Eksamen R2 vår 2026

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a)

$$\int_0^2 (e^{2x} + x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = \frac{1}{2}e^4 + 2 - \frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}e^4 + \frac{3}{2}}} \text{ eller } = \underline{\underline{\frac{e^4+3}{2}}} \text{ om du vil ...}$$

b) Jeg velger en substitusjon (variabelskifte), med $u = \ln x$, så $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, så $\frac{dx}{x} = du$:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(u)\frac{dx}{x} = \int \sin u\, du = -\cos u + C = \underline{\underline{-\cos(\ln x) + C}}$$

Oppgave 2

a) Integrerer den deriverte for å finne funksjonen:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2}{x^2}dx = 2\int x^{-2}dx = 2\cdot\left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right) + C = \frac{2}{-1}x^{-1} + C = \underline{-\frac{2}{x} + C}$$

(her er C enda viktigere enn vanlig, uten den kan vi ikke løse resten av oppgaven)

«f går gjennom $(2, 2)$» betyr:

$$f(2) = 2$$

$$-\frac{2}{2} + C = 2$$

$$C = 2 + 1$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{2}{x} + 3}}$$

b) Finner skjæringen mellom grafene.

$$g(x) = h(x)$$

$$x = -\frac{3}{x} + 4 \quad | \cdot x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

Jeg må altså finne arealet mellom g og h mellom $x = 1$ og $x = 3$; jeg ser at $g(2) = 2$ og $h(2) = \frac{5}{2}$, altså blir det positivt hvis jeg tar $h(x) - g(x)$:

$$\int_1^3 (h(x) - g(x))dx = \int_1^3 \left(-\frac{3}{x} + 4 - x\right)dx = \left[-3\ln x + 4x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \left(-3\ln 3 + 4\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2\right) - \left(-3\ln 1 + 4\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right) = -3\ln 3 + 12 - \frac{9}{2} + 0 - 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{24 - 9 - 8 + 1}{2} - 3\ln 3 = \frac{8}{2} - 3\ln 3 = \underline{\underline{4 - 3\ln 3}}$$

(hvis du tar $g - h$ får du $3\ln 3 - 4 < 0$, det er ikke et areal, og ja, vi forventer at du ser at $3\ln 3 < 4$...)

Oppgave 3

Får vite $\cos v = \frac{2}{3}$

a) Jeg husker enhetsformelen:

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Løser for den ukjente:

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

OBS: du må alltid huske $\pm$ i kvadratiske ligninger; her er det ekstra viktig fordi vi faktisk skal ha den negative løsningen!

$$\sin v = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vi er i fjerde kvadrant, der er sinus negativ, så:

$$\underline{\underline{\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}}}$$

Og tar tangens rett fra definisjonen:

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot 3}{\frac{2}{3}\cdot 3} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}$$

(hvis du ikke husker enhetsformelen, så kan du tegne en rettvinklet trekant der hosliggende katet til v er 2, og hypotenusen er 3, og så finne motstående katet med Pytagoras... men det er litt 1T lizzom... og så må du jo passe på fortegnene)

b) Dette er en rett fram cosinusligning:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(bruker en $30 - 60 - 90$-trekant, og omvendte vinkler for å finne grunnløsningene)

(og jeg husker å ta den generelle løsningen FØR jeg ganger bort $\frac{\pi}{3}$...)

$$\frac{\pi}{3}x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad | \cdot \frac{3}{\pi}$$

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2} + 6k \\ -\frac{1}{2} + 6k \end{cases}$$

Innenfor $x \in \langle 0, 10\rangle$ er det tre løsninger, fra den øverste $k = 0$ og $k = 1$, fra den nederste $k = 1$:

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right\}}}$$

Oppgave 4

Velger å lage en sinusfunksjon, på formen:

$$f(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$$

Leser av fra grafen:

Den har $y_{max} = 1$ og $y_{min} = -3$, som gir likevektslinja $d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = \underline{\underline{-1}}$

Og amplituden $A = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} = \frac{1-(-3)}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

(du kan også forklare at du leser av direkte fra grafen, da er det fint om du skisserer den på innføringsarket)

Finner perioden mellom to nabotoppunkter, $p = x_{topp2} - x_{topp1} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, som gir $c = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = \underline{\underline{2}}$

Da er det bare igjen det vanskeligste: forskyvningen! Det er mange måter å finne den, f.eks. kan jeg se at første oppadgående skjæringpunkt med likevektslinja er i $x_0 = \frac{\pi}{4}$, som betyr at $cx_0 + \varphi = 0$ der, som betyr at

$$\varphi = -cx_0 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

Men det var litt vanskelig å lese av det oppadgående skjæringspunktet fordi det ikke var på en hovedinndelingslinje, så jeg lager heller en ligning ut av at et toppunkt er i $x = \frac{\pi}{2}$.

Husk at $\sin(cx + \varphi) = 1$ i et toppunkt, altså er:

$$\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \varphi) = 1$$

husk fra enhetssirkelen: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\pi + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \pi = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

Hei se, samme svar! Så, mitt svar er :

$$\underline{\underline{f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}}$$

Hvis du velger et annet toppunkt, eller kanskje en annen metode, kan du få andre verdier for φ, men de må være på formen $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, altså kan f.eks. $\frac{3\pi}{2}$ eller $-\frac{5\pi}{2}$ være mulige verdier.

Men IKKE $\frac{\pi}{2}$ eller $-\frac{3\pi}{2}$, da har du gjort noe rart med fortegnet et eller annet sted…

Eller kanskje du lagde en cosinusformel, f.eks. $f(x) = -2\cos 2x - 1$…?

Oppgave 5

Rett fram omdreiningslegeme:

$$V = \int_1^3 \pi\big(f(x)\big)^2 dx = \pi\int_1^3 (2x-1)^2 dx = \pi\int_1^3 (4x^2 - 4x + 1)dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_1^3$$

$$= \pi\left(\left(\frac{4}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\right) - \left(\frac{4}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1\right)\right) = \pi\left(36 - 18 + 3 - \frac{4}{3} + 2 - 1\right) = \pi\left(22 - \frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{62\pi}{3}}}$$

Oppgave 6

a) Har $a_1 = 5$ og $d = -0{,}1$. (ser på én sidelengden, og ser bort fra målenhetene i utregningen).

Det er en aritmetisk rekke, så ledd n blir:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 5 + (n-1)\cdot(-0{,}1) = 5 - 0{,}1n + 0{,}1 = 5{,}1 - 0{,}1n$$

OBS 2: oppgaven ber bare om rekka, ikke summeformelen, så $\underline{\underline{s_n = 5 + 4{,}9 + 4{,}8 + \cdots + a_n}}$ er et korrekt svar, bare husk å vise formelen for a_n. (det var kanskje egentlig meningen at vi skulle finne lengden for alle de fire sidene, da er $a_n = 20{,}4 - 0{,}4n$ og $s_n = 20 + 19{,}6 + 19{,}2 + \cdots + a_n$)

Platene blir mindre og mindre, hun er tom for plater når $a_n = 0$, altså:

$$5{,}1 - 0{,}1n = 0$$

$$n = \frac{-5{,}1}{-0{,}1} = 51$$

Så den siste platen er $a_{50} = 0{,}1$, mens $a_{51} = 0$ ikke er en plate….
Svar: hun kan ha maksimalt 50 plater.

(her har du også lov til å tenke logisk og forklare med ord for å vise at hun ender opp med 50 plater)

La oss lage formelen for summen av de n første leddene, bare fordi jeg allerede har gjort det:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{5 + 5{,}1 - 0{,}1n}{2}\cdot n = \frac{(10{,}1 - 0{,}1n)n}{2}$$

(eller kanskje $\frac{10{,}1n - 0{,}1n^2}{2}$ eller $5{,}05n - 0{,}05n^2$… eller med heltall $\frac{(101-n)n}{20}$, hva er egentlig penest…?)
(men det er viktig at du ikke bare svarer $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, det er IKKE bra nok…)
IGJEN: dette er sidelengden for én side, kanskje vi burde gange alt med 4 for å få fire sider, da blir:

$$s_n = 4\cdot\frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = 2(5 + 5{,}1 - 0{,}1n)\cdot n = 2(10{,}1 - 0{,}1n)n$$

b) Snikete, denne lurte meg første gangen! Vilfred krymper SIDELENGDEN på platene med 10%, altså krymper AREALET med mer; bruker vekstfaktor: $k_{side} = 0{,}9$, $k_{areal} = 0{,}9^2 = 0{,}81$.

Da er dette en geometrisk rekke med $a_1 = 19$ og $k = 0{,}81$. Fordi $-1 < k < 1$ vet vi at rekka konvergerer. Han kan ikke bruke uendelig mange planker i «virkeligheten», men den er heldigvis ikke relevant her, så vår beste tilnærming her er den uendelige konvergente rekka:

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{19\ m^2}{1 - 0{,}81} = \frac{19\ \mathrm{m}^2}{0{,}19} = \underline{\underline{100\ \mathrm{m}^2}}$$

Svar: det samlede arealet blir maksimalt 100 kvadratmeter.

Oppgave 7

Har planet $\alpha: 2x - 5y + 4z = -4$ og $A(1,2,1)$, $B(2,0,-2)$ og $C(-1,2,2)$ i planet.

a) Setter $D(3,1,-1)$ inn i planligningen: $2\cdot 3 - 5\cdot 1 + 4\cdot(-1) = 6 - 5 - 4 = -3 \neq -4$.
Svar: planligningen er ikke oppfylt, D ligger ikke i planet

b) Finner et par vektorer i planet,

$$\overrightarrow{AB} = [2-1, 0-2, -2-1] = [1,-2,-3]$$
$$\overrightarrow{AC} = [-1-1, 2-2, 2-1] = [-2,0,1]$$

Vektorproduktet mellom disse blir en normalvektor til planet:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{matrix} \cancel{1} & -2 & -3 & 1 & -2 & \cancel{-3} \\ \cancel{-2} & 0 & 1 & -2 & 0 & \cancel{1} \end{matrix} = [-2 \cdot 1 - (-3) \cdot 0, -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2)]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2, 5, -4]$$

Det ble ikke helt likt det i oppgaven, men heldigvis er alle vektorer som er parallelle med denne en normalvektor, så jeg kan bruke $\vec{n} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \underline{\underline{[2, -5, 4]}}$, qed!

(merk at hvis oppgaven ikke spesifikt hadde spurt om et vektorprodukt hadde vi kunne sagt direkte at for en planligning på formen $ax + by + cz = d$ så er $[a, b, c]$ en normalvektor, altså har planet $\alpha: 2x - 5y + 4z = -4$ normalvektoren $[2, -5, 4]$)

c) Det finnes sikkert en smart løsning på dette, men jeg er ikke så smart, så jeg bare bruteforcer ved å organisere sirkelligninga ved å fullføre kvadratet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 18y + 2z + k = 0$$

$$x^2 + (y-9)^2 - 9^2 + (z+1)^2 - 1^2 + k = 0$$

$$(x-0)^2 + (y-9)^2 + \big(z - (-1)\big)^2 = 82 - k$$

Når en sirkelligning er på formen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ er sentrum $S(x_0, y_0, z_0)$, altså kan jeg lese fra sirkelligninga at $\underline{\underline{S(0, 9, -1)\text{ er sentrum}}}$, qed!

d) En vektor fra sentrum av ei kule til et punkt på kuleflata er alltid normal på planet som tangerer kula i det punktet. Med symboler: $\overrightarrow{SP} \parallel \overrightarrow{n_\alpha}$. Vi har også $l \parallel \overrightarrow{SP}$, da er en mulig retningsvektor for linja l $\overrightarrow{r_l} = \overrightarrow{n_\alpha} = [2, -5, 4]$, og et punkt på linja er $S(0, 9, -1)$, så jeg lager parameterframstillingen for linja:

$$l = \begin{cases} x = & 2t \\ y = & 9 - 5t \\ z = & -1 + 4t \end{cases}$$

e) Dette kan gjøres på ulike måter. Jeg velger å først finne radius til kula, som er lik avstanden fra sentrum av kula til tangeringsplanet. Jeg bruker avstandsformelen fra punkt til plan:

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \frac{|-45|}{\sqrt{45}} = \sqrt{45}$$

Organiseringen av kuleligninga i c) viste at

$$r^2 = 82 - k$$

$$\sqrt{45}^2 = 82 - k$$

$$k = 82 - 45 = \underline{\underline{37}}$$

(eller du kan finne $P(2, 4, 3)$ med en eller annen metode, og så ta $r = |\overrightarrow{SP}|$)

Oppgave 8

a) Eleven har bare gitt et eksempel på at det stemmer for to gitte vektorer; hen må vise at det er gyldig for et hvert vilkårlig par av ortogonale vektorer.

OBS: det er ingen regnefeil i «beviset», det er matematisk korrekt utført, men et eksempel på at det funker i ett tilfelle er ikke et bevis!

b) Har to vilkårlige vektorer, $\vec{p} = [x_p, y_p, z_p]$ og $\vec{q} = [x_q, y_q, z_q]$, og de er ikke nullvektorer!

Skal vise at $\vec{p} \perp \vec{q} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2$
(merk at oppgaven bare ba om implikasjonen, ikke ekvivalensen)

Regner høyresiden først, den er enklest: $|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + x_q^2 + y_q^2 + z_q^2$

Tar så venstresiden, og ser om jeg finner noen sammenhenger:

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = \left|[x_p + x_q, y_p + y_q, z_p + z_q]\right|^2 = (x_p + x_q)^2 + (y_p + y_q)^2 + (z_p + z_q)^2$$

Kvadratsetning:

$$= x_p^2 + 2x_p x_q + x_q^2 + y_p^2 + 2y_p y_q + y_q^2 + z_p^2 + 2z_p z_q + z_q^2$$

Organiserer:

$$= x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + x_q^2 + y_q^2 + z_q^2 + 2(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q)$$

Hmmmm, starten er lik høyresiden, jeg substituerer:

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q)$$

La oss studere det siste leddet… x ganger x, y ganger y, z ganger z, det ser mistenkelig ut som et skalarprodukt!

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q$$

Da har vi altså: $\quad |\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q}$

Dette gjelder for alle vilkårlige par av vektorer. Men vi hadde én liten bit til med informasjon, nemlig at vektorene er ortogonale. Og vi vet jo fra før at $\quad \vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

Altså har vi: $\quad \vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2 \cdot 0$

Og når vi har vist at $|\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q}$ sitter vi igjen med:

$$\vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2$$

(ekvivalensen kom helt av seg selv; og hvis vi har en ekvivalens, så har vi en implikasjon)

$$QED!$$

Eller for elegante folk, helt uten koordinater: Vi husker at $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$. Da er:

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2 = \vec{p}^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 = |\vec{p}|^2 + 2 \cdot 0 + |\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2$$

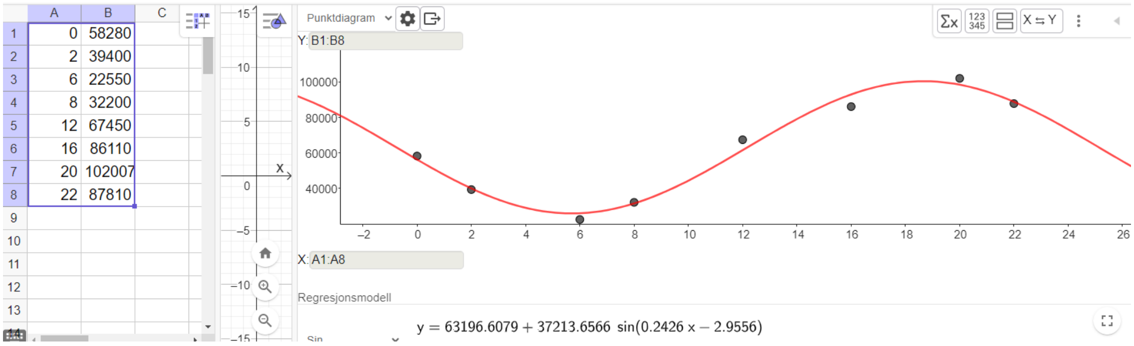
(ja, kvadratsetningene funker på vektorer også)

Husk å forklare at midtleddet forsvant fordi $\vec{p} \perp \vec{q} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ og alt det der.

Del 2, alle hjelpemidler

Oppgave 1

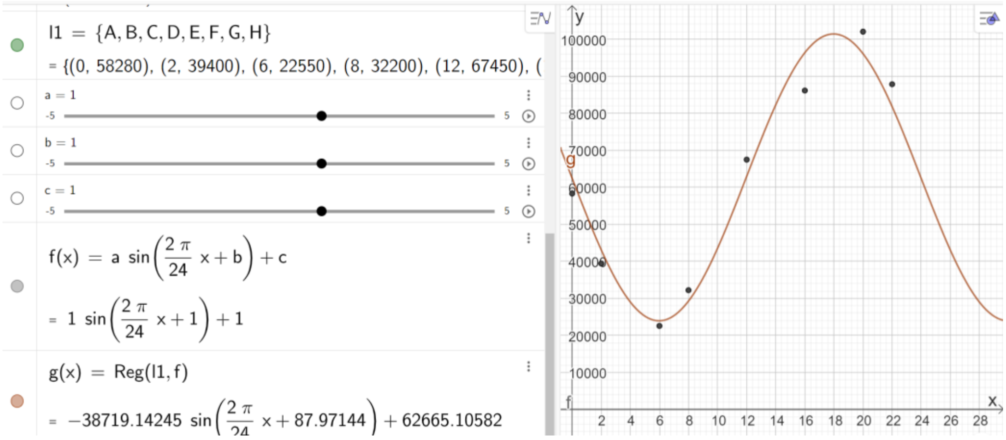
a) Legger verdiene inn i et regneark i GeoGebra, og tar en Regresjonsanalyse. Tjaaa… punktene viser et bunnpunkt og et toppunkt, så en tredjegradsfunksjon kan passe ganske bra for det døgnet. MEN vi må jo tenke på gyldighetsområde og ekstrapolasjon, og… Det er mer logisk at det går opp igjen neste dag, ned igjen neste natt, osv., så jeg velger en sinusregresjon!



Svar: en god modell for datatrafikken er $\underline{\underline{S(t) = 63\,197 + 37214 \sin(0{,}2426x - 2{,}9556)}}$
(som avrundet er ganske lik den i b)

AVANSERTE GREIER, de som er fornøyde med svaret vårt trenger ikke å lese videre!
En ulempe med funksjonen over er at $p = \frac{2\pi}{0{,}2426} \approx 26$ timer, ikke 24 timer, så den gjelder bare for ett døgn… hvis vi vil ekstrapolere, trenger vi et krav om at $p = 24$ slik at $c = \frac{2\pi}{24} \approx 0{,}2618$…

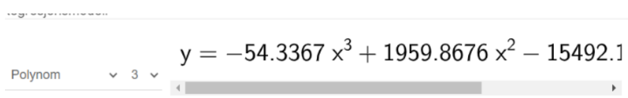
Lager en punktliste, definerer en generell f med glidere og $c = \frac{2\pi}{20}$, og kjører Reg på dem:



Denne passer fortsatt ganske godt til punktene, og har den fordelen at den gjentar seg hver 24. time, altså at den antakeligvis passer godt til mønstret framover også.

MEN vi skulle jo bare lage for det ene døgnet, så det første svaret jeg ga er like greit.

Det fungerer sikkert fint med en tredjegrads også:
Bare forklar godt at den ikke fungerer utover det ene døgnet; den er unyttig til ekstrapolasjon.



Og IKKE begynn å overtilpasse med å lage en 7.gradsfunksjon; når vi har 8 punkter vil en 7.grads alltid passe perfekt til punktene, MEN punktene danner ikke formen til en 7.grads, og ikke en 4.grads heller; det er ett toppunkt og ett bunnpunkt, hvis det skal være et polynom er det en 3.grads.

b) Definerer funksjonen (uten grenser for å gjøre GeoGebra mer samarbeidsvillig), og løser når $D(t) > 90000$ i CAS. Jeg prøvde noen kombinasjoner med grenser, og Nløs og greier, men til slutt var det en helt vanlig ulikhet uten noen grenser som ga svaret:

1 $D(t) := 63000 + 37000 \ \sin(0.24\,t - 3.0)$

$\rightarrow \ D(t) := 37000 \ \sin\left(\frac{6}{25}\,t - 3\right) + 63000$

2 $\text{løs}(D(t) > 90000)$

$\rightarrow \ \left\{t > \frac{25 \ \sin^{-1}\left(\frac{27}{37}\right) + 75}{6} \wedge \frac{25\,\pi - 25 \ \sin^{-1}\left(\frac{27}{37}\right) + 75}{6} > t\right\}$

3 $\$2$

$\approx \ \{15.90803 < t < 22.18194\}$

Svar: <u>det er mer enn 90 000 gigabit per time fra rett før 16:00 til litt etter 22:00.</u>

(jeg orker ikke å regne om til minutter, modellen er uansett ikke så nøyaktig)

(en grafisk løsning funker også, men altså, er det 1P vi driver med eller?)

c) I en sinusfunksjon er det alltid størst endring i vendepunktet, finner vendepunktene der den dobbeltderiverte er 0, ser at det bare er ett punkt innenfor $t \in [0, 24]$, nemlig $t = 12{,}5$, finner endringen der, den er positiv så det er maksimal økning.

4 $\text{Løs}(D''(t) = 0)$

$\rightarrow \ \left\{t = \frac{25}{6}\,k_2\,\pi + \frac{25}{2}\right\}$

5 $D'(12.5)$

$\approx \ 8880$

Svar: <u>det er raskest økning ca klokka 12:30, da er økningen på ca. 8 880 gigabit per time, per time.</u> (jeg ber om unnskyldning til alle fysikere som er sjokkerte over avrundingen…)

(eller så vet vi jo at vendepunktene ligger på likevektslinja, så jeg kan løse $D(t) = 63000$)

(jeg kunne også funnet Ekstremalpunkt på grafen til den deriverte, men igjen, R2 er ikke 1P…)

d) Vi finner den totale datamengden som et integral fra 00:00 til 24:00, og datamengden i arbeidstiden som et integral fra 8:00 til 16:00, og regner forholdet mellom dem:

7 $\dfrac{\int_{8}^{16} D(t)\,dt}{\int_{0}^{24} D(t)\,dt}$

$\approx \ 0.31533$

(her måtte jeg faktisk skrive $D(t)$, det er rart, vanligvis holder det med funksjonsnavnet…)

Svar: <u>ca. 31,5 % av datamengden ble overført i arbeidstida</u>.
Og arbeidstida er 1/3 av dagen, så det passer nesten for godt!

(nei, det er ikke greit å bare ta integralet fra 8 til 16, det står «del» ikke «mengde», pass på begrepene!)

Oppgave 2

a) Skriver programmet:

```python
# definerer første ledd, a1=5
a = 5
# skal skrive ut 6 ledd, så løkka må kjøre 6 ganger
for _ in range(6):
    # skriver ut leddet først, slik at a1 skrives ut
    print(a)
    # og regner ut neste ledd med formelen
    a = (a-1)**2
```

```
Shell
>>> %Run 'R2 eksamen 2026 vår del 2 oppgave 2.py'
 5
 16
 225
 50176
 2517530625
 6337960442777829376
```

De 6 første leddene vises i utskriften.

b) Hvis rekka skal være konvergent, må summen gå mot en endelig verdi når antall ledd går mot uendelig. (Det holder ikke at leddene går mot 0: $a_n = \frac{1}{n}$ konvergerer ikke, mens $b_n = \frac{1}{n^2}$ er konvergent)

OBS: denne er IKKE geometrisk, ikke prøv å regne som om den er geometrisk!

Fordi hvert ledd kvadreres, og vi bare skal jobbe med heltall, vil rekka bare konvergere hvis den kommer til et punkt der alle leddene blir 0. For alle $a_1 \geq 3 \vee a_1 \leq -1$ blir det ukontrollert vekst.

Hvis vi lar $a_1 = 1$ slik at $a_2 = (1-1)^2 = 0$, så blir $a_3 = (0-1)^2 = 1$, så er $a_4 = 0$, osv., som ikke er en konvergent rekke.

```python
# definerer første ledd, a1
a = 1
# skal skrive ut 6 ledd, så løkka må kjøre 6 ganger
for _ in range(6):
    # skriver ut leddet først, slik at a1 skrives ut
    print(a)
    # og regner ut neste ledd med formelen
    a = (a-1)**2
```

```
Shell
>>> %Run 'R2 eksamen 2026 vår del 2 oppgave 2.py'
 1
 0
 1
 0
 1
 0
```

Hvis vi starter med $a_1 = 2$ kommer vi til $a_2 = 1$, og vi får den samme problemstillingen.
Så hvis vi kommer til et sted der et ledd er 0, er neste ledd ikke 0.
Svar: <u>Det er ingen heltall som gjør at rekka konvergerer.</u>

(men jeg er åpen for at jeg har tenkt feil, bare kom med et heltall du tror fungerer, så skal jeg teste det i programmet mitt…)

Oppgave 3

Jeg definerer $\vec{r}(t)$ som en retningsvektor i CAS, det blir enklest.

8 $\quad r(t) := \left(30t - t^2, 8\sin\left(\frac{pi}{10}t\right), 50\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2\right)$

$\rightarrow \quad \mathbf{r(t) := \left(30\,t - t^2,\ 8\ \sin\left(\frac{\pi}{10}\ t\right),\ 50\ \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2\right)}$

a) Motorveien er i xy-planet, så høyden over bakkenivå er z-koordinaten, regner $\vec{r}(4)$ i CAS og leser av r_z:

9 $\quad r(4)$

$\rightarrow \quad \mathbf{\left(104,\ 2\sqrt{2\sqrt{5} + 10},\ 18\right)}$

Svar: etter 4 s er flyet ca. 18 m over bakken.

b) Må først finne når flyet lander, gjør det ved å løse når z-koordinaten er 0:

10 $\quad \text{løs}(z(r(t)) = 0)$

$\rightarrow \quad \mathbf{\{t = 10\}}$

11 $\quad v(t) := r'(t)$

$\rightarrow \quad \mathbf{v(t) := \left(-2\,t + 30,\ \frac{4}{5}\ \pi\ \cos\left(t\ \frac{\pi}{10}\right),\ t - 10\right)}$

12 $\quad |v(10)|$

$\rightarrow \quad \mathbf{\frac{2}{5}\sqrt{4\,\pi^2 + 625}}$

13 $\quad \$12$

$\approx \quad \mathbf{10.31099}$

Fartsvektoren er den deriverte av posisjonsvektoren, og banefarten er lengden av fartsvektoren, tar det i CAS:

Svar: når flyet lander er banefarten ca. 10,3 m/s

c) Her løser jeg $|\vec{v}(t)| = 14{,}3$ direkte i CAS; men fordi det er en kombinert rot-polynom-trigonometrisk har den ikke en eksakt løsning, så jeg tar det numerisk:

14 $\quad \text{NLøs}(|v(t)| = 14.3)$

$\approx \quad \mathbf{\{t = 7.99388, t = 19.96949\}}$

Svar: flyet har landet etter 10 sekunder, så banefarten er 14,3 m/s etter ca. 8 sekunder

(ja, vi forventer at dere skjønner at gyldighetsområdet bare er til flyet lander)

d) Denne kan også løses på flere måter; jeg tenker fysisk og finner avstanden fuglen flyr, som er lengden av vektoren mellom punktet der fuglen starter og der den krysser flybanen. Så deler jeg avstanden på fuglens fart, for å finne tidspunktet der fuglen skjærer flybanen. Så ser jeg hvor flyet er ved det tidspunktet:

16 $\quad \dfrac{\left|\left(125,\ 8,\ \frac{25}{2}\right) - (131,\ 67,\ 23)\right|}{12}$

$\approx \quad \mathbf{5.01889}$

17 $\quad r(\$16)$

$\approx \quad \mathbf{(125.3774,\ 7.99986,\ 12.40574)}$

Flyet har antakeligvis litt utstrekning, og jeg går ut fra at punktet vi følger er sentrum av flyet, så det er ganske tydelig at fuglen treffer flyet etter ca. 5 sekunder.

Oppgave 4

Vi får tenke litt… Det ser ut til at bunnen og toppen av vasen er omtrent like brede, så jeg velger å tro at sinusfunksjonen starter på likevektslinja, som gir $\varphi = 0$, og fullfører én svingning på vasens høyde, som betyr at perioden (eller egentlig bølgelengden…) er $p = 20$, som gir $c = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$.

Da har vi

$$f(x) = A \cdot \sin\frac{\pi}{10}x + d$$

Basert på formen til vasen ser det også ut som amplituden er ca. halvparten av likevektslinja, $A = \frac{1}{2}d$.

Så vet vi jo at volumet skal være $1{,}5\ \mathrm{L} = 1{,}5\ \mathrm{dm}^3 = 1\,500\ \mathrm{cm}^3$, som gir integralet:

$$\int_0^{20} \pi\big(f(x)\big)^2 dx = \int_0^{20} \pi\left(A \cdot \sin\frac{\pi}{10}x + d\right)^2 dx = 1500$$

Bytter $d = 2A$ og får da én ligning, la oss se om CAS kan løse den:

18 $\text{integral}\left(\text{pi} \cdot \left(\text{A} \cdot \sin\left(\frac{\text{pi}}{10}\text{x}\right) + 2\text{A}\right)^2, 0, 20\right)$

$\approx\ \mathbf{282.74334\ A^2}$

19 $\text{løs}(\$18 = 1500)$

$\approx\ \{\mathbf{A = -2.30329, A = 2.30329}\}$

Da har vi $A \approx 2{,}3$ og $d \approx 4{,}6$

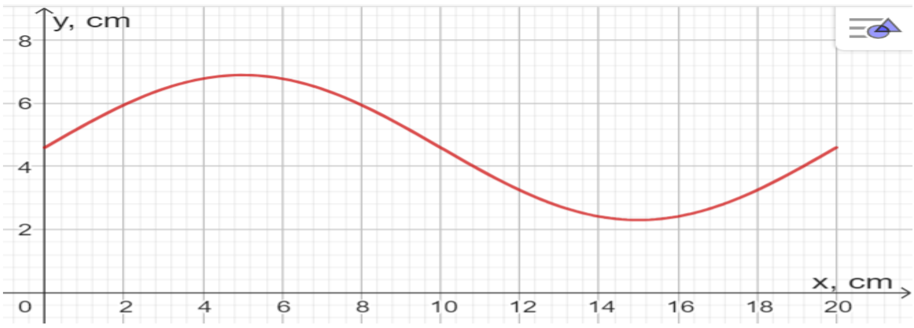
Det gir funksjonsuttrykket:

$$f(x) = 2{,}3\sin\frac{\pi}{10}x + 4{,}6$$

Tegner den i GeoGebra:

20 $\text{f}(\text{x}) := 2.3\sin\left(\frac{\text{pi}}{10}\text{x}\right) + 4.6$

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \frac{23}{10}\sin\left(\frac{1}{10}\pi x\right) + \frac{23}{5}}$



(jeg måtte krympe bildet litt i høyden for å få samme skala på x og y).

Nei, jeg er ikke fornøyd:

- halsen er for smal, det ser mer ut som det skal være $A = \frac{d}{4}$
- kanten av halsen skal nok heller være like bred som den bredeste delen av vasen
- bunnen er for bred, det ser mer riktig ut at bunnen av vasen er på samme bredde som halsen, altså at funksjonen starter på et bunnpunkt

Da er høyden $\frac{3}{2}$ perioder, altså er $p = \frac{h}{\frac{3}{2}} = \frac{2h}{3} = \frac{40}{3}$ og $c = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{40}{3}} = \frac{3\pi}{20}$.

Skal vi se… det er $\frac{1}{4}p$ fra bunnpunktet til første oppadstigende skjæringspunkt, så $x_0 = \frac{1}{4} \cdot p = \frac{1}{4} \cdot \frac{40}{3} = \frac{10}{3}$, og da er $\varphi = -c \cdot x_0 = -\frac{3\pi}{20} \cdot \frac{10}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

Da er den nye f:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{20}x - \frac{\pi}{2}\right) + d$$

Og så er $d = 4A$, og volumet er det samme, så den nye ligningen blir:

18 $\int_0^{20} \pi \left(A \sin\left(\frac{3\pi}{20}x - \frac{\pi}{2}\right) + 4A\right)^2 \mathrm{d}A$

$\rightarrow$ $330\,A^2\,\pi$

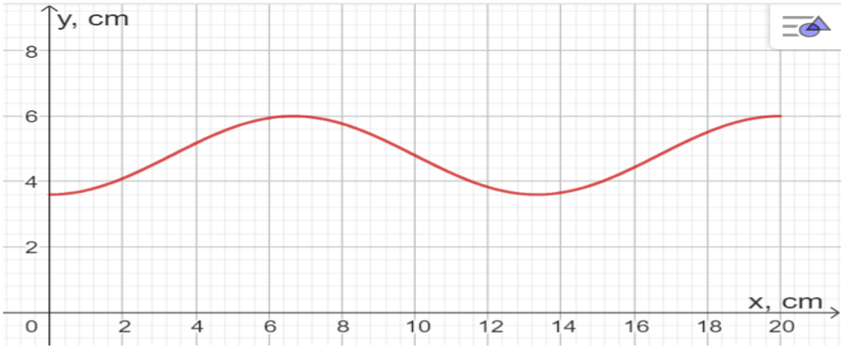
19 Løs($18 = 1500)

$\approx$ $\{A = -1.20286, A = 1.20286\}$

Tegner den:

20 $f(x) := 1.2\sin\left(\frac{3pi}{20}x - \frac{pi}{2}\right) + 4.8, 0 \le x \le 20$

$\rightarrow$ $f(x) := \text{Dersom}\left(0 \le x \le 20, \frac{6}{5}\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{20}x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{24}{5}\right)$



Tja… proporsjonene er bedre, kanskje litt rar form på bunnen og toppen…

Jeg prøver på nytt med $h = \frac{5}{4}p$ og en forskyvning på $\frac{1}{4}p$:

$$p = \frac{h}{\frac{5}{4}} = \frac{20 \cdot 4}{5} = 16$$

$$c = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

$$x_0 = \frac{1}{4}p = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

$$\varphi = -c \cdot x_0 = -\frac{\pi}{8} \cdot 4 = -\frac{\pi}{2}$$

Fremdeles $d = 4A$, samme volum, samme ligning:

18 $\int_0^{20} \pi \left(A \sin\left(\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 A\right)^2 dA$

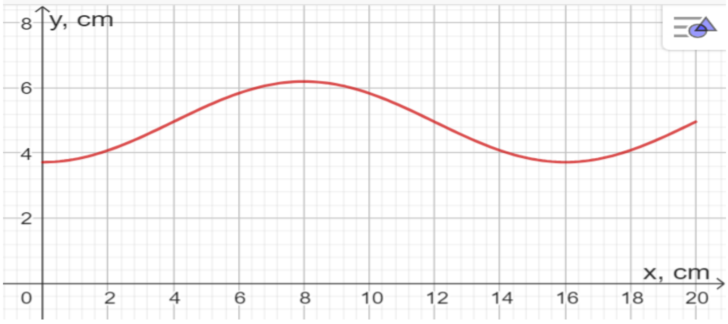
$\rightarrow$ $\mathbf{A^2 \, (330 \, \pi - 64)}$

19 Løs($18 = 1500)

$\approx$ $\{\mathbf{A = -1.2418, A = 1.2418}\}$

20 $f(x) := 1.24\sin\left(\frac{pi}{8} x - \frac{pi}{2}\right) + 4.96, 0 \leq x \leq 20$

$\rightarrow$ **f(x) := Dersom** $\left(0 \leq x \leq 20, \; \frac{31}{25} \sin\left(\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{124}{25}\right)$



Nei, litt for mye forskyvning, prøver med samme $p = 16$, men en forskyvning på $\frac{1}{8}p$:

$$x_0 = \frac{1}{8}p = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$$

$$\varphi = -c \cdot x_0 = -\frac{\pi}{8} \cdot 2 = -\frac{\pi}{4}$$

18 $\int_0^{20} \pi \left(A \sin\left(\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{4}\right) + 4 A\right)^2 dA$

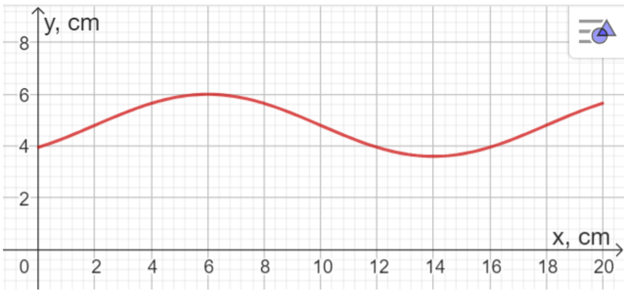
$\rightarrow$ $\mathbf{330 \, A^2 \, \pi - 4 \, A^2}$

19 Løs($18 = 1500)

$\approx$ $\{\mathbf{A = -1.20518, A = 1.20518}\}$

20 $f(x) := 1.2\sin\left(\frac{pi}{8} x - \frac{pi}{4}\right) + 4.8, 0 \leq x \leq 20$

$\rightarrow$ **f(x) := Dersom** $\left(0 \leq x \leq 20, \; \frac{6}{5} \sin\left(\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{24}{5}\right)$



Der ja! Det er formen på vasen. (litt smal kanskje, men jeg er fornøyd)

Så mitt svar er:

$$\underline{\underline{f(x) = 1{,}2 \sin\left(\frac{\pi}{8} x - \frac{\pi}{4}\right) + 4{,}8}}$$

(en litt uheldig blanding av desimaltall og eksaktverdier, men ellers greit).

Men det tok alt for lang tid, det hadde sikkert vært like bra om jeg bare tok det første svaret…

En annen tenkemåte er jo å måle på figuren; det kan se ut til at bredden på det bredeste kanskje er nærmere halvparten av høyden, altså 10 cm, mens min figur ble 12 cm bred, så det passer ganske bra.

Du kan vel også sette opp punkter og bruke regresjon og slikt… Bare pass på at volumet passer!

Hvis man er litt 1P kan man lage glidere for de fire størrelsene, sette opp integralet, og bare gli litt rundt til det er en passende form med riktig volum

Det er mange muligheter, ingen enkelt fasit. Men igjen: HUSK at høyden må være riktig, du må vise at volumet er riktig, du må vise formen tydelig på bildet, du må vise funksjonsuttrykket, helst ikke bare i et skjermbilde fra GeoGebra, og du må forklare og begrunne alle valgene dine.