

---

# R1 EKSAMEN HØST 2023 LØSNINGSFORSLAG

---

## REALFAGSPORTALEN

Løsningsforslag til de fleste oppgavene er mer utfyllende enn det som kreves på eksamen, og er ment for å kunne gi litt mer læringsutbytte utover en ren fasit.

### Innhold

<b>DEL 1</b>	<b>3</b>
Oppgave 1 . . . . .	3
Oppgave 2 . . . . .	3
Oppgave 3 . . . . .	4
Oppgave 4 . . . . .	5
<b>DEL 2</b>	<b>7</b>
Oppgave 1 . . . . .	7
Oppgave 2 . . . . .	9
Oppgave 3 . . . . .	12
Oppgave 4 . . . . .	16
Oppgave 5 . . . . .	20
Oppgave 6 . . . . .	24



# DEL 1

## Oppgave 1

Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x.$$

Setter vi  $u = x^2$  og  $v = \ln x$ , kan vi skrive  $f(x) = u \cdot v$

Da kan vi kan bruke produktregelen slik at

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ der } u' = 2x \text{ og } v' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = \underline{\underline{x(2 \ln x + 1)}}$$

## Oppgave 2

Skriv uttrykkene nedenfor i stigende rekkefølge.

$$2 \ln e^3, \quad 3 \lg 70, \quad e^{3 \ln 2}$$

Husk å begrunne svaret.

Vi starter med å forenkle uttrykkene hver for seg:

- $2 \ln e^3 = 3 \cdot 2 \ln e = 6 \cdot 1 = \mathbf{6}$
- $3 \lg 70 = 3 \lg(10 \cdot 7) = 3(\lg 10 + \lg 7) = 3(1 + \lg 7) = \mathbf{3 + 3 \lg 7}$
- $e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = \mathbf{8}$

Vi må nå finne ut om  $3 \lg 70$  er større eller mindre enn  $2 \ln e^3$

$$\lg 7 < \lg 10 \implies 3 + 3 \cdot \lg 7 < 3 + 3 \cdot \lg 10 = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \implies 3 \lg 70 < 2 \ln e^3$$

Uttrykkene i stigende rekkefølge blir da

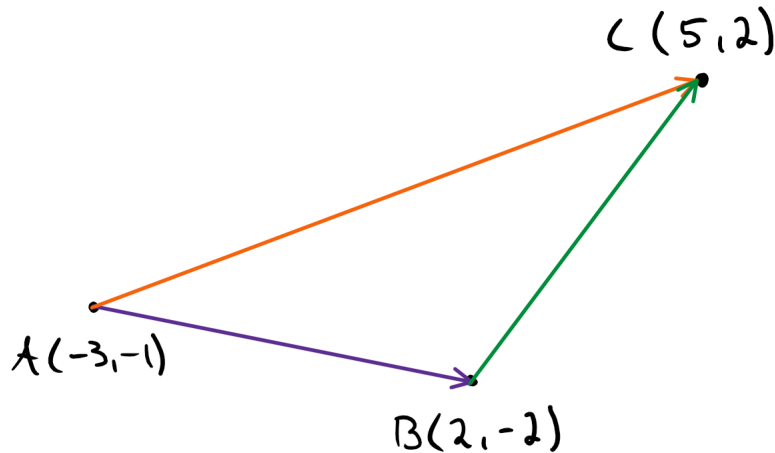
$$\underline{\underline{3 \lg 70, 2 \ln e^3, e^{3 \ln 2}}}$$



### Oppgave 3

I trekanten  $ABC$  er  $A(-3,-1)$ ,  $B(2,-2)$  og  $C(5,2)$ .

a) Avgjør ved hjelp av vektorregning hvilken side i trekanten som er kortest.



Vi starter med å regne ut  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  og  $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-3), -2 - (-1)] = [5, -1]$$

$$\overrightarrow{AC} = [5 - (-3), 2 - (-1)] = [8, 3]$$

$$\overrightarrow{BC} = [5 - 2, 2 - (-2)] = [3, 4]$$

Og deretter regner vi ut lengden av vektorene

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$\overrightarrow{BC}$  er den korteste siden i trekanten.



b) Avgjør ved hjelp av vektorregning om noen av vinklene i trekanten er  $90^\circ$ .

For to vektorer  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$ , har vi at  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

For å finne ut om noen av vinklene i trekanten er rettvinklet, sjekker vi om noen av prikkproduktene er null:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = [5, -1] \cdot [8, 3] = 5 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 = 40 - 3 = 37 \neq 0 \implies \vec{AB} \not\perp \vec{AC}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = [5, -1] \cdot [3, 4] = 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 15 - 4 = 11 \neq 0 \implies \vec{AB} \not\perp \vec{BC}$
- $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = [8, 3] \cdot [3, 4] = 8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24 + 12 = 36 \neq 0 \implies \vec{AC} \not\perp \vec{BC}$

Ingen vinkler i trekanten er  $90^\circ$

#### Oppgave 4

Funksjonen  $f$  er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2.$$

Egil ønsker å lage et program som regner ut koordinatene til bunnpunktet på grafen til  $f$ . Han har skrevet koden nedenfor.

```
1 def f(x):
2     return 2*x**2 - 9*x - 2
3
4 def df(x,h):
5     return (f(x+h) - f(x))/h
6
7 h = 0.001
8 a = 0
9
10 while df(a,h) < 0:
11     a = a + 1
12
13 print("Bunnpunktet er", (a,f(a)) )
```

Bunnpunktet er (3, -11)

a) Forklar hvilken strategi Egil har brukt.



Her har Egil ved hjelp av en while-løkke numerisk iterert seg nærmere og nærmere bunnpunktet til  $f(x)$

```

1  def f(x):
2      return 2*x**2 - 9*x - 2
3
4  def df(x, h):
5      return (f(x + h) - f(x)) / h
6
7  h = 0.001
8  a = 0
9
10 while df(a, h) < 0:
11     a = a + 1
12
13 print("Bunnpunktet er", (a, f(a)))

```

Definerer funksjonsuttrykket til  $f(x)$

Definerer den deriverte av  $f(x)$

Definerer intervallbredden som brukes i den deriverte av  $f(x)$

Setter  $x$ -verdien while-løkken skal starte på

Kjører while-løkken så lenge den deriverte er negativ. For hver runde økes  $x$ -verdien (her  $a$ ) med 1.

Printer ut det estimerte bunnpunktet

Egil har brukt steglengden 1 når han har økt  $x$ -verdiene (i programmet kalt  $a$ ) helt til den deriverte ikke lenger synker. Deretter printes ut den første  $x$ -verdien der den deriverte ikke lenger var negativ, sammen med tilhørende funksjonsverdi.

---

Svaret han får, er ikke riktig.

b) Foreslå en endring i koden som vil gi Egil et riktigere svar.

Det faktiske bunnpunktet finner vi ved å løse  $f'(x) = 0$

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2 \implies f'(x) = 4x - 9$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 9 = 0$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4} \approx 2.25$$

$x$ -verdien til bunnpunktet er 2.25 og ikke 3 som programmet til Egil skriver ut.

For å øke nøyaktigheten til programmet kan Egil endre steglengden på linje 11 i while-løkken fra 1 til f.eks. 0.001. Da vil programmet treffe bunnpunktet helt nøyaktig istedenfor å "hoppe" over bunnpunktet slik som når steglengden er 1. Programmet vil nå skrive ut at bunnpunktet er  $(2.25, -11.125)$ .

---



# DEL 2

## Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser konsentrasjonen, i millimol per liter (mmol/L), av et stoff,  $t$  sekunder etter at en kjemisk reaksjon startet. Når det har gått lang tid, vil konsentrasjonen av stoffet stabilisere seg på 2,5 mmol/L.

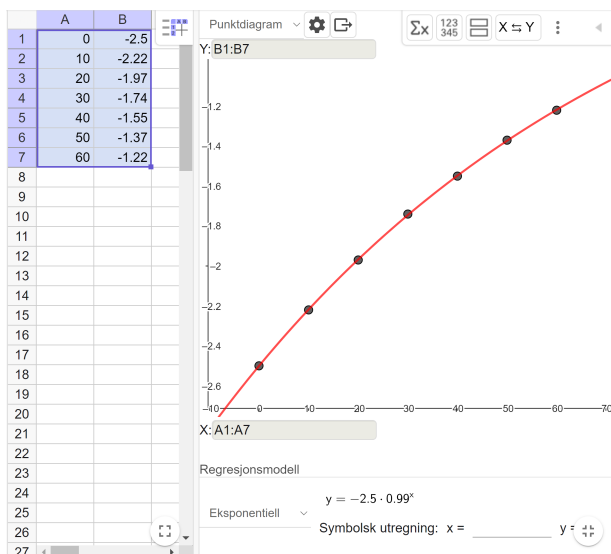
Tid (s)	0	10	20	30	40	50	60
Konsentrasjon (mmol/L)	0	0,28	0,53	0,76	0,95	1,13	1,28
Konsentrasjon $-2,5$ (mmol/L)	-2,5	-2,22	-1,97	-1,74	-1,55	-1,37	-1,22

a) Bruk blant annet regresjon til å vise at funksjonen  $f$  gitt ved

$$f(t) = 2,5 - 2,5 \cdot 0,99^t$$

er en god modell for konsentrasjonen av stoffet  $t$  sekunder etter at reaksjonen startet.

Vi bruker dataene der konsentrasjonen er fratrasket 2.5 mmol/L, slik at vi kan bruke en eksponentialmodell når vi bruker regresjon i GeoGebra. Regresjonen gir oss da  $g(t) = -2.5 \cdot 0.99^t$ . Men for å kompensere for at funksjonsverdiene til



dataene vi brukte var fratrasket 2.5 mmol/L, må vi legge til 2.5 til  $g(t)$  slik at vi nå får

$$f(t) = 2.5 + g(t) = 2.5 - 2.5 \cdot 0.99^t$$

Oppgave oppgir at konsentrasjonen stabiliserer seg på 2.5 mmol/L, og siden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 2.5$$

vil  $f(t)$  være en god modell for konsentrasjonen.

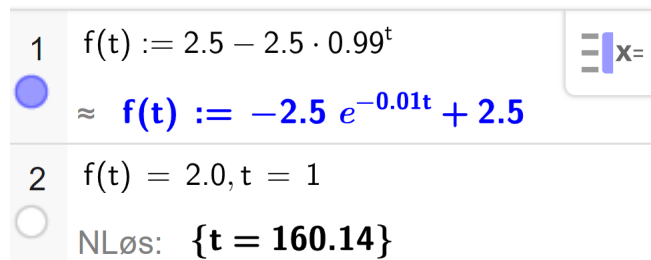


b) Hvor lang tid vil det ta før konsentrasjonen er 2,0 mmol/L?

$f(t)$  representerer konsentrasjonen i mmol/L, så vi løser likningen

$$f(t) = 2.0$$

i CAS:



```
1 f(t) := 2.5 - 2.5 · 0.99t
≈ f(t) := -2.5 e-0.01t + 2.5
2 f(t) = 2.0, t = 1
NLøs: {t = 160.14}
```

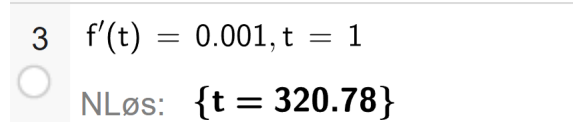
Det tar 160 sekunder før konsentrasjonen av stoffet når 2.0 mmol/L.

c) Hvor lang tid vil det ta før konsentrasjonen øker med mindre enn 0,001 mmol/L per sekund?

0.001 mmol/L per sekund representerer den momentane vekstfarten til  $f(t)$ . For å finne ut hvor lang tid det tar før konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L per sekund, må vi løse

$$f'(t) = 0.001$$

som vi kan løse i CAS:



```
3 f'(t) = 0.001, t = 1
NLøs: {t = 320.78}
```

Det tar 321 sek før konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L per sekund.

## Oppgave 2

Funksjonen  $f$  er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + (2+k)x, & x < k \\ x^2 + (2-k)x, & x \geq k \end{cases}$$

der  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Forklar at  $f$  er en kontinuerlig funksjon for alle verdier av  $k$ .

For å kunne forklare at  $f(x)$  er kontinuerlig for alle verdier av  $k$ , må vi huske at


En funksjon  $f(x)$  er kontinuerlig hvis og bare hvis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ for alle } a \in D_f$$

La oss sette  $f_1(x) = -x^2 + (2+k)x$  og  $f_2(x) = x^2 + (2-k)x$  slik at

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < k \\ f_2(x), & x \geq k \end{cases}$$

$f_1(x)$  og  $f_2(x)$  er begge polynomer, og er derfor kontinuerlige. Det betyr at vi må sjekke om  $f(x)$  er kontinuerlig i overgangen fra  $f_1(x)$  til  $f_2(x)$ , altså i bruddpunktet  $x = k$ .

1	$f_1(x) := -x^2 + (2+k)x$ $\rightarrow f_1(x) := -x^2 + kx + 2x$	
2	$f_2(x) := x^2 + (2-k)x$ $\rightarrow f_2(x) := x^2 - kx + 2x$	
3	$\text{Grenseverdi}(f_1(x), k) \stackrel{?}{=} f_2(k)$ $\rightarrow \text{true}$	

Vi ser at

$$\lim_{x \rightarrow k} f_1(x) = f_2(k)$$

$f(x)$  er dermed kontinuerlig for alle  $k \in \mathbb{R}$



b) Bestem  $k$  slik at  $f$  blir deriverbar i  $x = k$ .

$f_1(x)$  og  $f_2(x)$  er begge deriverbare fordi de er polynomfunksjoner. Vi trenger derfor kun å sørge for at  $f(x)$  er deriverbar i bruddpunktet  $x = k$ .

For at en funksjon skal være deriverbar, må både  $f(x)$  og  $f'(x)$  være kontinuerlige. Vi vet allerede at  $f(x)$  er kontinuerlig for alle mulige verdier av  $k$ , så vi kan fokusere på å bestemme  $k$  slik at  $f'(x)$  er kontinuerlig i  $x = k$ .

Vi løser derfor

$$\lim_{x \rightarrow k} f'_1(x) = f'_2(k)$$

4 Grenseverdi( $f'_1(x), k$ ) =  $f'_2(k)$

$f(x)$  er deriverbar når  $k = 0$ .

NLøs:  **$\{k = 0\}$**

c) For hvilke verdier av  $k$  har  $f$  en omvendt funksjon?

For at en funksjon skal ha en omvendt funksjon, må funksjonen være strengt voksende eller strengt minkende på sitt definisjonsområde.

$f(x)$  er definert for  $x \in \mathbb{R}$ , altså må vi velge  $k$  slik at  $f(x)$  enten er strengt voksende,  $f'(x) \geq 0$ , eller strengt minkende,  $f'(x) \leq 0$ , for alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Vi vet at  $f_1(x)$  og  $f_2(x)$  har følgende former



$f_1(x)$  er definert for  $x \in \langle \leftarrow, k \rangle$  og  $f_1(x)$  stiger frem til sitt toppunkt.  $f_2(x)$  er definert for  $x \in \langle k, \rightarrow \rangle$  og synker frem til sitt bunnpunkt. Vi må derfor bestemme



$k$  slik at vi bytter over fra  $f_1(x)$  til  $f_2(x)$  før  $f_1(x)$  har sitt toppunkt og etter  $f_2(x)$  har sitt bunnpunkt. Vi må altså sørge for at  $k$  ligger mellom bunnpunktet til  $f_2(x)$  og toppunktet til  $f_1(x)$ .

Vi bruker CAS til å finne toppunktet til  $f_1(x)$  og bunnpunktet til  $f_2(x)$

6	$f_1'(x) = 0$
<input type="radio"/>	Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}k + 1\right\}$
7	$f_2'(x) = 0$
<input type="radio"/>	Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}k - 1\right\}$

Her ser vi at bunnpunktet til  $f_2(x)$  kommer før toppunktet til  $f_1(x)$ . Altså må bruddpunktet,  $x = k$ , der vi bytter fra  $f_1(x)$  til  $f_2(x)$  ligge mellom

$$x = \frac{1}{2}k - 1 \text{ og } x = \frac{1}{2}k + 1$$

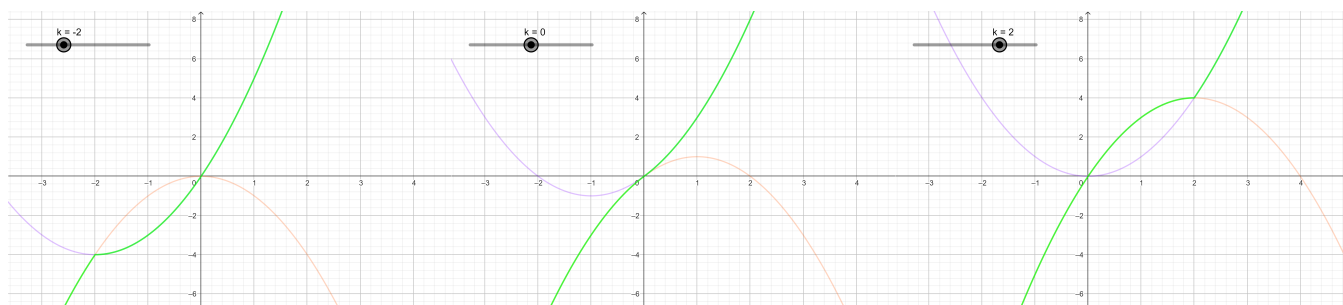
Vi må altså løse

$$\frac{1}{2}k - 1 \leq k \leq \frac{1}{2}k + 1$$

i CAS

8	$\frac{1}{2} \cdot k - 1 \leq k \leq \frac{1}{2} \cdot k + 1$
<input type="radio"/>	Løs: $\{-2 \leq k \leq 2\}$

Her ser vi hvordan det ser ut i praksis for noen ulike verdier av  $k$ . Den oransje grafen er  $f_1(x)$ , den lilla grafen er  $f_2(x)$ , og den grønne grafen er  $f(x)$



Vi ser altså at for  $-2 \leq k \leq 2$  har  $f(x)$  en omvendt funksjon.



### Oppgave 3

La  $f$  være en tredjegradsfunksjon.

Avgjør for hver av påstandene nedenfor om den er sann eller usann. Begrunn svaret.

a) Påstand 1:

Grafen til  $f$  har minst ett ekstremalpunkt.

Dersom  $f(x)$  skal ha minst ett ekstremalpunkt, må  $f'(x)$  ha minst ett nullpunkt. Det betyr at

$f'(x) = 0$  må ha minst én løsning.

Siden  $f(x)$  er en tredjegradsfunksjon, vil  $f'(x)$  være en andregradsfunksjon. La  $f'(x)$  være en vilkårlig andregradsfunksjon

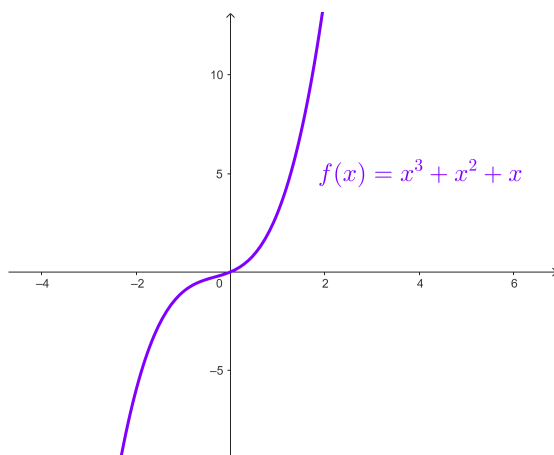
$$f'(x) = ax^2 + bx + c$$

La oss videre betrakte potensielle nullpunkter til  $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0$$

Likningen har ingen løsning dersom  $b^2 - 4ac < 0$

$f'(x) = 0$  har altså ikke nødvendigvis en løsning, hvilket betyr at  $f(x)$  ikke nødvendigvis har et ekstremalpunkt.



$f(x) = x^3 + x^2 + x$  er et eksempel på en tredjegradsfunksjon uten ekstremalpunkter.

Påstanden er altså usann.



b) Påstand 2:

Alle linjer på formen  $y = ax + b$ , der  $a, b \in \mathbb{R}$ , vil skjære grafen til  $f$ .

$f(x)$  er fortsatt en tredjegradsfunksjon. La derfor  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  og den rette linjen være  $g(x) = px + q$

Dersom den rette linjen  $g(x)$  skal skjære  $f(x)$ , må  $f(x) = g(x)$  alltid ha en løsning.

Vi vet at en tredjegradsfunksjon  $f(x)$  har minst ett nullpunkt, hvilket vi kan vise ved at

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

I begge tilfeller bytter  $f(x)$  fortegn mellom  $-\infty$  og  $\infty$ , som betyr at grafen til  $f(x)$  må ha krysset  $x$ -aksen på et eller annet tidspunkt, altså må  $f(x)$  ha minst ett nullpunkt.

La oss igjen se på  $f(x) = g(x)$ , som må være oppfylt for at  $g(x)$  skal skjære  $f(x)$

$$f(x) = g(x)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - px - q = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + (c - p)x + (d - q) = 0$$

Hvis vi nå lar  $h(x) = ax^3 + bx^2 + (c - p)x + (d - q)$ , har vi at

$$f(x) = g(x) \iff h(x) = 0$$

Siden  $h(x)$  også er en tredjegradsfunksjon, betyr det at  $h(x)$  har minst ett nullpunkt, som igjen betyr at  $f(x) = g(x)$  må ha minst én løsning. Altså betyr det at en rett linje vil skjære en tredjegradsfunksjon i minst ett punkt.

Påstanden er sann.




c) Påstand 3:

Dersom grafen til  $f$  har et vendepunkt for  $x = 3$ , er  $f'(1) = f'(5)$ .

$f(x)$  er fortsatt en tredjegradsfunksjon.

Den enkle måten å undersøke om påstanden er sann, er å se om det finnes en tredjegradsfunksjon som oppfyller

$$f''(3) = 0 \quad \text{og} \quad f'(1) = f'(5)$$


1	$f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$ $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$	
2	$f''(3) = 0$ $\rightarrow 18 a + 2 b = 0$	
3	$f'(1) = f'(5)$ $\rightarrow 3 a + 2 b + c = 75 a + 10 b + c$	
4	$\{ \$2, \$3 \}$ Løs: $\left\{ \left\{ a = \frac{-1}{9} b, b = b \right\} \right\}$	

Her ser vi at  $a = -\frac{1}{9}b$ , og at  $b$  er det vi kaller en *fri variabel*.  $c$  og  $d$  har vi ikke nok informasjon til å kunne bestemme, så de kan vi la stå uendret.

Da får vi at

$$f(x) = -\frac{1}{9}bx^3 + bx^2 + cx + d$$

La oss sjekke om  $f(x)$  oppfyller kravene i påstanden:

1	$f(x) := -\frac{1}{9} \cdot b \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\rightarrow f(x) := -\frac{1}{9} b x^3 + b x^2 + c x + d$	
2	$f''(3)$ $\rightarrow 0$	
3	$f'(1) \stackrel{?}{=} f'(5)$ $\rightarrow \text{true}$	

Her ser vi at  $f(x)$  oppfyller kravene i påstanden, og påstanden er derfor sann.

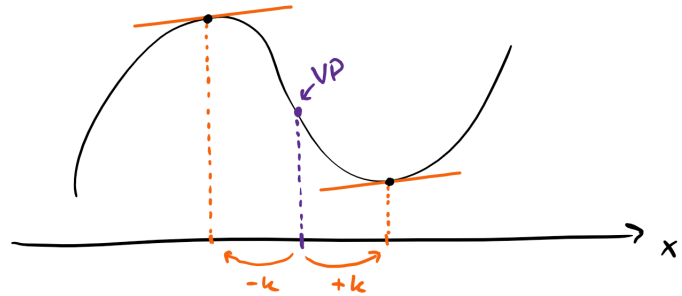
Det vi viste her, var kun for det helt spesifikke tilfellet der  $f''(3) = 0$  og  $f'(1) = f'(5)$ . Altså at akkurat denne tredjegradsfunksjonen hadde en stigning som var symmetrisk om vendepunktet i  $x = 3$ .



Dette kan vi faktisk også vise at alltid gjelder helt generelt for alle tredjegradsfunksjoner. Sett at  $x$ -verdien til vendepunktet er  $x = x_0$ , kan vi altså da vise at

$$f'(x_0 - k) = f'(x_0 + k)$$

1	$f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$ $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$f''(x) = 0$ Løs: $\left\{ x = -\frac{b}{3a} \right\}$
3	$f'\left(-\frac{b}{3a} - k\right) \stackrel{?}{=} f'\left(-\frac{b}{3a} + k\right)$ $\rightarrow \text{true}$

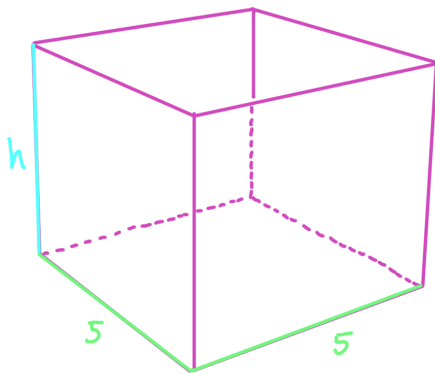


Helt generelt er vendepunktet til en tredjegradsfunksjon alltid  $x = -\frac{b}{3a}$ ,  
og stigningstallene er alltid symmetrisk om vendepunktet.

#### Oppgave 4

Du skal lage en kasse uten lokk. Den skal ha form som et rett prisme. Grunnflaten i kassen skal være kvadratisk. For at vekten ikke skal bli for stor, kan ikke det samlede arealet av platene som brukes til å lage kassen, være mer enn  $120 \text{ dm}^2$ .

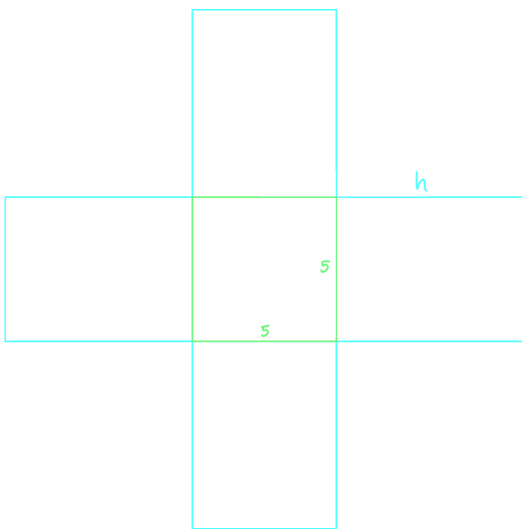
- a) Hva er det største volumet kassen kan få dersom sidene i bunnen skal være  $5 \text{ dm}$ ?



Vi skal her finne det maksimale volumet, men hvor vi har fått en overflatebegrensning på  $120 \text{ dm}^2$ .

Det betyr at vi må finne den største høyden  $h$  kassen kan ha, uten å overskride arealbegresningen.

La oss først finne et uttrykk for overflaten av kassen, eller det rette prismet som det egentlig er. Da kan vi brette ut prismet og så regne ut arealet av hver av flatene.



Vi ser da at den totale overflaten blir

$$A = 5^2 + 4 \cdot 5h = 25 + 20h$$

Nå som vi har funnet høyden  $h$  til kassen, kan vi sette dette inn i formelen for



volumet av et rett prisme

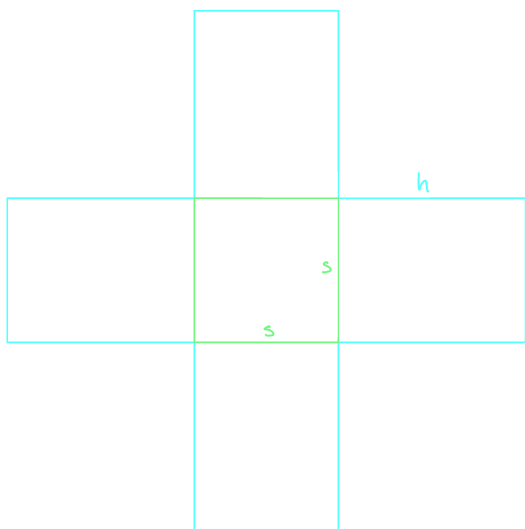
$$V = Gh, \text{ der } G \text{ er arealet av grunnflaten, altså } G = 5^2 = 25$$

$$V = 25 \cdot 4.75 = 118.75$$

Det største volumet kassen kan ha er 118.75 dm<sup>3</sup>.

b) Hva er det maksimale volumet kassen kan få?

Vi har fortsatt den samme overflatebegrensningen på 120 dm<sup>2</sup>, men nå er ikke sidene i grunnflaten låst til å være 5 dm.



La oss sette sidene i grunnflaten til å være  $s$ , slik at overflaten av prismet nå blir

$$A = s^2 + 4 \cdot sh = s^2 + 4sh$$

Videre kan vi finne  $h$  uttrykt med  $s$  ved å løse  $A = 120$

1	$A := s^2 + 4 s h$ $\rightarrow \mathbf{A} := s^2 + 4 h s$	
2	$L\ddot{o}s(A = 120, h)$ $\rightarrow \left\{ h = \frac{-s^2 + 120}{4 s} \right\}$	

Volumet av prismet blir dermed

$$V = Gh = s^2 h = s^2 \cdot \frac{-s^2 + 120}{4s} = s \cdot \frac{-s^2 + 120}{4} = \frac{-s^3 + 120s}{4} = -0.25s^3 + 30s$$

Deretter finner vi det maksimale volumet ved å finne toppunktet til

$$V(s) = -0.25s^3 + 30s$$



Det kan vi gjøre enten ved å bruke ekstremalpunkt-kommandoen, eller ved å løse likningen  $V'(s) = 0$ , i CAS

4	Ekstremalpunkt(V)	5	$V'(s) = 0$
<input type="radio"/>	$\approx \{(-6.32, -126.49), (6.32, 126.49)\}$	<input type="radio"/>	NLøs: $\{s = -6.32, s = 6.32\}$

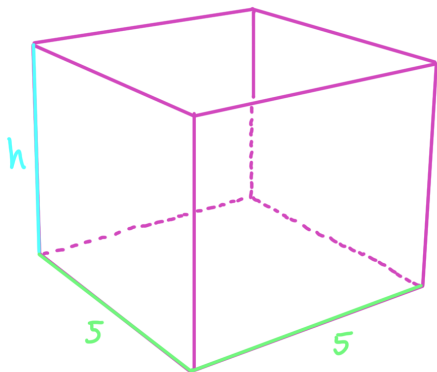
I begge tilfeller ser vi at vi må ekskludere løsningen med  $s = -6.32$ , fordi  $s$  er sidelengden til grunnflaten i det rette prismet, og kan derfor ikke være negativ. Det betyr at vi sitter igjen med at  $s = 5.774$  er den sidelengden som gir størst volum.

Likevel bør vi bruke andrederiverttesten for å forsikre oss om at  $s = 6.32$  faktisk er et toppunkt til volumfunksjonen

6	$V''(6.32)$	$V''(6.32) < 0 \implies s = 6.32$ er et toppunkt.
<input type="radio"/>	$\approx -9.48$	
7	$V(6.32)$	<u>Det største volumet prismet kan ha, er <math>126.49 \text{ dm}^3</math>.</u>
<input type="radio"/>	$\approx 126.49$	

Du skal lage en slik kasse som rommer  $80 \text{ dm}^3$ .

- c) Hva er det minste samlede arealet platene kan ha, dersom du skal lage en slik kasse?




Nå har vi motsatt situasjon av det vi hadde i oppgave b. Nå er volumet avgrenset til  $80 \text{ dm}^3$ , og så skal vi minimere overflaten.

Overflaten er fortsatt gitt ved  $A = s^2 + 4sh$ , og volumet er gitt ved  $V = s^2h$

Vi kan så finne  $h$  uttrykt med  $s$  ved å løse  $V = 80$  med hensyn på  $h$ , og deretter



sette inn dette for  $h$  i uttrykket for overflaten,  $A = s^2 + 4sh$

1	$A := s^2 + 4 s h$ $\rightarrow \mathbf{A} := s^2 + 4 h s$	
2	$V := s^2 \cdot h$ $\approx \mathbf{V} := h s^2$	
3	Løs( $V = 80, h$ ) $\approx \left\{ h = \frac{80}{s^2} \right\}$	
4	$A_1(s) := \text{ByttUt}(A, \$3)$ $\approx \mathbf{A_1(s)} := \frac{s^3 + 320}{s}$	

Nå som vi har funnet et uttrykk for overflaten,  $A_1(s)$ , der  $V = 80$  er tatt hensyn til, kan vi finne bunnpunktet til overflatefunksjonen.

5	Ekstremalpunkt( $A_1(s)$ ) $\approx \mathbf{\{(5.429, 88.417)\}}$
6	$A_1''(5.429)$ $\approx \mathbf{6}$

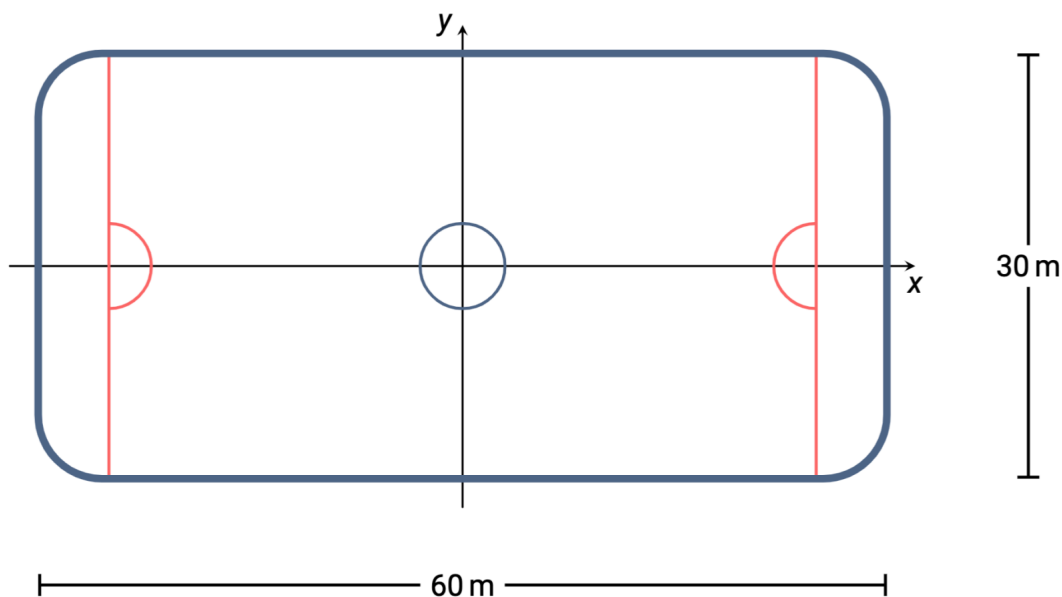
Vi bruker andrederiverttesten for å forsikre oss om at det er bunnpunktet vi har funnet.

Når volumet av kassen er  $80 \text{ dm}^3$ , er den minste overflaten kassen kan ha  $88.417 \text{ dm}^2$ .



## Oppgave 5

En ishockeybane er 60 m lang og 30 m bred. Vi plasserer et koordinatsystem slik at origo er midt på banen. Se figuren nedenfor.






En hockeyspiller sendte av gårde en puck. Vektorfunksjonen  $\vec{r}$  gitt ved

$$\vec{r}(t) = [8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t)]$$

gir puckens posisjon  $t$  sekunder etter at den ble sendt av gårde. Denne vektorfunksjonen gir puckens posisjon helt til den treffer vantet (veggen på banen).

a) Hvilken fart hadde pucken idet den ble sendt av gårde?

For å finne vektorfunksjonen for hastigheten til pucken,  $\vec{v}(t)$ , må vi derivere posisjonsvektoren til pucken  $\vec{r}(t)$ .

1	$\mathbf{r}(t) := (8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t))$	 $\mathbf{x} =$
	$\rightarrow \mathbf{r}(t) := (-8t + 8e^{-t}, -5t + 5e^{-t})$	
2	$\mathbf{v}(t) := \mathbf{r}'(t)$	
	$\rightarrow \mathbf{v}(t) := (-8e^{-t} - 8, -5e^{-t} - 5)$	



Hastigheten til pucken, er gitt ved lengden av fartsvektoren, og for å finne hastigheten til pucken i det den ble sendt avgårde må vi derfor finne farten i  $t = 0$

$$\begin{aligned} 3 \quad V_{\text{start}} &:= |v(0)| \\ \approx \quad V_{\text{start}} &:= \mathbf{18.87} \end{aligned}$$

Pucken ble sendt avgårde i 18.87 m/s

b) Hvor lang tid gikk det før pucken traff vantet?

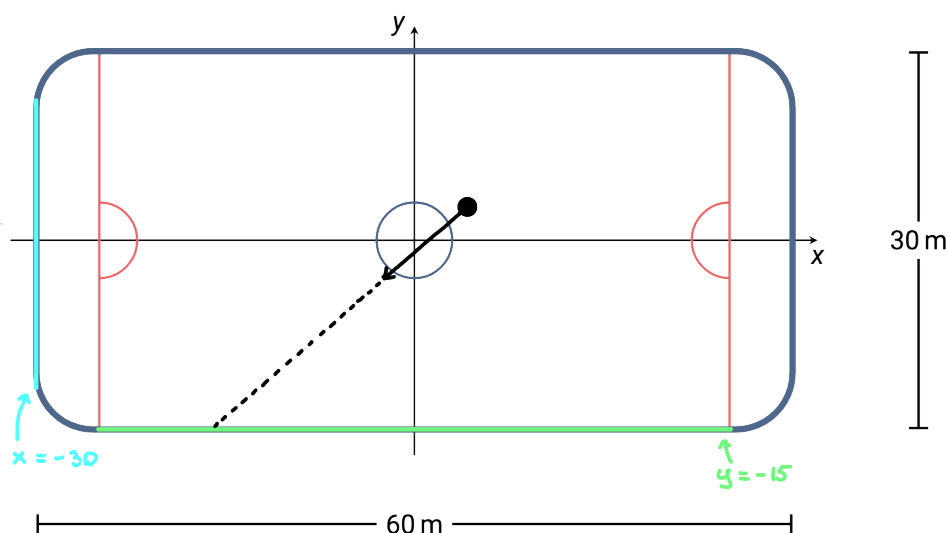
Vi starter med å skrive  $\vec{r}(t) = [r_x(t), r_y(t)]$ , der

$$r_x(t) = 8(e^{-t} - t)$$

$$r_y(t) = 5(e^{-t} - t)$$

Videre må vi gjøre oss opp en formening om hvilket av vantene pucken kommer til å treffe, og deretter regne ut hvor langt tid det tar før pucken treffer dette vantet. Vi starter derfor med å sjekke i hvilken retning pucken sendes avgårde i.

$$\begin{aligned} 4 \quad v(0) \\ \approx \quad (-16, -10) \end{aligned}$$



Her ser det ut som at pucken treffer det nederste vantet, men for å være sikker på at dette er tilfelle, og at det ikke er det bakre vantet som treffes, må vi løse likningene  $r_x(t) = -30$  og  $r_y(t) = -15$



5	$r_x(t) := 8(e^{-t} - t)$
<input type="radio"/>	$\approx \mathbf{r_x(t) := 8 e^{-t} - 8 t}$
6	$r_y(t) := 5(e^{-t} - t)$
<input type="radio"/>	$\approx \mathbf{r_y(t) := 5 e^{-t} - 5 t}$
7	$r_x(t) = -30, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{\mathbf{t = 3.77}\}$
8	$r_y(t) = -15, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{\mathbf{t = 3.05}\}$

Her ser vi at  $t$  er minst for  $r_y(t) = -15$ , så pucken treffer det nedre vantet først.

Pucken treffer vantet etter 3.05 sekunder.

En annen hockeyspiller var i posisjonen  $P(-18, 11)$  da pucken ble sendt av gårde. Spilleren hadde konstant fart  $\vec{v} = [3, -7]$ .


c) Begrunn at denne spilleren ikke ble truffet av pucken.

Vi kjenner startposisjonen til hockeyspilleren og fartsvektoren, og kan basert på dette finne posisjonsvektoren

$$\vec{r}_2(t) = \begin{cases} x = -18 + 3t \\ y = 11 - 7t \end{cases} \iff \vec{r}_2(t) = [-18 + 3t, 11 - 7t]$$

Dersom hockeyspilleren skal bli truffet av pucken, må spilleren og pucken være samme sted til samme tid. Dette kan vi sjekke ved å løse likningen  $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t)$  i CAS. Vi bruker  $t$  og  $s$  som tidsparametere for å kunne sjekke om  $\vec{r}$  og  $\vec{r}_2$  er i krysningpunktet samtidig eller ikke.



1	$r(t) := (8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t))$	 $x=$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow r(t) := (-8t + 8e^{-t}, -5t + 5e^{-t})$	
2	$r_2(t) := (-18 + 3t, 11 - 7t)$	
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow r_2(t) := (3t - 18, -7t + 11)$	
3	$r(t) = r_2(s)$	
<input type="radio"/>	Løs: $\left\{ \left\{ s = \frac{-8}{3} \text{LambertW}\left(\frac{1}{\sqrt[71]{e^{93}}}\right) + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[71]{e^{108.42}}} + \frac{178}{71}, t = \text{LambertW}\left(\frac{1}{\sqrt[71]{e^{93}}}\right) + \frac{93}{71} \right\} \right\}$	
4	\$3	
<input type="radio"/>	$\approx \{\{s = 2.51, t = 1.53\}\}$	

Svaret i celle 3 er uviktig. For å kunne løse likningen, måtte den først løses eksakt, før vi kunne runde av svaret i celle 4.

$t \neq s \iff$  ingen kollisjon mellom puck og hockeyspiller.



## Oppgave 6

I 1823 viste matematikeren Augustin Louis Cauchy følgende setning:

Anta at en funksjon  $f$  er kontinuert i det lukkede intervallet  $[a, b]$  og deriverbar i det åpne intervallet  $\langle a, b \rangle$ . Da finnes en  $c \in \langle a, b \rangle$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ .

a) Bestem  $c$  når  $a = 1$  og  $b = 3$ .

Det Cauchy viste var at dersom en funksjon er kontinuert og deriverbar, vil det alltid finnes en  $x$ -verdi på et intervall  $[a, b]$  slik at den momentane stigningen er lik den gjennomsnittlige stigningen på intervallet.

momentan stigning

$$\underbrace{f'(c)}$$

=

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

gjennomsnittlig stigning

, der  $c$  ligger mellom  $a$  og  $b$

Vi får vite fra oppgaven at  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ , der intervallet er  $[1, 3]$ . Vi skal da bestemme  $c$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

1	$f(x) := x^2 + 3x + 1$	<input "="" type="text" value="x="/>
<input type="radio"/>	$\approx f(x) := x^2 + 3x + 1$	
2	$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$	
<input type="radio"/>	Løs: $\{c = 2\}$	



b) Lag et program som bestemmer  $c$ , når du gir verdier til  $a$  og  $b$ .

```
1  # Definerer f(x)
2  def f(x):
3      return x**2 + 3*x + 1
4
5  # Definerer den gjennomsnittlige stigningen på intervallet [a, b]
6  def avg_stigning(a, b):
7      return (f(b) - f(a)) / (b - a)
8
9  # Definerer den deriverte av f(x)
10 def df(x):
11     dx = 0.0001
12     return (f(x + dx) - f(x)) / dx
13
14 # Definerer en metode som regner ut c-verdien til den momentane stigningen
15 def finn_momentan_stigning(a, b):
16     c = a      # setter startverdien til c til å være i starten av intervallet
17     gjennomsnittlig_stigning = avg_stigning(a, b)
18
19     # Sjekker om momentan stigning er brattere enn gjennomsnittlig, eller ikke
20     if df(c) > gjennomsnittlig_stigning:
21         while df(c) > gjennomsnittlig_stigning:
22             c += 0.001
23     else:
24         while df(c) < gjennomsnittlig_stigning:
25             c += 0.001
26
27     return round(c, 3)
28
29 # Definerer start og slutt på intervallet
30 a = 1      # startverdi på intervallet
31 b = 3      # sluttverdi på intervallet
32
33 # skriver ut resultatet
34 print(f'[{a}, {b}] -> c = {finn_momentan_stigning(a, b)}')
```



- c) Bruk programmet til å undersøke om det finnes en sammenheng mellom verdien av  $c$  og verdiene av  $a$  og  $b$ .

```
1 # Definerer f(x)
2 def f(x):
3     return x**2 + 3*x + 1
4
5 # Definerer den gjennomsnittlige stigningen på intervallet [a, b]
6 def avg_stigning(a, b):
7     return (f(b) - f(a)) / (b - a)
8
9 # Definerer den deriverte av f(x)
10 def df(x):
11     dx = 0.0001
12     return (f(x + dx) - f(x)) / dx
13
14 # Definerer en metode som regner ut c-verdien til den momentane stigningen
15 def finn_momentan_stigning(a, b):
16     c = a # setter startverdien til c til å være i starten av intervallet
17     gjennomsnittlig_stigning = avg_stigning(a, b)
18
19     # Sjekker om momentan stigning er brattere enn gjennomsnittlig, eller ikke
20     if df(c) > gjennomsnittlig_stigning:
21         while df(c) > gjennomsnittlig_stigning:
22             c += 0.001
23     else:
24         while df(c) < gjennomsnittlig_stigning:
25             c += 0.001
26
27     return round(c, 3)
28
29
30 # Sjekker om det finnes en sammenheng mellom midtpunktet på intervallet
31 # og verdien av c
32 for a in range(0, 6):
33     b = a + 4 # setter b slik at intervallet er 4 bredt
34     midtpunkt = a + (b - a) / 2 # finner midtpunktet til intervallet
35     c = finn_momentan_stigning(a, b) # finner c-verdien
36
37     # skriver ut resultatet
38     print(f'[{a}, {b}] -> midtpunkt = {midtpunkt} \t c = {c}')
```

```
[1, 3] -> c = 2.0
[0, 4] -> midtpunkt = 2.0    c = 2.0
[1, 5] -> midtpunkt = 3.0    c = 3.0
[2, 6] -> midtpunkt = 4.0    c = 4.0
[3, 7] -> midtpunkt = 5.0    c = 5.0
[4, 8] -> midtpunkt = 6.0    c = 6.0
[5, 9] -> midtpunkt = 7.0    c = 7.0
```

Her ser vi at verdien der den momentane stigning er lik den gjennomsnittlige stigningen, er det samme som midtpunktet på intervallet  $[a, b]$



Anne påstår at dersom  $a = 2$  og  $b = 8$ , så vil  $c = 5$  for alle andregradsfunksjoner.

d) Avgjør om Annes påstand er riktig.

Vi viser Annes påstand

$$a = 2 \text{ og } b = 8 \iff f'(5) = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} \text{ for en generell andregradsfunksjon}$$

1	$f(x) := a x^2 + b x + c$ $\rightarrow f(x) := a x^2 + b x + c$	$\equiv x=$
2	$f'(x) = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2}$ Løs: $\{x = 5\}$	

Her definerte vi  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , så vi løste derfor

$$f'(x) = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2}$$

for å unngå forvirring ettersom  $c$  er konstantleddet i  $f(x)$

Vi ser at påstanden til Anne stemmer.

La oss også undersøke den mer generelle sammenhengen vi så i oppgave c

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ har løsningen } c = \frac{a + b}{2} \text{ altså midtpunktet på } [a, b]$$

og at denne gjelder for alle andregradsfunksjoner.

Siden vi har definert  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , bruker vi  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  og  $x = c$ , slik at sammenhengen da skal bli

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



1	$f(x) := a x^2 + b x + c$ $\rightarrow \mathbf{f(x) := a x^2 + b x + c}$	<div>☰ <b>x=</b></div>
2	$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ Lös: $\left\{ x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right\}$	

Her ser vi at for en vilkårlig andregradsfunksjon  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , vil den momentane stigningen i midtpunktet på intervallet  $[x_1, x_2]$  være lik den gjennomsnittlige stigningen over dette intervallet.

