(\frac{70}{10})^2}{2} = \dfrac{7^2}{2} = \dfrac{49}{2} = 24{,}5.$

b) $B = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2B} = \sqrt{2 \cdot 40{,}5} = \sqrt{81} = 9.$ Farta i km/h delt på 10 er 9, det vil si at farta er 90 km/h.

Del 2

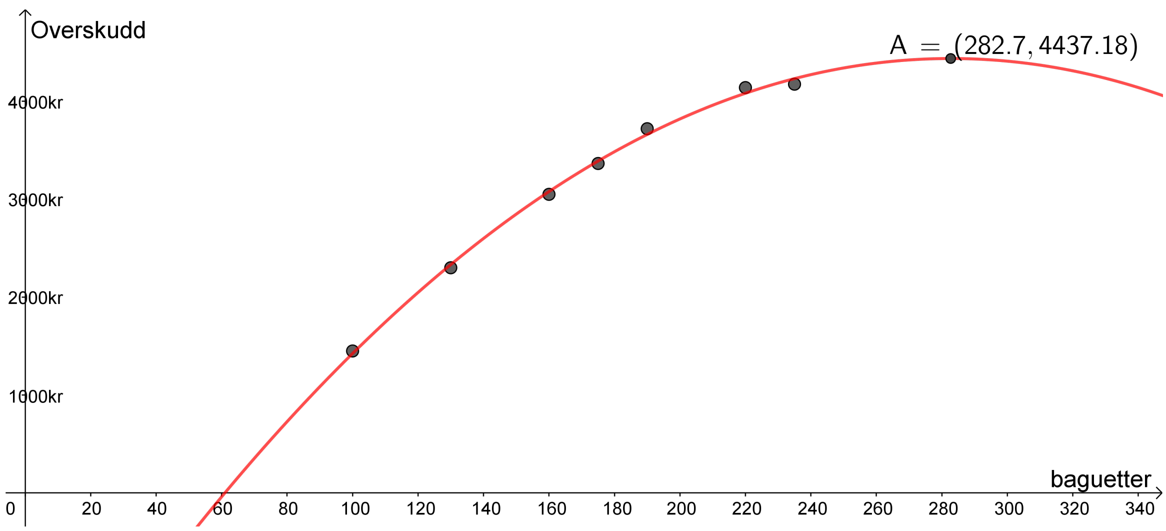
Oppgave 1

a)
- Legger verdiene inn i regneark i GeoGebra.
- Velger regresjonsanalyse.
- Velger polynom med grad 2.



Ser at vi får den ønskede funksjonen (i rødt i bildet).

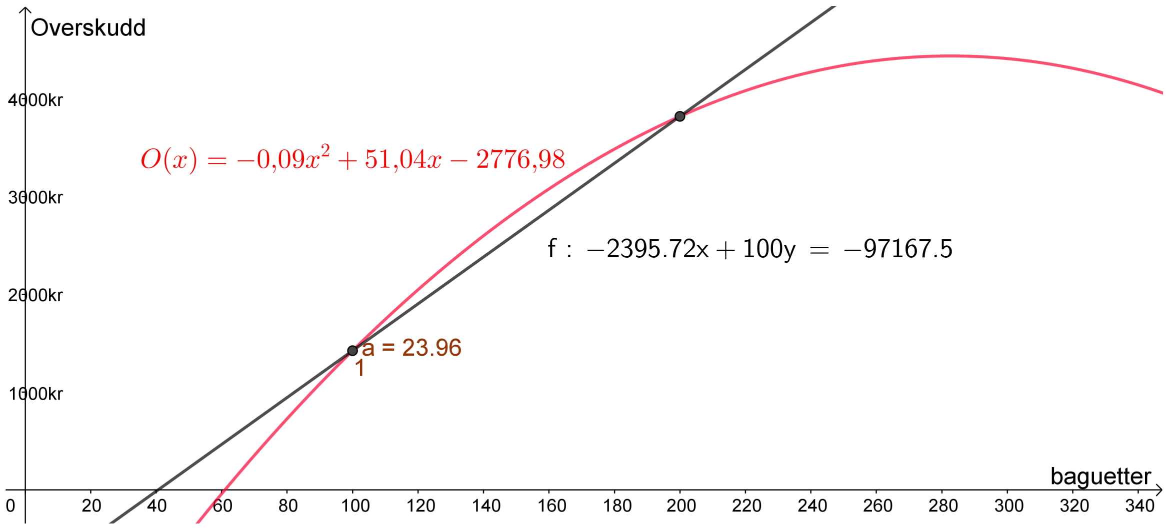
b) Finner det største overskuddet ved å kopiere funksjonen inn i grafikkfeltet og velge ekstremalpunkt. Det gir punktet (383, 4437), som jeg ser er et toppunkt. Det vil si at de må selge 383 baguetter og at overskuddet da blir 4437 kr. 383 er imidlertid utenfor området vi har data for, så det er ikke sikkert modellen gjelder her.



c)

- Skriver inn punktene $(100, O(100)$ og $(200, O(200)$ i innskrivingsfeltet.
- Tegner en linje mellom punktene.
- Velger stigning og trykker på den rette linja.

Dette gir et stigningstall på 23,96. Det er den gjennomsnittlige vekstfarta for overskuddet mellom 100 og 200 solgte baguetter. Det vil si at mellom 100 og 200 solgte baguetter er det en gjennomsnittlig vekst i overskuddet på om lag 24 kroner per baguette.

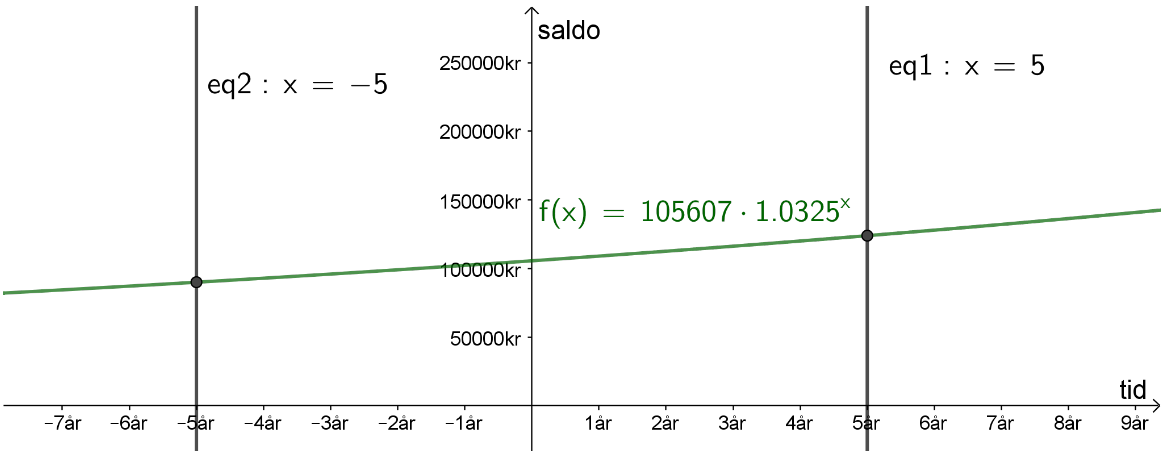


Oppgave 2

Funksjonen som viser hvor mye Gaute har på kontoen sin x år fra nå, vil være

$$f(x) = 105607 \cdot 1{,}0325^x.$$

- Grafisk: Løser begge oppgavene under ett.
  - Legger inn funksjonen i GeoGebra
  - Legger inn linjene $x = 5$ og $x = -5$.
  - Velger skjæring mellom to objekt.
  - Leser av y-verdiene til de to punktene, som er saldoen om 5 år og om -5 år, altså for 5 år siden.
  - Dette gir en saldo på 123 920 kr om 5 år, og at han satte inn 90 000 kr for 5 år siden.



- Ved regning:

  a) $f(5) = 105607 \cdot 1{,}0325^5 \approx 123920$

  b) $f(-5) = 105607 \cdot 1{,}0325^{-5} \approx 90000$

Oppgave 3

a) Gjennomsnittlig per døgn:

$$\begin{aligned} 1{,}794 \text{ millioner fat} \cdot 158{,}987 \text{ liter per fat} &= 285{,}222678 \text{ millioner liter} \\ &= 285{,}222678 \cdot 10^6 \text{ liter.} \end{aligned}$$

2023 besto av 365 dager, så totalt i 2023 ble det produsert

$$\begin{aligned} 285{,}222678 \cdot 10^6 \text{ liter per dag} \cdot 365 \text{ dager} &= 104106{,}27747 \cdot 10^6 \text{ liter} \\ &\approx 1{,}041 \cdot 10^{11} \text{ liter.} \end{aligned}$$

b) Vi bruker at gammel verdi multiplisert med en vekstfaktor blir ny verdi.

$$1{,}685x = 1{,}794 \Rightarrow x = \frac{1{,}794}{1{,}685} \approx 1{,}0647.$$

Det tilsvarer en stigning på ca 6,5 %.

Oppgave 4

a) Regner først ut total tid i sekunder:

$$3 \text{ min} + 27{,}14s = 3 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min} + 27{,}14 \text{ s} = 207{,}14 \text{ s}.$$

1500 meter er $\frac{1500}{400} = 3{,}75$ runder. For å finne gjennomsnittlig rundetid, deler jeg total tid på antall runder.

$$\frac{207{,}14 \text{ s}}{3{,}75 \text{ runder}} \approx 55{,}31 \text{ s}.$$

b) Vi kan bruke sammenhengen $s = vt$, der s er strekning, v er fart og t er tid. Farta er oppgitt i km/h, så jeg regner den om til m/s slik at tida blir i sekunder og strekningen i meter.

$$v = \frac{25{,}89}{3{,}6} \approx 7{,}19 \text{ m/s}.$$

Tida i sekunder blir $t = 3 \text{ min} + 43{,}73s = 3 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min} + 43{,}73 \text{ s} = 223{,}73 \text{ s}$. Dermed kan jeg finne strekningen

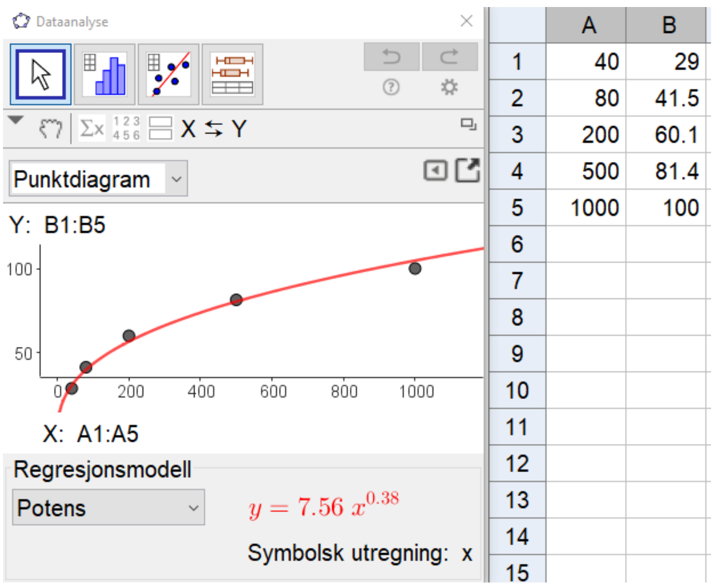
$$s = vt = 7{,}19 \text{ m/s} \cdot 223{,}73 \text{ s} \approx 1609 \text{ m}.$$

Oppgave 5

- Hvert tall i følgen er det forrige tallet multiplisert med 2 og lagt til 1.
- Vi begynner på 2, som er et partall. For alle tall i følgen får vi neste tall ved å multiplisere med 2 - som gir et partall - for så å legge til 1. Det vil alltid gi et oddetall.

Oppgave 6

a)
- Legger verdiene inn i regneark i GeoGebra.
- Velger regresjonsanalyse.
- Velger potens.



Vi ser at dette gir funksjonen

$$K(x) = 7{,}56 \cdot x^{0{,}38}.$$

b) Aris modell sier at lufttrykket synker med med 12 % per km. I tillegg vet vi at trykket er om lag 1000 hPa ved havoverflata. Det gir modellen

$$A(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x.$$

Lisas modell sier at lufttrykket halveres for hver 5,5 km. Det gir modellen

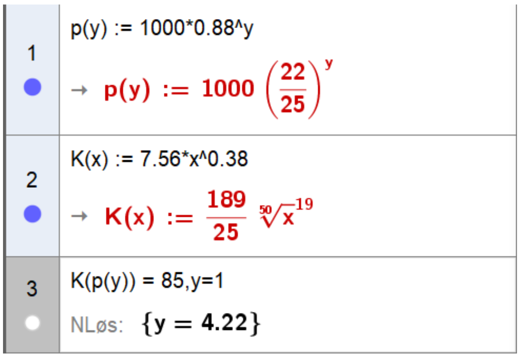
$$L(x) = 1000 \cdot 0{,}5^{x/5{,}5}$$

Her blir eksponenten 1 når $x = 5{,}5$, den blir 2 når $x = 11$, osv, så den gir en ny halvering for hver 5,5 km. Ved å bruke potensregneregler kan vi se at

$$L(x) = 1000 \cdot 0{,}5^{x/5{,}5} = 1000 \cdot \left(0{,}5^{1/5{,}5}\right)^x \approx 1000 \cdot 0{,}88^x = A(x),$$

så de to modellene er omtrent like.

c)
- Legger inn modellen for lufttrykket p ved y km over havnivå i CAS.
- Legger inn modellen $K(x)$ fra regresjonen i oppgave **a)**.
- Løser likningen $K(p(x) = 85$ numerisk.



Dette gir at ved en høyde på 4,22 km over havnivå, vil vann koke på 85 °C. Holder man seg lavere enn denne høyden, vil man kunne klare å få hardkokte egg. Høyere enn dette bør man bruke trykkoker.

Oppgave 7

Denne oppgaven kan løses på mange måter.

1. Det er mitt par med sko som blir gratis, så jeg får all rabatten. Dermed bør jeg betale 1550 kr + 800 kr - $800 \cdot 1{,}00$ kr, der 1,00 er prosentfaktor for 100 %. Det gir 1550 kr, mens min venn må betale 1350 kr - $800 \cdot 0{,}00$ kr = 1350 kr. Her er 0,00 prosentfaktoren for 0 %.

2. Vi deler rabatten likt. Prosentfaktor for 50 % er 0,50. Da må jeg betale 1550 kr 800 kr - $800 \cdot 0{,}5$ kr = 1950 kr, mens min venn må betale 1350 kr - $800 \cdot 0{,}5$ kr = 950 kr

3. Jeg kjøper to par, min venn kjøper ett par. Da bør jeg få 66,7 % av rabatten, mens min venn bør få 33,3 %. Dermed bør jeg betale 1550 kr + 800 kr - $800 \cdot 0{,}667$ kr $\approx$ 1816 kr, mens min venn bør betale 1350 kr - $800 \cdot 0{,}333$ kr $\approx$ 1084 kr.

4. Uten rabatt ville vi betalt $1550 + 800 + 1350 = 3700$, mens med rabatt betaler vi 2900. Rabatten blir $1 - \frac{2900}{3700} \approx 0{,}216$ som tilsvarer om lag 21,6 %. Dermed bør jeg få denne rabatten på mitt totale kjøp av sko, og min venn bør få den samme prosentvise rabatten på sitt kjøp. Det vil si at jeg betaler $(1550 + 800) \cdot 0{,}784 \approx 1842$, mens min venn betaler $1350 \cdot 0{,}784 \approx 1058$.

Alt avhenger av hvordan man synes fordelingen *bør* være.