Oppgave 1

$f(x) = 4x^2 \cdot ln(3x)$

$f(x) = u(x) \cdot v(x), \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$u(x) = 4x^2 \qquad u'(x) = 8x \qquad v(x) = ln(3x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 8x \cdot ln(3x) + \frac{4x^2}{x} = 8x \cdot ln(3x) + 4x$

Oppgave 2

$(ln\, x)^2 - ln\, x = 6$

$(ln\, x)^2 - ln\, x - 6 = 0$

$u^2 - u - 6 = 0, \qquad u = ln\, x$

$(u - 3)(u + 2) = 0$

$u = 3 \quad \vee \quad u = -2$

$ln\, x = 3 \quad \vee \quad ln\, x = -2$

$x = e^3 \quad \vee \quad x = e^{-2}$

To løsninger.

Oppgave 3

$\lim_{x \to \infty} e^{-x+1} = e^{-\infty+1} \approx e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \approx 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x+1} = e^{\infty+1} \approx e^{\infty} \to \infty$ Altså ingen grenseverdi.

Oppgave 4

a) Trekker to sokker tilfeldig, 6 gule, 5 svarte, 4 hvite. (15 totalt)

$P(To\ gule) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{6 \cdot 5}{15 \cdot 14} = \frac{3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

Sannsynligheten for at to sokker er gule er 1/7.

b) Trekker tre sokker tilfeldig fra skuffa. Sannsynlighet for at minst to er like:

$P(minst\ to\ like) = 1 - P(alle\ ulike) = 1 - 3! \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = 1 - 6 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{13} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$

Sannsynligheten for at minst to er like er 87/91.

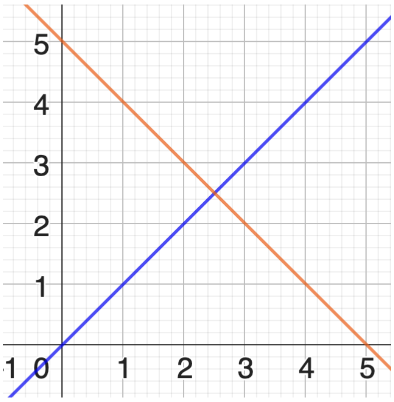
Oppgave 5

Denne oppgaven har vært tema for diskusjon blant lærere.
Mulig løsningsstrategi:

Velger først å se på:

- Verdimengden skal være uendret. Setter inn grenseverdier for f(x) og finner verdien.
    - $f(0) = 0$, $f(2^-) = 2$, $f(2^+) = 3$, $f(5) = 0$. Nok å sjekke ytterpunkter siden funksjonen er kontinuerlig.

  $V_f = [0, 3)$
- *f* skal være kontinuerlig, prøver å finne skjæringspunktet mellom de to delfunksjonene og tegner grafen.
    - $x = 5 - x, \quad 2x = 5 \quad x = \frac{5}{2} = 2,5$



- Til slutt har vi at definisjonsmengden skal være så stor som mulig.

For at verdimengden skal være uendret og *f* skal være kontinuerlig setter dette noen begrensninger. Som grafen viser kan D_f være fra [0, 3] eller [2, 5] for samme verdimengde, gitt kun en av delfunksjonene.
Ellers kan man fjerne verdien 2 fra D_f, noe som gir størst definisjonsmengde.

Altså:

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 2 \\ 5 - x & ,2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Vil gi størst definisjonsmengde.

Del 2

Oppgave 1

$K(x) = 200x \cdot 1.02^x + 200$

$I(x) = 600x$

$O(x) = I(x) - K(x)$

$= 600x - (200x \cdot 1.02^x + 200)$

$A = \text{Ekstremalpunkt}(O, -1.16, 95.58)$

$= (41.48, 9303.61)$

$E(x) = \frac{K(x)}{x}$

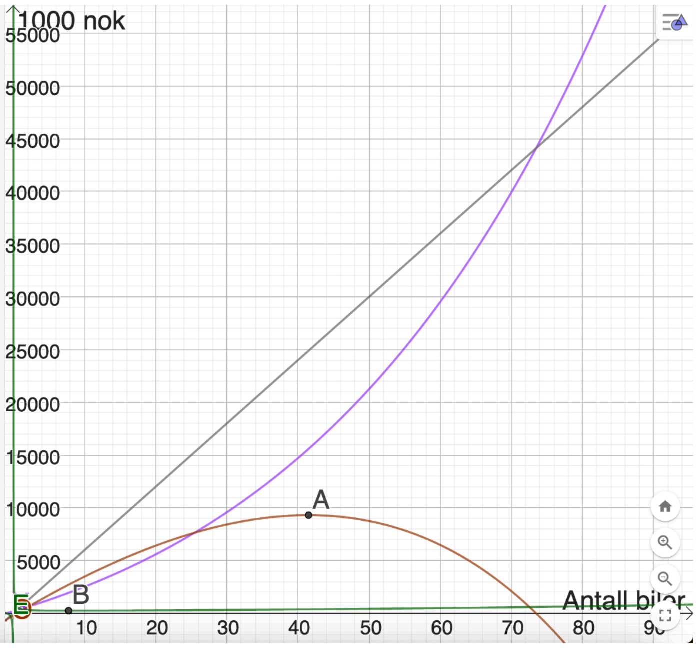
$= \frac{200x \cdot 1.02^x + 200}{x}$

$a = K(70)$

$= 39896.39$

$B = \text{Ekstremalpunkt}(E, 1, 1000)$

$= (7.74, 250.27)$



a) Overskudd = inntekt - kostnad. For å finne størst overskudd må en finne ut når O(x) har et toppunkt. Dette kan en gjøre ved å finne O'(x) = 0 og O''(x) > 0, eller ved å bruke ekstremalpunktfunksjonen i GeoGebra.
Finner her punkt A = (41.48, 9303.61). Størst overskudd får vi altså ved å produsere 41 biler. Sjekket også for 42 biler, men 41 gir marginalt større overskudd.

b) Enhetskostnad er kostnad per enhet. E(x) = K(x)/x. Finner bunnpunktet til E(x).
B = (7.74, 250.27). Setter inn både 7 og 8 biler, og finner at 8 biler har lavest enhetskostnad, da er enhetskostnaden 250 300 kr.

c) Finner kostnaden for å produsere 70 biler. K(70) = 39 896 390 nok. Vi vet at O = 70 000 000 nok. Skal finne pris per bil. Finner først inntekten, og deler inntekten på 70 biler for å finne pris per bil. De solgte hver bil for ca. 784 000 nok.

$K := 39896390$

$\rightarrow \; \mathbf{K := 39896390}$

$O := 15000000$

$\rightarrow \; \mathbf{O := 15000000}$

$O = I - K$

NLøs: **?**

$I := 54896390$

$\rightarrow \; \mathbf{I := 54896390}$

$\frac{I}{70}$

$\approx \; \mathbf{784234.14}$

Oppgave 2

a) Når x > 0 er ln(x) definert.

$$e^{k \cdot ln(x)} = (e^{ln(x)})^k = x^k$$

Påstanden stemmer.

b) Når 1 < a < $\frac{b}{2}$

Setter opp kombinasjonene i påstanden og fjerner like faktorer på begge sider. (Minste a er 2, og minste b er 5.)

$$\binom{b}{a+1} = \frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a+1)+1)}{(a+1) \cdot (a) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$\binom{b}{a} = \frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)}{(a) \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$\binom{b}{a+1} > \binom{b}{a}$$

$$\frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-(a+1)+1)}{(a+1) \cdot (a) \cdot \ldots \cdot 1} > \frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)}{(a) \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$\frac{b-a}{a+1} > \frac{1}{1}$$

$$b - a > a + 1$$

$$b - 1 > 2a$$

$$\frac{b-1}{2} > a$$

Siden $\frac{b-1}{2} < \frac{b}{2}$ vil ikke påstanden alltid være sann. Vi vet at $\frac{b}{2} > a$, og ut i fra utregninger over kan vi ikke garantere for at $\frac{b-1}{2} > a$. Et eksempel er a = 2 og b = 5. b/2 = 2,5 > a, mens (b-1)/2 = 2, noe som ikke er større enn a.

nCr(5, 2)

→ **10**

nCr(5, 3)

→ **10**

Oppgave 3

Passordet skal bestå av 6 bokstaver. I norsk alfabet har vi 29 bokstaver, jeg tar dermed utgangspunkt i 29 bokstaver (selv om æ, ø, å ikke alltid er ok i passord).

For hver plass kan vi enten ha en stor ELLER en liten bokstav, det er altså 29+29 = 58 muligheter i hver posisjon.

a) Ser på alle muligheter og trekker fra antall muligheter der alle er store ELLER alle er små.

    Totalt antall muligheter: 58^6

    Kun små bokstaver: 29^6

    Kun store bokstaver: 29^6

Ulike passord som har *akkurat* 6 tegn, kun små og store bokstaver OG minst én bokstav skal være liten og minst én skal være stor:

$$a = 58^6 - 2 \cdot 29^6$$

$$= 36879045902$$

Da har vi 29 651 332 814 muligheter.

b) Nye regler. Nøyaktig TO store bokstaver, TO små bokstaver og TO siffer. Vi har 29 store, 29 små og 10 siffer tilgjengelig.

   For hver kombinasjon av to siffer, to store og to små kan vi mange ulike plasseringer:

   Vi kan ha AA11bb, AA1b1b, AAbb11,...: $\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{6} = 120$

   To store bokstaver: 29^2 = 841 muligheter

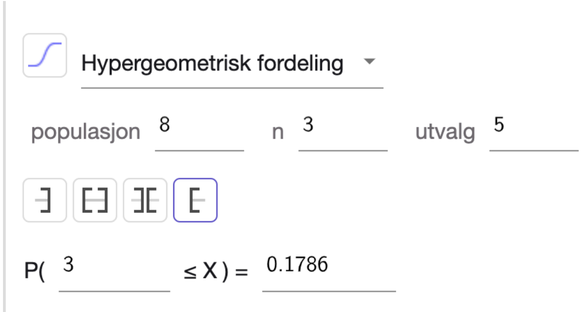
   To små bokstaver: 29^2 = 841 muligheter

   To siffer: 10^2 = 100 muligheter

Totalt sett vil vi da kunne ha: $120 \cdot 841 \cdot 841 \cdot 100 = 8\,487\,372\,000$ muligheter. Altså mer enn 4 ganger færre muligheter enn ved alternativ 1. Tryggheten har altså blitt lavere med de nye reglene som også tillater siffer.

Oppgave 4

Prøvde meg frem med hypergeometrisk fordeling i GeoGebra. Endte da med:



5 hvite kuler og 3 røde kuler. P(3 hvite) = 17,86%

Oppgave 5

a) P(5 ulike tall) = $\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$ = 5/54 ≈ 9,3%

b) Løst v.h.a. Python.

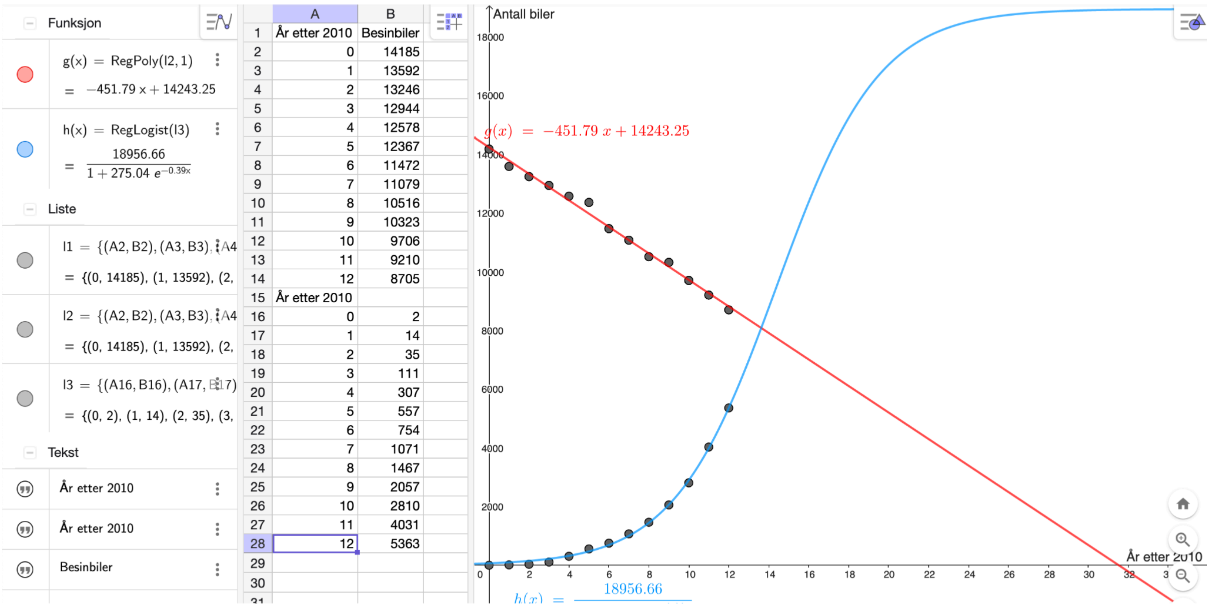
```python
import random

N = 1000000      #Simulerer 1 million kast
oyne = 6         #Antall oyne på terning
kast = 5         #Antall terninger som kastes
tre_seksere = 0 #Teller gunstige utfall, 3 seksere

for i in range(0,N):
    antall_seksere = 0
    for j in range(1,kast+1):
        terning = random.randint(1,oyne)
        if terning == 6:
            antall_seksere += 1
    if antall_seksere == 3:
        tre_seksere +=1

#Deler antall gunstige utfall på antall mulige utfall
sannsynlighet = tre_seksere/N

print(sannsynlighet)
```

```
0.03221
```

```
0.032204
```

Sannsynligheten for å få 3 6-ere når du kaster 5 terninger er ca. 3,2%.

Oppgave 6



a) Valgte å sette tallene inn i GeoGebra og kjøre regresjon. For bensinbiler ser det ut til at en lineær funksjon med negativt stigningstall passer best, spesielt siden antallet avtar for hvert år etter 2010. For elbiler ser ut til å passe best med en logistisk modell, antallet øker eksponentielt, men vil etterhvert flate ut (kan ikke være uendelig mange).

b) Det ser ut til at bensinbiler vil fortsette å falle, også etter 2022. I følge funksjonen vil antallet bensinbiler etter hvert nå 0, noe jeg tenker er ganske urealistisk, i alle fall etter 31 år (2041). Antall besninbiler ser ikke ut til å falle hverken fortere eller saktere fra 2019-2022 enn for 2010-2013, noe som styrker antagelsen om at fallet vil fortsette lineært en stund fremover.

   For elbiler ser det i følge modellen ut til at antall biler vil fortsette å øke en god stund fremover før det vil flate ut på ca. 18 600 biler. Dette tenker jeg er ganske realistisk om ikke bilkulturen med delebiler og nabolagsbiler endrer seg drastisk. I tillegg kan vi ikke si sikkert at befolkningen i Moss vil endre seg slik den har gjort de siste årene. Likevel vil jeg tro at modellen passer godt i flere år fremover.

   Om en ser på totalt antall biler i 2040 sammenlignet med 2010, ser en at det holder seg ganske uendret (om en tar med dieselbiler også).

Oppgave 7

a) Lars har:
   - definert en funksjon som vil regne ut høyden i firkanten, ved å beregne f(x) for gitt x.
   - definert en funksjon som finner arealet av firkanten ved å ta lengde (x) ganget med høyde (f(x)).
   - definert den deriverte av arealfunksjonen til firkanten ved å se på endring i areal ved å endre x med svært små steg.

- Gjør arealberegninger for firkanten så lenge arealet blir større (den deriverte er positiv).
- Skriver ut arealet.

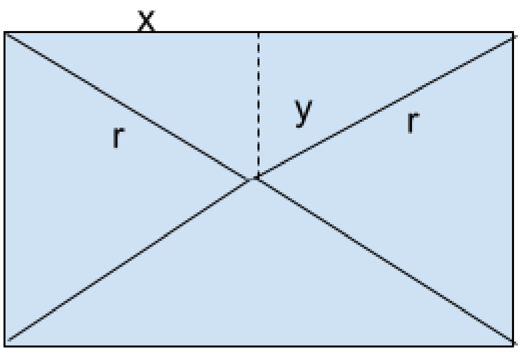
Det største mulige arealet for firkanten vil skrives ut.
Det som vil skrives ut er 3,08.

b) Strategien Lars bruker å finne ut når A(x) når sitt toppunkt. Frem til toppunktet vil A(x) øke, altså er den deriverte positiv. Etter toppunktet vil A(x) bli mindre og den deriverte bli negativ. Programmet til Lars vil da stoppe.

   Dette vil kun fungere så lenge A(x) øker for økende x, og kun har ett toppunkt. Dersom grafen har flere toppunkt kan programmet stoppe før vi har nådd det største arealet. SÅ nei, den vil ikke fungere for alle funksjoner.

Oppgave 8

Det største volumet en pyramide kan ha vil være når toppen er i toppunktet på halvsirkelen, altså at høyden i pyramiden må være *r*. (Dette siden V er proporsjonal med *h*, altså må *h* være størst mulig).



Har laget en figur av pyramidens grunnflate. Vi vet fra figuren at det fra sentrum til et av hjørnene er *r*. Vi kan da danne en likebeint trekant. Ved å bruke Pytagoras får vi:
$x^2 + y^2 = r^2$ (Også kjent som sirkelligningen, men den har nok ikke alle S1-elever kjennskap til).

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Finner det største arealet grunnflaten kan ha i CAS.
Arealet av grunnflaten vil bestå av 8 små rettvinklede trekanter. G = 8 · ½ · x · y = 4xy

Det største arealet for grunnflata får vi når G = $2r^2$.

$$V = \frac{h \cdot G}{3} = \frac{r \cdot 2r^2}{3} = \frac{2}{3}r^3$$