Eksamen 1T 2025, LF Del 1

Oppgave 1

$$f(x) = \frac{12x-3}{2x+1}$$

- Vertikal asymptote: $2x+1=0$

$$2x = -1$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$$

- Horisontal asymptote:

$\frac{12x-3}{2x-1}$ normer seg verdien av $\frac{12x}{2x} = 6$ (når $x \to \infty$)

Dermed er $\underline{\underline{y=6}}$ den horisontale asymptoten.

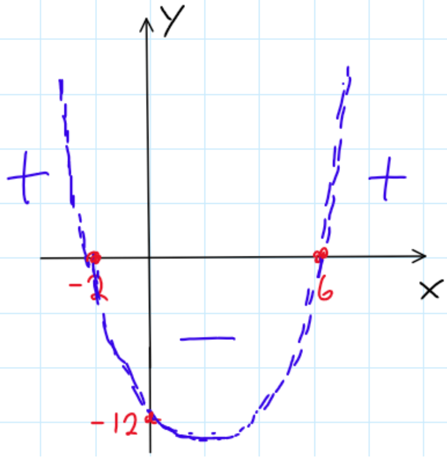
Oppgave 2

$$x^2 - 4x - 12 < 0$$

$$(x+2)(x-6)$$

- Nullpunktene er $x_1 = -2$ og $x_2 = 6$
- Lager skisse av grafen for å løse ulikheten:

Ser at løsningen er $\underline{\underline{x \in \langle -2, 6 \rangle}}$



Oppgave 3

- Andregradsfunksjon $f(x)$, ett nullpunkt:

  Må ha formen $f(x) = a(x - x_0)^2$

- Skjærer y-aksen i $(0, 9)$:

  Da er $f(0) = 9$

  $$a \cdot (-x_0)^2 = 9$$

  $$a \cdot x_0^2 = 9$$

- Skal finne et mulig uttrykk - velger $a = 1$, da blir

  $$x_0^2 = 9$$

  $$x_0 = \pm 3$$

- Velger $x_0 = 3$ som nullpunkt, det gir

  $$f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Oppgave 4

a) $x^3 - 7x^2 - 10x + 16 = 0$

- Prøver å finne et nullpunkt ved å teste:

$x = 1$ gir: $1^3 - 7 \cdot 1^2 - 10 + 16 = 1 - 7 - 10 + 16 = \underline{0}$

- Siden $x = 1$ er nullpunkt, er uttrykket delelig med $(x-1)$:

$$
\begin{aligned}
&(x^3 - 7x^2 - 10x + 16) : (x-1) = \underline{x^2 - 6x - 16} \\
&-\underline{(x^3 - x^2)} \\
&\quad -6x^2 - 10x + 16 \\
&\quad -\underline{(-6x^2 + 6x)} \\
&\qquad -16x + 16 \\
&\qquad -\underline{(-16x + 16)} \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

- Har da

$$(x^2 - 6x - 16)(x-1) = 0$$

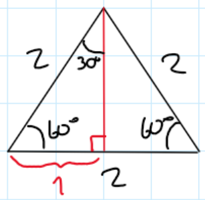
$$(x+2)(x-8)(x-1) = 0$$

$$\underline{\underline{x = -2 \lor x = 8 \lor x = 1}}$$

b) $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x + 16$

- Må ha to nullpunkter på positiv side: Ikke A og D
- Må ha positivt konstantledd: Ikke B
- Den korrekte grafen er derfor $\underline{\underline{C}}$

Oppgave 5



a) Ser på den rettvinklede trekanten til venstre:

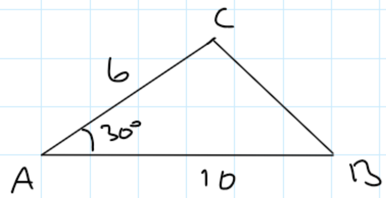
$$\sin 30° = \frac{\text{mot}}{\text{hyp}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $\triangle ABC$, $AB = 10$

$AC = 6$

$\angle A = 30°$



- Arealsetningen gir

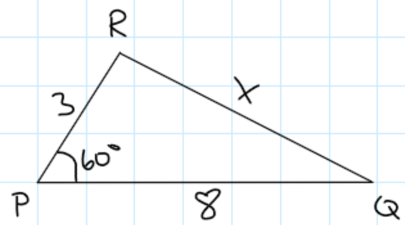
$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 30°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{15}}$$

c) $\triangle PQR$, $PQ = 8$

$PR = 3$

$\angle P = 60°$



- Finner QR fra cosinussetningen:

$$x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60°$$

$$= 64 + 9 - 48 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 73 - 24$$

$$x^2 = 49$$

$$QR = x = \underline{\underline{7}}$$

Oppgave 6

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

CAS gir $x = x$. Dette er fordi likningen er oppfylt uansett hvilken verdi x har, de to uttrykkene er identiske.

Det er nettopp dette som er definisjonen på en identitet: En likning som er gyldig for alle verdier av x.

Oppgave 7

Programmet bruker funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 15$

- Variabelen "verdi" settes først til $f(-5) = 0$
- I løkken økes x med 'en hver gang, frem til $x = 5$
  Hvis $f(x)$ får en lavere verdi enn "verdi", oppdateres variabelen.
- Programmet prøver altså å finne den minste verdien til $f(x)$, mao. verdien til bunnpunktet (dersom den ligger mellom $x = -5$ og 5, og har heltallig x)
- Programmet vil til slutt skrive ut y-verdien til bunnpunktet.

  Finner det algebraisk: $f'(x) = 2x + 2$

  $f'(x) = 0$ i bunnen, gir

  $2x + 2 = 0$

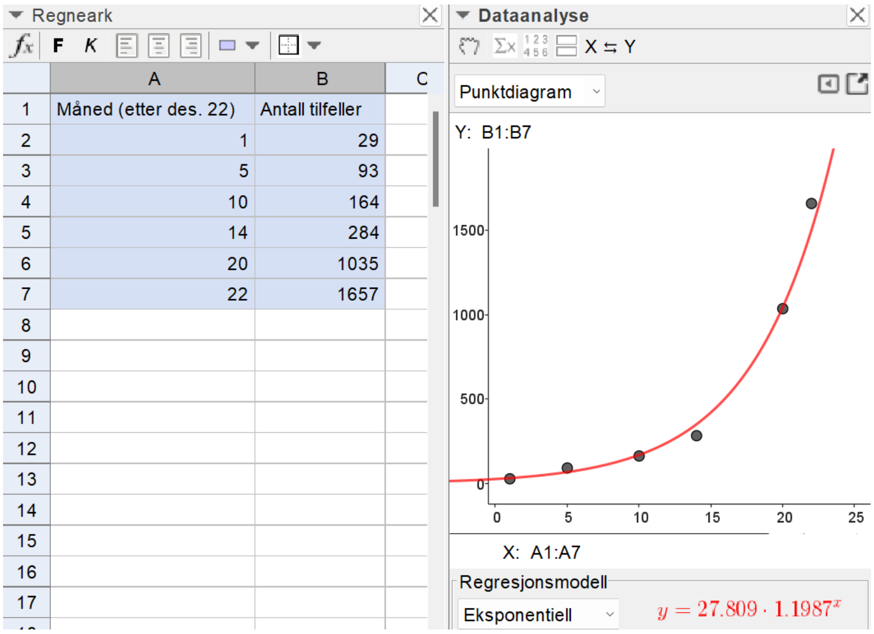
  $\underline{x = -1}$

- Programmet skriver ut $f(-1) = \underline{\underline{-16}}$

Del 2

Oppgave 1

a) Legger informasjonen inn i Regneark i GeoGebra og bruker Regresjonsanalyse. Velger eksponentiell modell:

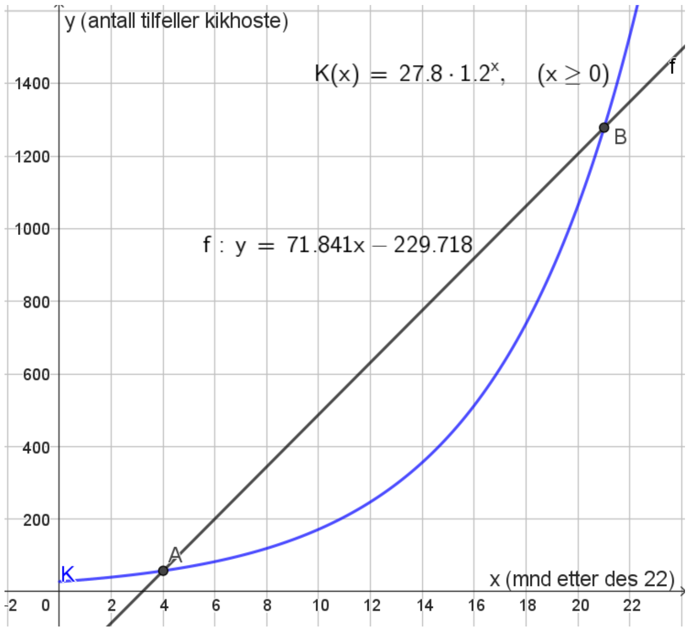


	A	B	C
1	Måned (etter des. 22)	Antall tilfeller	
2	1	29	
3	5	93	
4	10	164	
5	14	284	
6	20	1035	
7	22	1657	

Ser at den best tilpassede modellen er $K(x) = 27{,}8 \cdot 1{,}2^x$.

b) Viser to løsningsmetoder:

Metode 1 – grafisk løsning. Legger inn funksjonen og punktene, og bruker Linje for å lage linjen mellom punktene:



Ser at stigningstallet er ca. 71,8. Det betyr at den gjennomsnittlige veksten av antall tilfeller kikhoste i denne perioden var omtrent 71,8 tilfeller per måned.

Metode 2 – regning i CAS: Regner ut «endring y / endring x» og får

1	(K(21)-K(4))/(21-4)
	$\approx$ **71.841**

Ser at stigningstallet er ca. 71,8. Det betyr at den gjennomsnittlige veksten av antall tilfeller kikhoste i denne perioden var omtrent 71,8 tilfeller per måned.

c) Mai 2025 vil tilsvare $x = 29$:

2	K(29)
	$\approx$ **5499.218**

Ser at det i denne måneden vil bli registrert omtrent 5500 tilfeller av kikhoste ifølge modellen.

Oppgave 2

Lager et likningssett, med x for antall små sekker og y for antall store sekker. Vi får likningssettet

$I: x + y = 80$ (fra antallet sekker totalt)
$II: 4{,}5x + 12y = 720$ (fra vekten til sammen)

Løser i CAS:

1	x + y = 80
	$\rightarrow$ $\mathbf{x + y = 80}$
2	4.5x + 12y = 720
	$\approx$ $\mathbf{4.5\,x + 12\,y = 720}$
3	{$1, $2}
	Løs: $\mathbf{\{\{x = 32, y = 48\}\}}$

Ser at det var 32 små sekker og 48 store sekker som ble solgt denne dagen.

Oppgave 3

a) Arealet av tolvkanten er 120, som betyr at arealet av én av trekantene er 10. Siden trekantene er innskrevet i en sirkel, er begge vinkelbeinene på hver side av $30°$-vinkelen lik r, radius på sirkelen. Finner radien fra arealsetningen i CAS:

1	10 = 1/2 * r * r * sin(30°) Løs: $\left\{r = -2\sqrt{10}, r = 2\sqrt{10}\right\}$

Kun positive lengder gir mening her. Radien er $2\sqrt{10}$, så diameteren blir det dobbelte: $4\sqrt{10}$.

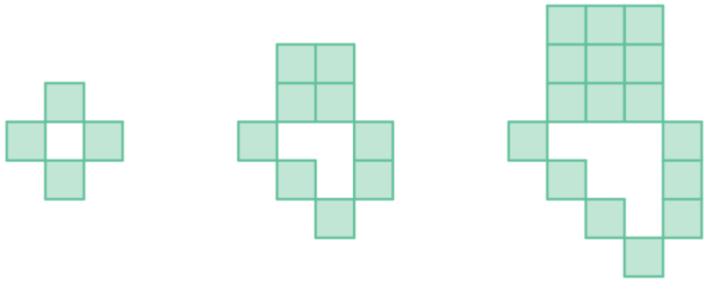
b) Omkretsen av tolvkanten vil være 12 ganger den korteste siden i trekanten. Finner lengden av siden fra cosinus-setningen i CAS:

2	r := 2*sqrt(10) → $r := 2\sqrt{10}$
3	x**2 = r**2 + r**2 - 2*r*r*cos(30°) Løs: $\left\{x = -2\sqrt{15} + 2\sqrt{5}, x = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}\right\}$
4	{x = -2 sqrt(15) + 2sqrt(5), x = 2sqrt(15) - 2sqrt(5)} ≈ $\{x = -3.274, x = 3.274\}$
5	s := 2sqrt(15) - 2sqrt(5) → $s := -2\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$
6	O := 12*s → $O := -24\sqrt{5} + 24\sqrt{15}$

(i linje 4 dobbeltsjekket jeg hvilken lengde som var positiv – unødvendig her siden det er ganske åpenbart, men kan være nyttig i andre sammenhenger hvor det ikke er like tydelig)

Ser at omkretsen blir $24\sqrt{15} - 24\sqrt{5}$.

Oppgave 4



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Om vi ser på figur 3, ser vi at den er satt sammen av et stort kvadrat helt øverst, med $3^2 = 9$ grønne kvadrater, en linje nede til høyre med 3 grønne kvadrater og en linje nede til venstre med 4 grønne kvadrater.
Generaliserer vi dette til figur n kan vi se at figurene er satt sammen av et stort kvadrat helt øverst (n^2), en linje nede til høyre (n) og en linje nede til venstre ($n + 1$). Et uttrykk for antall grønne kvadrater i figur n blir da:

$$n^2 + n + (n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

En algoritme for programmet kan være:

- Lag en løkke som løper fra $n = 1$ til $n = 20$
- Regn ut antallet kvadrater i figur n basert på formelen over
- Skriv ut figurnummeret og antallet kvadrater, etter hver tur i løkken

b) Python-kode for programmet:

```python
for n in range(1, 21):
    kvadrater = n**2 + 2*n + 1
    print(n, kvadrater)
```

Utskrift:

```
1 4
2 9
3 16
4 25
5 36
6 49
7 64
8 81
9 100
10 121
11 144
12 169
13 196
14 225
15 256
16 289
17 324
18 361
19 400
20 441
```

c) Én måte å løse den på er å lage en for-løkke men prøve oss frem litt på hvor lenge vi må kjøre for å komme over 1000000:

```python
summen = 0 #skal summere opp figurene

for n in range(1, 145): #prøve seg frem hvor lenge vi går
    kvadrater = n**2 + 2*n + 1
    summen = summen + kvadrater
    print(n, summen)
```

Utskrift:

```
141 964534
142 984983
143 1005719
144 1026744
```

Ser at vi da kan maksimalt lage 142 figurer. Endrer programmet til også regne ut hvor mange vi har igjen:

```python
summen = 0 #skal summere opp figurene

for n in range(1, 143): #prøve seg frem hvor lenge vi går
    kvadrater = n**2 + 2*n + 1
    summen = summen + kvadrater
    print(n, summen)

igjen = 1000000 - summen
print("vi har igjen",igjen,"kvadrater")
```

Utskrift:

```
140 944370
141 964534
142 984983
vi har igjen 15017 kvadrater
```

Vi kunne alternativt løst oppgaven med en while-løkke i stedet:

```python
summen = 0 #skal summere opp figurene
n = 1
while summen < 1000000:
    kvadrater = n**2 + 2*n + 1
    summen = summen + kvadrater
    print(n, summen)
    n = n + 1

igjen = 1000000 - summen
print("vi har igjen",igjen,"kvadrater")
```

Problemet med denne er at den går ett steg «for langt»:

```
142 984983
143 1005719
vi har igjen -5719 kvadrater
```

Det kunne vi fikset slik, ved å trekke fra igjen den siste figuren vi regnet ut:

```python
summen = 0 #skal summere opp figurene
n = 1
while summen < 1000000:
    kvadrater = n**2 + 2*n + 1
    summen = summen + kvadrater
    n = n + 1

summen = summen - kvadrater #justere for å gå ett steg for mye
igjen = 1000000 - summen
print("vi har igjen",igjen,"kvadrater")
```

Utskrift:

```
vi har igjen 15017 kvadrater
```

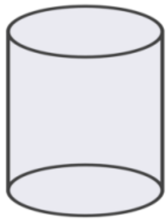
Oppgave 5

Formel for å regne ut volumet av en boks med radius r og høyde h

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Formel for å regne ut arealet av overflaten av boksen

$$O = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



- Får oppgitt at volumet alltid skal være $450\ \text{cm}^3$.

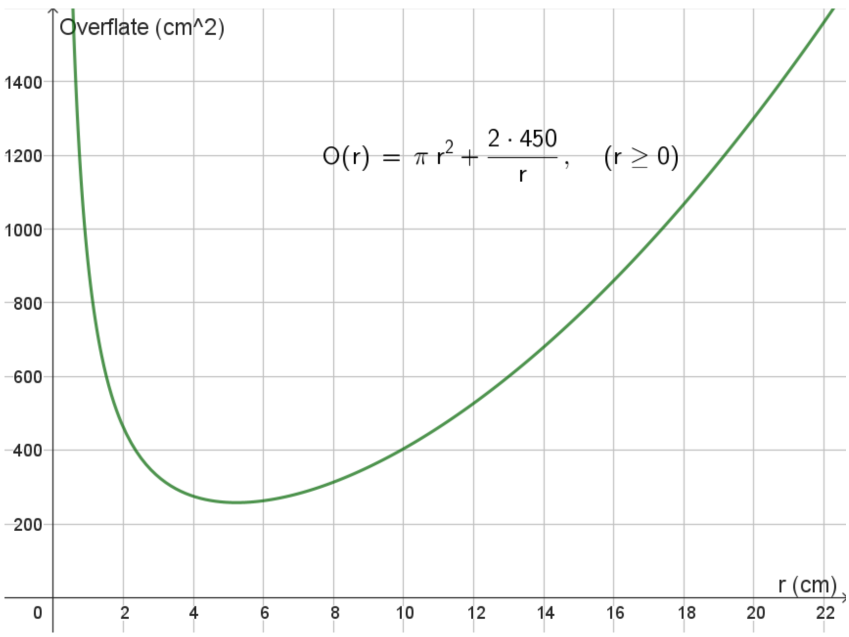
a) Lager oversikten i Regneark og bruker formlene over til beregningene. Høyden blir, fra volumformelen: $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{450}{\pi r^2}$

	A	B	C	D
1	Radius, r (cm)	Høyde, h (cm)	Overflate, O (cm2)	Volum, V (cm3)
2	2	35.8	462.6	450
3	4	9	275.3	450
4	6	4	263.1	450
5	8	2.2	313.6	450

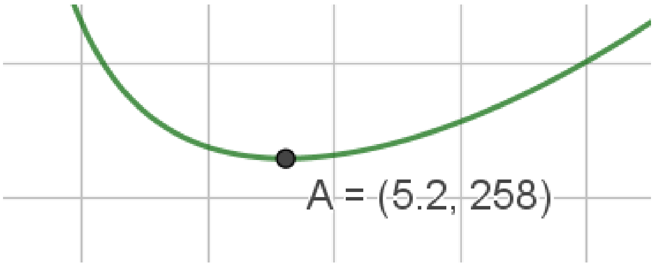
b) Ønsker en formel for overflaten som funksjon av radius. Vi har en formel for overflaten, men den inneholder også høyden. Erstatter høyden med formelen beskrevet i a):

$$O(r) = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r} = \boldsymbol{\pi r^2 + \frac{2 \cdot 450}{r}}$$

Tegner grafisk i GeoGebra:



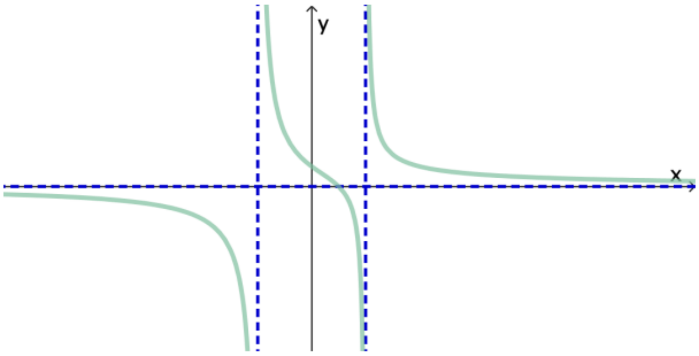
c) Finner den minst mulige overflaten ved å finne bunnpunktet fra kommandoen Ekstremalpunkt, se punkt A her:



Ser at man får minst mulig overflate med en radius på $5{,}2\ \mathrm{cm}$, og da er overflaten $258\ \mathrm{cm}^2$.

Oppgave 6

Grafen til f

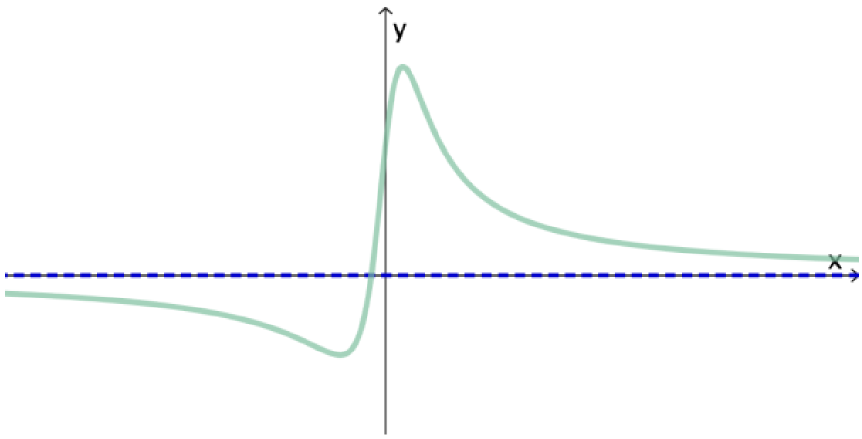


- Vi har to vertikale asymptoter, så nevneren må ha to nullpunkter. Asymptotene ser også symmetriske ut om origo, så en mulig nevner som passer med dette er $(x+2)(x-2)$, som vi gi vertikale asymptoter på $x = \pm 2$.
- Den horisontale asymptoten ser ut til å være 0, som betyr at nevneren må ha høyere grad enn telleren. Det kan vi få til om telleren er en lineær funksjon. Den har et positivt nullpunkt, som ser ut til å ligge midt mellom origo og den høyre vertikale asymptoten. For vårt eksempel bør da nullpunktet være $x = 1$. Da kan en mulig teller være $x - 1$.
- Funksjonen f kan da være gitt ved

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$$

- Må også sjekke om det passer med skjæring med y-aksen, som skal være positiv. Setter inn $x = 0$ og får $f(0) = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$. Siden dette er positivt, passer det med grafen!

Grafen til g



- Her har vi ingen vertikale asymptoter, som betyr at nevneren aldri kan bli null. Det kan vi få til med en andregradsfunksjon uten nullpunkter. En enkel mulighet kan være $x^2 + 1$.
- Igjen er den horisontale asymptoten 0, som betyr at telleren må ha lavere grad enn nevner, altså at telleren her blir en lineær funksjon. Den har et nullpunkt på negativ side, så en mulighet kan være $x + 1$, som har nullpunkt ved $x = -1$.
- Funksjonen $g(x)$ kan da være gitt ved

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

- Må også sjekke om det passer med skjæring med y-aksen, som skal være positiv. Setter inn $x = 0$ og får $g(0) = \frac{1}{1} = 1$. Siden dette er positivt, passer det med grafen!