Eksamen Matematikk R1 21.05.26 Del 1

Oppgave 1 (2p)

$$h'(x) = \left(3x^2 - 5 + \frac{3}{x-2}\right)' = 6x - 0 + \frac{-1 \cdot 3}{(x-2)^2} = \underline{\underline{6x - \frac{3}{(x-2)^2}}}$$

Oppgave 2 (5p)

a) $f(x) = e^x(6 - e^x)$

$f(x) = 0 \iff e^x \cdot (6 - e^x) = 0$ $\qquad e^x > 0 \quad \bigwedge\limits_{x \in \mathbb{R}}$

$f(x) = 0 \iff 6 - e^x = 0$

$e^x = 6$

$\ln e^x = \ln 6$

$x \ln e = \ln 6$

$\underline{\underline{x = \ln 6}}$

b) $f'(x) = \left(e^x \cdot (6 - e^x)\right)' =$

$$\begin{cases} u = e^x & v = (6 - e^x) \\ u' = e^x & v' = -e^x \\ (uv)' = u'v + u \cdot v' & \end{cases}$$

$= e^x \cdot (6 - e^x) + e^x \cdot (-e^x) =$

$= e^x(6 - e^x - e^x) = e^x \cdot (6 - 2e^x) = e^x(2 \cdot 3 - 2 \cdot e^x)$

$\underline{\underline{= 2 \cdot e^x (3 - e^x)}}$ Q.E.D.

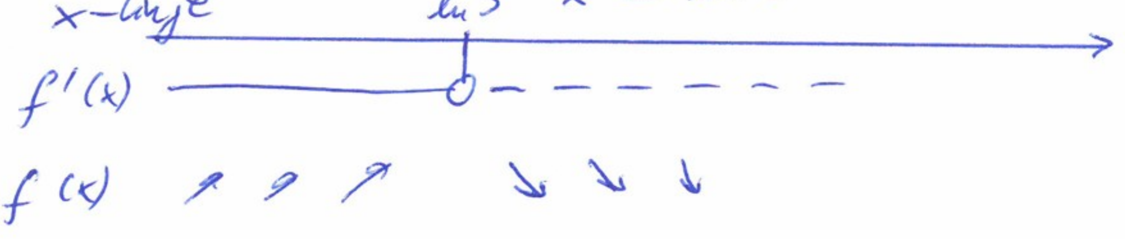
c) $f'(x) = 0 \iff 2 \cdot e^x \cdot (3 - e^x) = 0 \quad | : 2e^x$

$3 - e^x = 0$

$e^x = 3$

$\ln e^x = \ln 3$

$x = \ln 3$



f har toppunkt for $x = \ln 3$

$T = (\ln 3,\ f(\ln 3))$ $\qquad f(\ln 3) = e^{\ln 3}(6 - e^{\ln 3})$

$\qquad f(\ln 3) = 3(6-3) = 9$

$\underline{\underline{T = (\ln 3\ ,\ 9)}}$

Oppgave 3 (4p)

a)

$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

$e^{3\ln 1} = e^{3 \cdot 0} = e^0 = 1$

$\lg 1 < \lg 7 < \lg 10 \Rightarrow 0 < \lg 7 < 1$

$\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[4]{27}$

$\sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} < \sqrt[4]{27} < \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$

$2 < \sqrt[4]{27} < 3$

$2 < \sqrt[4]{3^3} < 3$

$\underline{\underline{\lg 7 < e^{3\ln 1} < \sqrt[4]{3^3} < \log_2 8}}$

b) $\lg(ab) - \lg\frac{a}{b} + \lg(100 b^3) =$

$= \lg a + \lg b - (\lg a - \lg b) + \lg 100 + \lg b^3 =$

$= \cancel{\lg a} + \lg b - \cancel{\lg a} + \lg b + \lg 10^2 + 3\lg b = \underline{\underline{5\lg b + 2}}$

$g(x) = e^{x-3}$ $\qquad D_g = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

$\qquad V_g = \langle 0, \rightarrow \rangle$

$$g(g^{-1}(x)) = e^{(\ln x + 3) - 3} = e^{\ln x + 3} : e^{3}$$

$$= \frac{e^{\ln x} \cdot \cancel{e^{3}}}{\cancel{e^{3}}} = e^{\ln x} = x$$

$$g^{-1}(g(x)) = \ln\left(e^{x-3}\right) + 3 = (x-3)\ln e + 3$$

$$= (x-3) \cdot 1 + 3 = x - 3 + 3 = x$$

$g^{-1}(x)$ $\qquad D_{g^{-1}} = \langle 0, \rightarrow \rangle$

$\qquad V_{g^{-1}} = \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

Vi ser at g og g^{-1} oppfyller definisjon av omvendte funksjoner og at $D_g = V_{g^{-1}} \wedge V_g = D_{g^{-1}}$.

Ergo er g og g^{-1} omvendte funksjoner.

Alternativ $\underline{II}$ $\quad g(x) = e^{x-3}$ jeg finner den omvendte funksjon ved regning

$g(x) = e^{x-3}$

$y = e^{x-3}$

$\ln y = \ln e^{x-3}$

$\ln y = (x-3) \cdot \ln e$

$\ln y = x - 3$

$x = \ln y - 3 \Rightarrow$ x bytter med y
y bytter med x

Oppgave 4 (2p)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{3x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0} = \underline{\underline{0}}$$

Alternativt: bruker L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{3x^2+3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+2)'}{(3x^2+3)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underset{\to\infty}{6x}} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 5 (3p)

a) $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-d}$, $a,b,c,d \in R$

Dersom $(x-d)$ er faktor i ax^2+bx+c, så vil vi forkorte teller og nevner med $(x-d)$ og da vil f ikke ha en vertikal asymptote.

M.a.o. Hvis $a\cdot d^2+b\cdot d+c=0$ så kunne vi skrive

ax^2+bx+c som $a\cdot(x-d)\cdot(x-x_1)$

$$f(x) = \frac{a\cdot\cancel{(x-d)}\cdot(x-x_1)}{\cancel{(x-d)}} = a\cdot(x-x_1)$$

Hvor x_1 vil være det andre nullpunktet til ax^2+bx+c.

Dersom $a\cdot d^2+b\cdot d+c \neq 0$ vil $x=d$ være vertikal asymptote til f.

b) $g(x) = e^{x-3}$ der $x\in R$ $D_g = R$

To funksjoner g og g^{-1} er omvendte av hverandre hvis

$g(g^{-1}(x)) = x$ for alle $x \in D_{g^{-1}}$

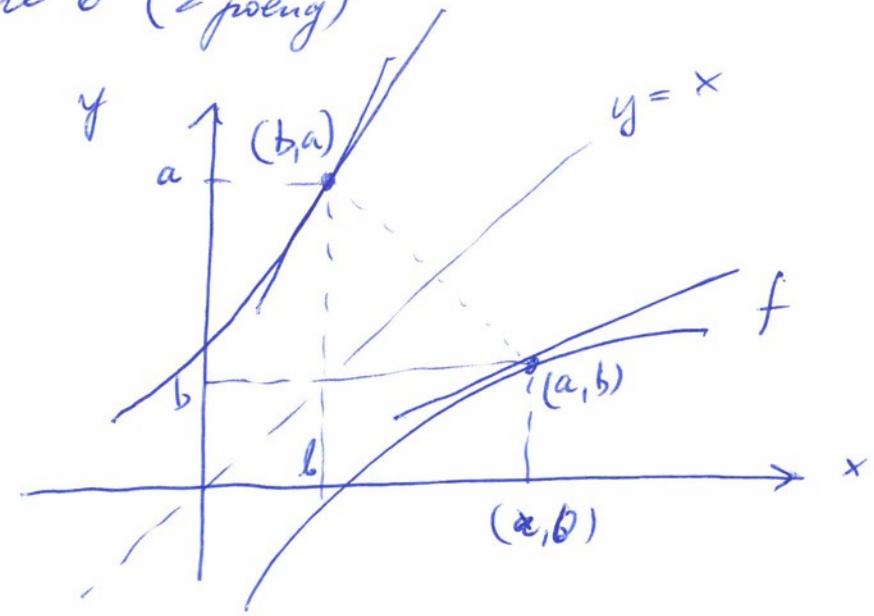
og $g^{-1}(g(x)) = x$ for alle $x \in D_g$

Den omvendte funksjonen til g blir

$$y = \ln x - 3$$
$$g^{-1}(x) = \ln x - 3$$

Svar: <u>Påstanden er sann</u>

Oppgave 6 (2 poeng)



I $g'(1)$ betyr at 1 er y koordinat når $f(x)=1$

dvs.
$$\ln(x+2) = 1$$
$$e^{\ln(x+2)} = e^1$$
$$x+2 = e$$
$$x = (e-2)$$

Når f er deriverbar funksjon gitt ved $f(x) = y$ som har g gitt ved $g(y) = x$ som sin omvendte funksjon. Da gjelder det at:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{for} \quad f'(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \left(\ln(x+2)\right)' = \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' = \frac{1}{x+2}$$
$$f'(e-2) = \frac{1}{e+2-2} = \frac{1}{e}$$

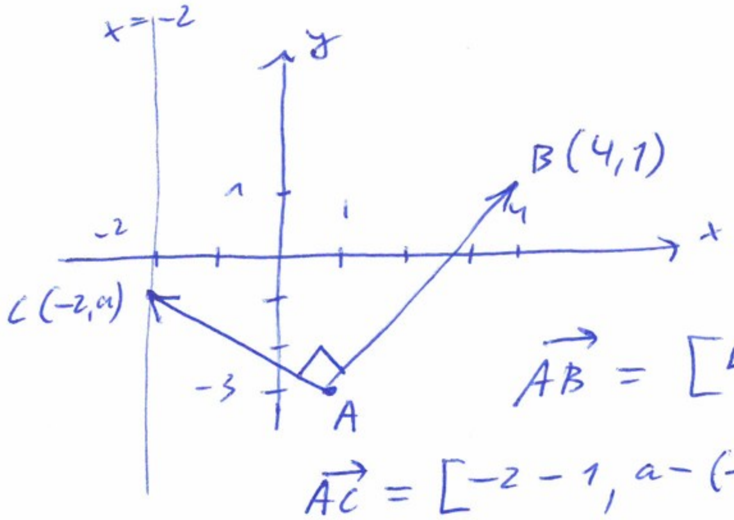
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{for } f'(x) \neq 0$$

$$g'(1) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

Oppgave 7 (4p)

$A(1,-3) \quad B(4,1) \quad C(-2,a) \quad , a \in \mathbb{R}$

a)



$$\vec{AB} = [4-1,\ 1-(-3)] = [3,4]$$

$$\vec{AC} = [-2-1,\ a-(-3)] = [-3,\ a+3]$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \iff \vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$$

$$[3,4] \circ [-3,\ a+3] = 0$$

$$3 \cdot (-3) + 4 \cdot (a+3) = 0$$

$$-9 + 4a + 12 = 0$$

$$4a = 9 - 12$$

$$4a = -3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

b) $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{AC}| = |\vec{AB}| \quad |[-3,\ a+3]| = 5$

$$\sqrt{(-3)^2 + (a+3)^2} = 5$$

$$9 + (a+3)^2 = 25$$

$a^2 + 6a + 9 + 9 = 25$

$a^2 + 6a - 7 = 0$

$a = 1 \quad b = 6 \quad c = (-7)$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2} = -3 \pm 4$$

$a_1 = -7 \quad \vee \quad a_2 = +1$

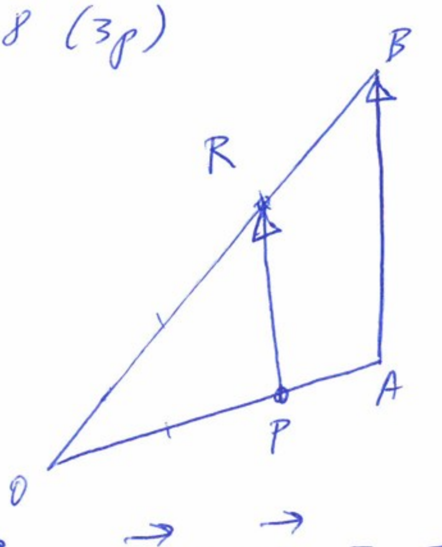
$\vec{AC} = [-3, a+3]$

$\vec{AC} = [-3, -7+3]$ eller $\vec{AC} = [-3, +1+3]$

$\vec{AC} = [-3, -4]$ eller $\vec{AC} = [-3, 4]$

$\underline{\underline{a = -7 \quad \vee \quad a = 1}}$

Oppgave 8 (3p)



$\vec{a} = \vec{OA}$

$\vec{b} = \vec{OB}$

$\vec{OP} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a}$

$\vec{OR} = \frac{2}{3} \cdot \vec{b}$

a) $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{PR} = \vec{PO} + \vec{OR} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

$\underline{\underline{\vec{PR} = \frac{2}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \qquad \vec{AB} = \vec{b} - a}}$

b) $\vec{AB} \parallel \vec{PR} \Leftrightarrow \vec{AB} = k \cdot \vec{PR}, \quad k \in \mathbb{R}$

$(\vec{b} - \vec{a}) = k \cdot \left(\frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})\right) \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

Det vil si at $\underline{\vec{AB} \parallel \vec{PR}}$

c) $|\vec{PR}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\vec{AB} = \frac{3}{2} \cdot \vec{PR}$$

$$|\vec{AB}| = \left|\frac{3}{2} \cdot \vec{PR}\right| = \frac{3}{2} \cdot |\vec{PR}| = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{|\vec{AB}| = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

Oppgave 9 (5p)

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{25}{9}x$

$$g(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{25}{9}x\right)'$$

Svar: <u>g(x) er den deriverte av f(x) i koden</u>

b) Koden prøver å klassifisere stasjonære punkter det vil si når $g(x) \approx 0$

For A skal stå vendepunkt fordi den deriverte ikke skifter fortegnet før og etter det punktet mens $g(x) \approx 0$. A er vendepunktet med horisontal tangent

For B skal stå for bunnpunkt fordi den deriverte skifter fortegn fra minus til pluss i det stasjonære punktet. Det vil si grafen vil først synke, så stige.

For C skal stå for toppunkt, fordi før dette punktet øker g (den deriverte), så synker det. Det betyr at først stiger grafen, så synker $\Rightarrow$ Toppunkt.

9c) Setningene står i linje 18, 21 eller 24 avhengig av punktet.

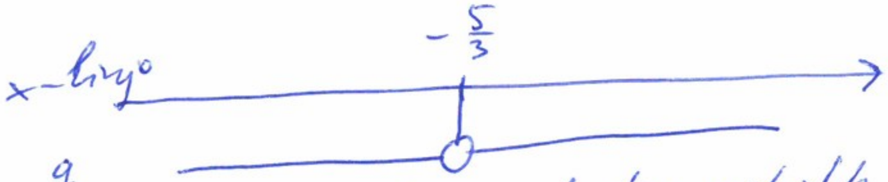
linje 18 (A)
linje 21 (B)
linje 24 (C)

$$g(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{25}{9}x\right)'$$

$$g(x) = x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = \left(x + \frac{5}{3}\right)^2$$

$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = 0 \iff \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \qquad x = -\frac{5}{3}$$



ingen fortegnsskifte for g

$\Rightarrow$ det vil si vendepunkt med horisontal tangent som blir skrevet ut

17) if g(x-dx) * g(x+dx) > 0:

Svar: Linje 18 blir skrevet ut, det vil si vendepunkt.