

# Eksamen

14.05.2025

REA3058 Matematikk R2



Se eksamenstips på baksiden!

## Eksamensinformasjon

<b>Eksamenstid</b>	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samtidig. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 3 timar. Etter 3 timar kan kandidaten bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
<b>Del utan hjelpemiddel</b>	Du kan bruke vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
<b>Del med hjelpemiddel</b>	Du kan bruke alle hjelpemiddel som ikkje krev tilgang til internett. I tillegg har skuleeigar gjort tilgjengeleg nokre utvalde nettbaserte hjelpemiddel. Du har ikkje lov til å bruke kunstig intelligens til å generere innhald i svaret ditt.
<b>Framgangsmåte</b>	Delen utan hjelpemiddel har 7 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 4 oppgåver.  Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som rekneark, programmering, grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
<b>Rettleiing om vurderinga</b>	Poeng er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>• viser rekneferdigheiter og matematisk forståing</li><li>• gjennomfører logiske resonnement</li><li>• ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>• kan bruke formålstenlege hjelpemiddel</li><li>• forklarar framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>• skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li><li>• vurderer om svar er rimelege</li></ul>
<b>Andre opplysningar</b>	Kjelder for bilete, teikningar osv.  Andre bilete, teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet.

## DEL 1

### Utan hjelpemiddel

#### Oppgave 1 (4 poeng)

Rekn ut integrala

a)  $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx$

b)  $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx$

#### Oppgave 2 (2 poeng)

Bestem eit uttrykk for funksjonen  $f$  når du får vite at

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- Arealet av området som er avgrensa av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen og linjene  $x=1$  og  $x=2$ , er  $\frac{11}{14}$ . Dette arealet ligg over  $x$ -aksen.

### Oppgave 3 (6 poeng)

Ein elev arbeider med ei talfølgje og har skrive denne koden:

```
1  a = 2
2  n = 5
3  for i in range(1, n + 1):
4      print(a)
5      a = a + (i + 2)
```

- a) Beskriv mønsteret i talfølgja eleven arbeider med.  
Kva blir resultatet når koden blir køyrd?

Eleven har også skrive denne koden:

```
1  a = 2
2  n = 5
3  S = 0
4  for i in range(1, n + 1):
5      S = S + a
6      a = a + (i + 2)
7  print(S)
```

- b) Kva ønskjer eleven no å finne ut?  
Kva blir resultatet når koden blir køyrd?

Tala frå oppgave a) er starten på ei rekkje.

- c) Bruk induksjon til å vise at eit ledd i rekkja kan uttrykkjast som

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, n \geq 1$$

## Oppgåve 4 (6 poeng)

Ein funksjon  $f$  er gitt ved

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad D_f = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- a) Bestem amplituden, likevektslinja, perioden og faseforskyvinga.
- b) L ys likninga  $f(x) = \sqrt{3}$

Ein funksjon  $g$  er gitt ved

$$g(x) = 3 \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) \quad D_g = \langle 0, 2\pi \rangle$$

- c) L ys likninga  $g(x) = \sqrt{3}$

## Oppgåve 5 (6 poeng)

Eit bord har ei bordplate med ei form som ein trekant  $ABC$ . Dersom vi tenkjer oss bordet plassert i eit tredimensjonalt koordinatsystem der einingane langs aksane er desimeter, vil hj rna ha koordinatane  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 3, 0)$  og  $C(1, 4, 1)$ .

- a) Er nokon av vinklane i trekanten større enn  $90^\circ$ ?  
Hugs   grunngi svaret.

- b) Bestem arealet av bordplata.

Ei plante på veggen har ei grein som veks slik at ho følgjer ei rett linje gjennom punkta  $D(3, 7, 3)$  og  $E(2, 3, 2)$ .

- c) Vis at greina aldri vil treffe bordplata.

## Oppgave 6 (2 poeng)

Casper har skrive denne koden:

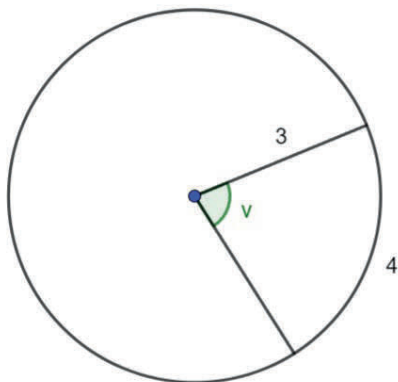
```
1  def f(x):
2  |     return x**3
3
4  def g(x):
5  |     return -2*x**2
6
7  dx = 0.0001
8
9  s = 0
10 x = 0
11 while x <= 2:
12 |     s = s + f(x)*dx + g(x)*dx
13 |     x = x + dx
14
15 print(s)
```

Bestem verdien som blir skrevet ut når koden blir kjørt.

## Oppgåve 7 (4 poeng)

I ein sirkel er radius lik 3.

Figuren nedanfor viser ein vinkel  $v$  der toppunktet er plassert i sentrum av sirkelen og bogelengda er 4.



a) Kor stor er vinkelen  $v$  gitt i

- radianar?
- gradar?

Om ein annan vinkel  $u$  f r du vite at  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  og  $\tan u = 2$ .

b) Bestem dei eksakte verdiane til  $\sin u$  og  $\cos u$ .

## DEL 2

### Med hjelpemiddel

#### Oppgåve 1 (6 poeng)

Ein bil køyrer opp ein spiralforma veg inne i eit parkeringshus.

Posisjonen til bilen etter  $t$  sekund er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[ 4 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2, 5 + \frac{1}{3}t \right] \quad t \in [0, 20]$$

der bakkenivået er  $xy$ -planet i eit koordinatsystem med meter som eining langs aksane.

- Kor høgt over bakkenivået er bilen etter 5 sekund?
- Bestem fartsvektoren  $\vec{v}(t)$  og farten til bilen etter 10 sekund.
- Gjer nødvendige antakingar og bestem ein mogleg avstand mellom etasjane i parkeringshuset.

## Oppgave 2 (4 poeng)

Nora blir 37 år i 2026 og vil begynne å spare til eigen pensjon.

Ho vil setje eit fast beløp inn på ein konto i banken 1. januar kvart år. Ho vil begynne sparinga 1. januar 2026 og halde på til og med januar 2055.

Målet hennar er å ha 3 750 000 kroner i banken etter at rentene for 2055 er lagde til. Nora ventar at den årlege rentesatsen på kontoen vil vere 2,5 %.

a) Kor stort beløp må Nora setje i banken kvart år for å nå målet?

Nora har eit huslån. Lånet har årlege terminar, og Nora betaler terminbeløpet i januar kvart år. I januar 2026 vil lånet vere på 3 000 000 kroner.

Nora vil betale ned lånet før det året ho fyller 70. Ho har rekna seg fram til at ho då må betale 150 000 kroner kvar termin frå og med januar 2026 til og med januar 2058.

b) Kor høg har Nora rekna med at den årlege rentesatsen på lånet vil vere?

## Oppgave 3 (6 poeng)

Ein hare spring vekk frå ein rev som angrip han. Farten  $v$  til haren er gitt ved

$$v(t) = 8,3 - 17,4 \cdot e^{-5t} + 9,1 \cdot e^{-0,08t}$$

Her er  $v$  meter per sekund, og  $t$  er antalet sekund etter at haren tek til å springe.

a) Kor lang tid vil det gå før akselerasjonen til haren er null?  
Kva fortel dette svaret?

b) Kor langt spring haren i løpet av dei første 7 sekunda?

Gjennomsnittsfarten  $v_g$  til haren dei første  $x$  sekunda er gitt ved

$$v_g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt$$

c) Bestem gjennomsnittsfarten til haren dei første 200 metrane.

## Oppgave 4 (2 poeng)

Ei uendeleg geometrisk rekkje er gitt ved  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Det kan visast at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Bruk denne samanhengen til å vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$

I denne oppgåva kan du sjå bort frå integrasjonskonstantane.

# Bokmål

## Eksamensinformasjon

<b>Eksamenstid</b>	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 3 timer. Etter 3 timer kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
<b>Del uten hjelpemidler</b>	Du kan bruke vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
<b>Del med hjelpemidler</b>	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
<b>Framgangsmåte</b>	Delen uten hjelpemidler har 7 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 4 oppgaver.  Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som regneark, programmering, graftegner og CAS skal dokumenteres.
<b>Veiledning om vurderingen</b>	Poeng er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>• viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>• gjennomfører logiske resonnementer</li><li>• ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>• kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler</li><li>• forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>• skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li><li>• vurderer om svar er rimelige</li></ul>
<b>Andre opplysninger</b>	Kilder for bilder, tegninger osv. Bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet.

## DEL 1

### Uten hjelpemidler

#### Oppgave 1 (4 poeng)

Regn ut integralene

a)  $\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx$

b)  $\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx$

#### Oppgave 2 (2 poeng)

Bestem et uttrykk for funksjonen  $f$  når du får vite at

- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
- Arealet av området som er avgrenset av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen og linjene  $x = 1$  og  $x = 2$ , er  $\frac{11}{14}$ . Dette arealet ligger over  $x$ -aksen.

### Oppgave 3 (6 poeng)

En elev arbeider med en tallfølge og har skrevet denne koden:

```
1  a = 2
2  n = 5
3  for i in range(1, n + 1):
4      print(a)
5      a = a + (i + 2)
```

- a) Beskriv mønsteret i tallfølgen eleven arbeider med.  
Hva blir resultatet når koden kjøres?

Eleven har også skrevet denne koden:

```
1  a = 2
2  n = 5
3  S = 0
4  for i in range(1, n + 1):
5      S = S + a
6      a = a + (i + 2)
7  print(S)
```

- b) Hva ønsker eleven nå å finne ut?  
Hva blir resultatet når koden kjøres?

Tallene fra oppgave a) er starten på en rekke.

- c) Bruk induksjon til å vise at et ledd i rekken kan uttrykkes som

$$a_n = \frac{n(n+3)}{2}, n \geq 1$$

## Oppgave 4 (6 poeng)

En funksjon  $f$  er gitt ved

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad D_f = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- a) Bestem amplituden, likevektslinja, perioden og faseforskyvningen.
- b) Løs likningen  $f(x) = \sqrt{3}$

En funksjon  $g$  er gitt ved

$$g(x) = 3 \sin(2x) + \sqrt{3} \cos(2x) \quad D_g = \langle 0, 2\pi \rangle$$

- c) Løs likningen  $g(x) = \sqrt{3}$

## Oppgave 5 (6 poeng)

Et bord har en bordplate med en form som en trekant  $ABC$ . Dersom vi tenker oss bordet plassert i et tredimensjonalt koordinatsystem der enhetene langs aksene er desimeter, vil hjørnene ha koordinatene  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 3, 0)$  og  $C(1, 4, 1)$ .

- a) Er noen av vinklene i trekanten større enn  $90^\circ$ ?  
Husk å begrunne svaret.

- b) Bestem arealet av bordplaten.

En plante på veggen har en gren som vokser slik at den følger en rett linje gjennom punktene  $D(3, 7, 3)$  og  $E(2, 3, 2)$ .

- c) Vis at grenen aldri vil treffe bordplaten.

## Oppgave 6 (2 poeng)

Casper har skrevet denne koden:

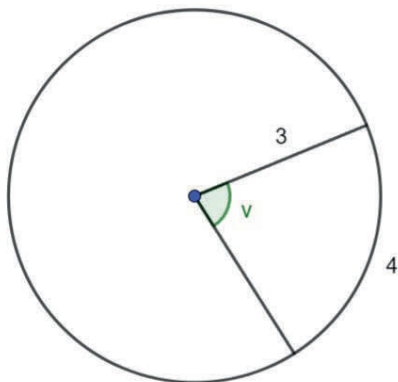
```
1  def f(x):
2  |     return x**3
3
4  def g(x):
5  |     return -2*x**2
6
7  dx = 0.0001
8
9  s = 0
10 x = 0
11 while x <= 2:
12 |     s = s + f(x)*dx + g(x)*dx
13 |     x = x + dx
14
15 print(s)
```

Bestem verdien som skrives ut når koden kjøres.

## Oppgave 7 (4 poeng)

I en sirkel er radius lik 3.

Figuren nedenfor viser en vinkel  $v$  der toppunktet er plassert i sentrum av sirkelen og buelengden er 4.



a) Hvor stor er vinkelen  $v$  gitt i

- radianer?
- grader?

Om en annen vinkel  $u$  får du vite at  $u \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$  og  $\tan u = 2$ .

b) Bestem de eksakte verdiene til  $\sin u$  og  $\cos u$ .

## DEL 2

### Med hjelpemidler

#### Oppgave 1 (6 poeng)

En bil kjører opp en spiralformet vei inne i et parkeringshus.

Posisjonen til bilen etter  $t$  sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[ 4 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right), 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2, 5 + \frac{1}{3}t \right] \quad t \in [0, 20]$$

der bakkenivået er  $xy$ -planet i et koordinatsystem med meter som enhet langs aksene.

- a) Hvor høyt over bakkenivået er bilen etter 5 sekunder?
- b) Bestem fartsvektoren  $\vec{v}(t)$  og farten til bilen etter 10 sekunder.
- c) Gjør nødvendige antakelser og bestem en mulig avstand mellom etasjene i parkeringshuset.

## Oppgave 2 (4 poeng)

Nora blir 37 år i 2026 og vil begynne å spare til egen pensjon.

Hun vil sette et fast beløp inn på en konto i banken 1. januar hvert år. Hun vil begynne sparingen 1. januar 2026 og holde på til og med januar 2055.

Målet hennes er å ha 3 750 000 kroner i banken etter at rentene for 2055 er lagt til. Nora venter at den årlige rentesatsen på kontoen vil være 2,5 %.

a) Hvor stort beløp må Nora sette i banken hvert år for å nå målet?

Nora har et huslån. Lånet har årlige terminer, og Nora betaler terminbeløpet i januar hvert år. I januar 2026 vil lånet være på 3 000 000 kroner.

Nora vil betale ned lånet før det året hun fyller 70. Hun har regnet seg fram til at hun da må betale 150 000 kroner hver termin fra og med januar 2026 til og med januar 2058.

b) Hvor høy har Nora regnet med at den årlige rentesatsen på lånet vil være?

## Oppgave 3 (6 poeng)

En hare løper vekk fra en rev som angriper den. Farten  $v$  til haren er gitt ved

$$v(t) = 8,3 - 17,4 \cdot e^{-5t} + 9,1 \cdot e^{-0,08t}$$

Her er  $v$  meter per sekund, og  $t$  er antall sekunder etter at haren starter å løpe.

a) Hvor lang tid vil det gå før akselerasjonen til haren er null?  
Hva forteller dette svaret?

b) Hvor langt løper haren i løpet av de første 7 sekundene?

Gjennomsnittsfarten  $v_g$  til haren de første  $x$  sekundene er gitt ved

$$v_g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x v(t) dt$$

c) Bestem gjennomsnittsfarten til haren de første 200 meterne.

## Oppgave 4 (2 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Det kan vises at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Bruk denne sammenhengen til å vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$

I denne oppgaven kan du se bort fra integrasjonskonstantene.

## **tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgåva:**

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

## **tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgaven:**

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**