Del 1: uten hjelpemidler 3 timer
(9:00 – 12:00)

Oppgave 1

a)

$h(x) = 3x^2 - 5 + 3/(x - 2)$

$= 6x - 0 + \dfrac{(0 \cdot (x - 2) - 3 \cdot 1)}{(x - 2)^2}$

$= 6x - \dfrac{3}{(x - 2)^2}.$

Oppgave 2

a)

$f(x) = e^x \cdot (6 - e^x)$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cdot (6 - e^x) = 0$

$e^x \neq 0 \;=>\; 6 - e^x = 0$

$e^x = 6 \qquad | \, ln$

$x = ln(6)$

b)

$f'(x) = e^x \cdot (6 - e^x) + e^x \cdot (0 - e^x)$

$= e^x \cdot (6 - e^x) - (e^x)^2 = e^x \cdot (6 - e^x - e^x)$**b)**

$f'(x) = e^x \cdot (6 - e^x) + e^x \cdot (0 - e^x)$

$= e^x \cdot (6 - e^x) - (e^x)^2 = e^x \cdot (6 - e^x - e^x)$

$= e^x \cdot (6 - 2e^x) \qquad = e^x \cdot \big(2(3 - e^x)\big)$

$= e^x \cdot (6 - 2e^x) \qquad = e^x \cdot \big(2(3 - e^x)\big)$

$= 2e^x \cdot (3 - e^x)$

c)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x \cdot (3 - e^x) = 0$

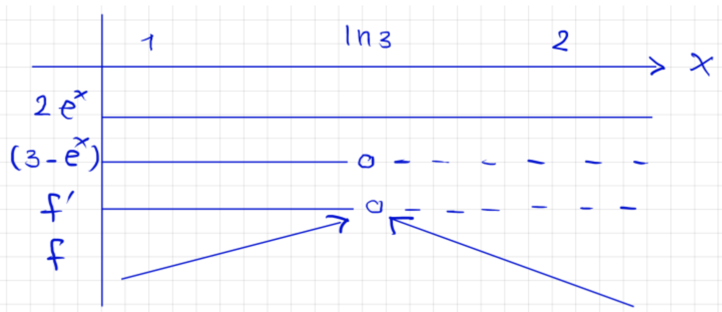
$2e^x \neq 0 \Rightarrow 3 - e^x = 0$

$e^x = 3 \quad | \, ln$

$x = ln(3)$

$f\big(ln(3)\big) = e^{ln(3)} \cdot \big(6 - e^{ln(3)}\big) = 3 \cdot (6 - 3) = 9$

Fortegnsskjema:



Ut fra fortegnskjema ser vi at ($ln(3)$,9) er et toppunkt siden den deriverte er null i dette punktet og grafen går fra å være voksende før til avtagende etter.

Oppgave 3

a)

$log_{2(8)}. = log_2(2^3) = 3 \cdot log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$

$2^3 = 8$

$e^{3 \cdot ln(1)} = e^{3 \cdot 0} = e^0 = 1$

$\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27} < 3$

fordi

$\sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[4]{81} = 3$

$lg(7) < lg(10) \Leftrightarrow lg(7) < 1$

Rekkefølge fra minst til størst:

$lg(7)$, $e^{3 \cdot ln(1)}$, $\sqrt[4]{3^3}$, $log_2(8)$

b)

$lg(ab) - lg(\frac{a}{b}) + lg(100b^3)$

$$= lg(a) + lg(b) - (\, lg(a) - lg(b)\,) + (lg(100) + lg(b^3))$$

$$= 2 \cdot lg(b) + 2 + 3 \cdot lg(b) = 5 \cdot lg(b) + 2$$

Oppgave 4

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{3x^2 + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x+2}{x^2}}{\frac{3x^2+3}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$$

eller L'Hôpital-regel

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{3x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x + 2)'}{(3x^2 + 3)'} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6x} = 0$$

Oppgave 5

a) Påstanden er usann

Begrunnelse / Resonnement:

For at funksjonen skal ha en vertikal asymptote i x = d, må nevneren være lik null, samtidig som telleren ikke er lik null for denne x-verdien. Hvis telleren også blir null for x = d, kan vi forkorte brøken, og vi får i stedet et "hull" i stedet for en asymptote.

Betingelsen for at påstanden skal være sann er at:

$$a \cdot d^2 + b \cdot d + c \neq 0$$

Dette kan vi for eksempel sikre ved å kreve at telleren ikke har noen reelle røtter i det hele tatt, ved at diskriminanten til andregradsuttrykket i telleren er negativ:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta < 0$$

Dersom vi velger verdier for a, b og c slik at x = d er en rot i telleren, vil påstanden være usann.

b) Påstand er sann. Vi kan finne omvend funksjon slik

$g(x) = e^{x-3} der\ x \in \ R$

Vi setter g(x) = y og løser ligningen med hensyn på x:

$y = e^{x-3} \qquad |\, ln$

$ln(y) = ln(e^{x-3})$

$ln(y) = (x - 3) \cdot ln(e)$

Siden ln(e) = 1, får vi:

$ln(y) = x - 3$

$x = ln(y) + 3$

Ved å bytte om variablene x og y får vi den omvendte funksjonen:

$g^{-1}(x) = ln(x) + 3$

Siden verdimengden til $g(x) = e^{x-3} \ \ er \ V_g = (0, \rightarrow)$, blir dette definisjonsmengden til den omvendte funksjonen: $D_{g^{-1}} = (0, \rightarrow)$

Oppgave 6

$f(x) = \ln(x + 2)$

Vi finner x verdien når $y = 1$
$1 = ln(x + 2)$

$e^1 = e^{ln(x+2)}$

$e = x + 2$

$x = e - 2$

Vi vet at

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 2}$$

$$f'(e - 2) = \frac{1}{e - 2 + 2} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(e-2)} \ \frac{1}{e^{-1}} = e$$

Oppgave 7

a)

$A(1,-3), B(4,1)\ og\ C(-2,a), der\ a\ \in\ R.$

Vinkel BAC er 90° dersom vektorene AB og AC er ortogonale.

$AB\ = [4\ -\ 1, 1\ -\ (-3)] = [3,\qquad 4]$

$AC\ = [-2\ -\ 1, a\ -\ (-3)] = [-3, a\ +\ 3]$

Siden vinkelen ABC mellom vektorene er 90˚ betyr det vektorene er ortogonale da må skalarprodukt være null

$AB\ \cdot\ AC\ =\ 3\cdot(-3)\ +\ 4\cdot(a\ +\ 3)\ =\ -9\ +\ 4a\ +\ 12\ =\ 4a\ +\ 3$

$4a\ +\ 3\ =\ 0 \Rightarrow a\ =\ -\frac{3}{4}$

b)

$|AB|\ =\ \sqrt{3^2 +\ 4^2}\ =\ \sqrt{9\ +\ 16}\ =\ 5$

$|AC| =\ \sqrt{(-3)^2 +\ (a\ +\ 3)^2}\ =\ \sqrt{9\ +\ (a\ +\ 3)^2}$

$|AB|\ =\ |AC|$

$5\ =\ \sqrt{9\ +\ (a\ +\ 3)^2}$

$25\ =\ 9\ +\ (a\ +\ 3)^2$

$(a\ +\ 3)^2 =\ 16$

$a\ +\ 3\ =\ \pm 4$

$a\ =\ 1\ eller\ a\ =\ -7$

Oppgave 8

a)

Vi kan gå fra A til B gjennom O

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{OB} = -\vec{\mathrm{a}} + \vec{b}$

Vi kan gå fra P til R gjennom O

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{OR} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OR}$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{OR}\right) = \frac{2}{3}\left(-\vec{\mathrm{a}} + \vec{b}\right) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

b)

Vi har $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ da må $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ være parallell med $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

c)

vi har

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Da blir det

$\overrightarrow{|\mathrm{PR}|} = |\frac{2}{3}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$

Siden begge vektorene har samme retning, da kan vi fjerne absoluttverditegnet

$\overrightarrow{|\mathrm{PR}|} = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \quad | \cdot (3/2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \frac{3}{2}\,|\overrightarrow{PR}| = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Oppgave 9

a)

Funksjonen g(x) er den deriverte av f(x). I koden (linje 4-6) brukes definisjonen av den deriverte med en svært liten verdi for h (h = 0.000001) for å tilnærme grenseverdien algebraisk:

$$g(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$g(x) = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b)

A: terrasepunkt
B: bunnpunkt
C: toppunkt

Koden undersøker stasjonære punkter (der g(x) ≈ 0) for funksjonen f (linje 15). De tre begrepene som skal stå i print-setningene bestemmes ut fra fortegnene til den deriverte rett før og rett etter punktet x:

• Linje 18 (A): $g(x - dx) * g(x + dx) > 0$
Dette betyr at g(x) har samme fortegn (enten positiv-positiv eller negativ-negativ) på begge sider av punktet. Dette definerer et terrasepunkt.

• Linje 21 (B): $g(x - dx) < g(x + dx)$ (der g(x-dx) < 0 og g(x+dx) > 0)
Når den deriverte går fra å være negativ (synkende graf) til positiv (stigende graf), har vi et bunnpunkt.
• Linje 24 (C): $g(x - dx) > g(x + dx)$ (der g(x-dx) > 0 og g(x+dx) < 0)
Når den deriverte går fra å være positiv (stigende graf) til negativ (synkende graf), har vi et toppunkt.

c)

Når programmet kjøres for funksjonen f(x) definert i linje 2, vil setningen i linje 18 skrives ut.

Begrunnelse:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{25}{9}x$$
$$f'(x) = x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9}$$

Setter $f'(x) = 0$ for å finne stasjonære punkter:

Bruker sum og produkt metode for å løse likningen

$$x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

$$f'(x) = x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 > 0$$

Siden den deriverte er null i x=-5/3 men ellers positivt må dette punktet være et terrasepunkt og derfor linje 18 i koden skal kjøres.

Merknad:

Om man bruker andrederiverttest for å sjekke om punket er topp eller bunnpunkt får vi et problem

$$f''(x) = 2x + \frac{10}{3}$$

$$f''\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{10}{3} = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} = 0$$

Andrederivert test gir ingen konklusjon om stasjonærpunktet.

Vi kan bruke den deriverte og teste med et punkt før og et punkt etter x=-5/3

$$f'(-3) = (-3)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)(-3) + \frac{25}{9} = 9 - 10 + \frac{25}{9} = \frac{16}{9} > 0$$

$$f'(0) = \frac{25}{9} > 0$$

Siden den deriverte ikke skifter tegn, er x = -5/3 et terrassepunkt.

Del 2: Med hjelpemidler 2 timer (12:00 – 14:00)

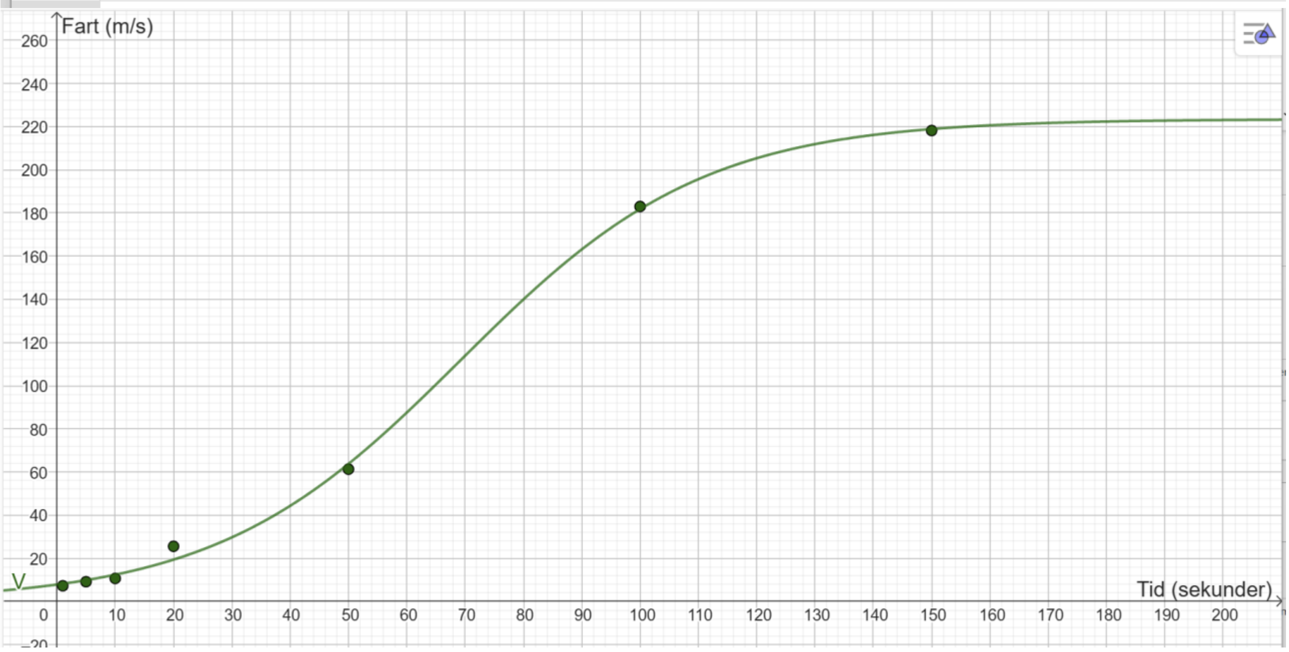
Oppgave 1

a) Vi bruker regresjon i GeoGebra

Jeg lager liste med punkter l så velger jeg logistisk regresjon .

$l = \{(1, 7.3), (5, 9.2), (10, 10.7), (20, 25.6), (50, 61.3), (100, 183), (150, 218.2)\}$

$$V(x) = \text{RegLogist}(l) = \frac{223.4774}{1 + 27.3272\, e^{-0.0478x}}$$

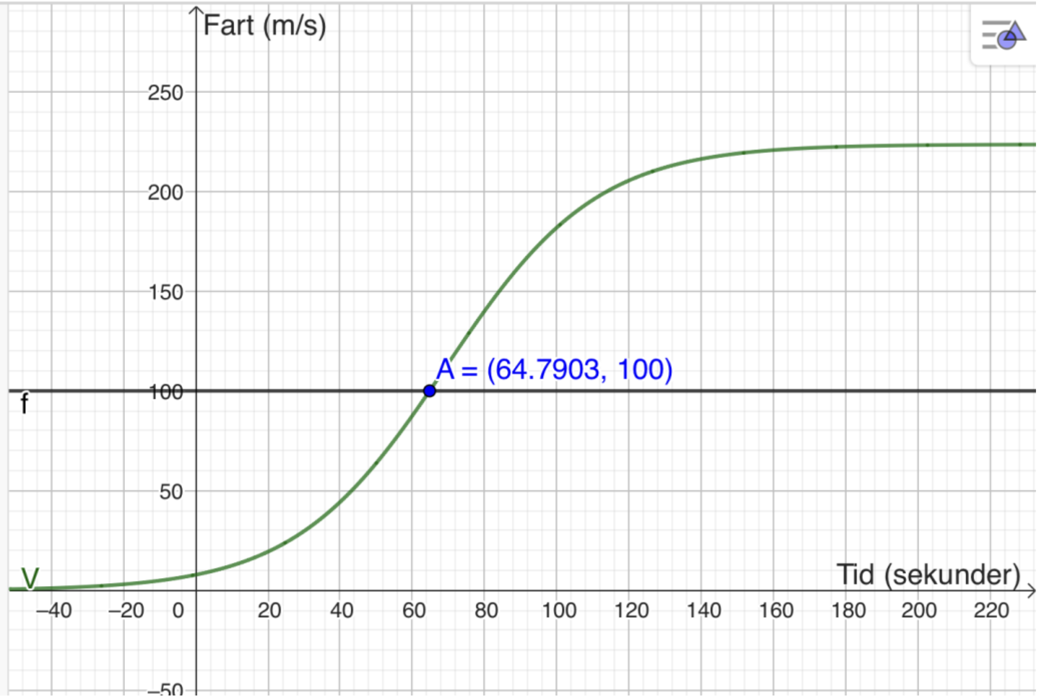


Merk at de aller fleste bruker regneark til å lage liste med punkter så bruker regresjonsanalyse verktøy, men av og til er det like enkelt å lage listen manuelt så skrive reg i algebrafelt og velge riktig regresjonsmodell fra listen som kommer opp.

b)

Vi tegner linjen y=100 og finner skjæring mellom den og grafen til V ved å bruke verktøyet Skjæring mellom to objekt f: y = 100

A = Skjæring(V, f, (64.7903, 100))
= (64.7903, 100)



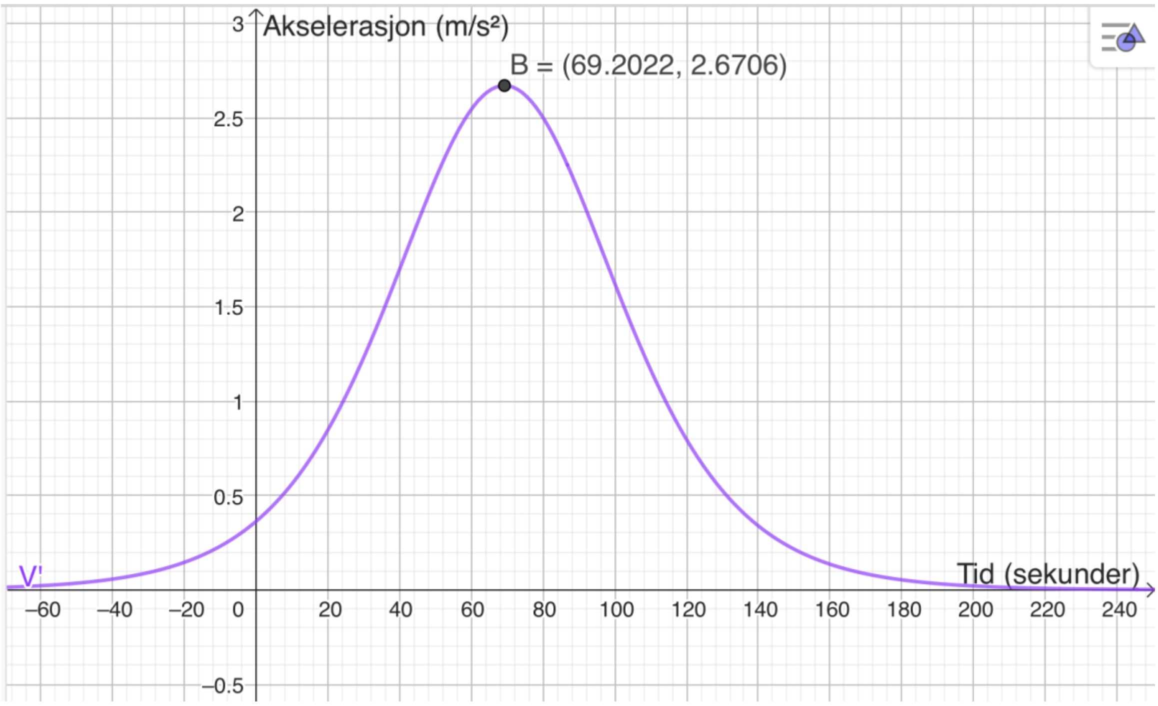
Det tar 64,8 sekunder for at farten til raketten skal bli 100m/s

c) Jeg bruker algebrafelt og graftegner til å finne svaret. Først skriver den deriverte så finner jeg toppunktet til den deriverte ved å bruke kommando *Ekstremalpunkt (funksjon, intervall)*

$V'(x) = V'(x)$

$$= \frac{7297926724380400425474515863246879109002233}{250000000000000000000000000000000000000000} \cdot \frac{e^{\frac{-239001318311433}{5000000000000000}x}}{\left(\frac{273272236430859}{10000000000000}\ e^{\frac{-239001318311433}{5000000000000000}x} + 1\right)^2}$$

B = Ekstremalpunkt(V′, 0, 150)
= (69.2022, 2.6706)



Fartsøkningen til raketten størst etter omtrent 69 sekunder etter den forlot utrykningsrampem og den er på 2,7 m/s^2 .

Man kan også bruke CAS, men jeg vil vise at man kan like greit bruke algebrafelt. Om du bruker CAS så er det ikke nødvendig å definere funksjonen i CAS på nytt. Algebra og CAS kan kommunisere

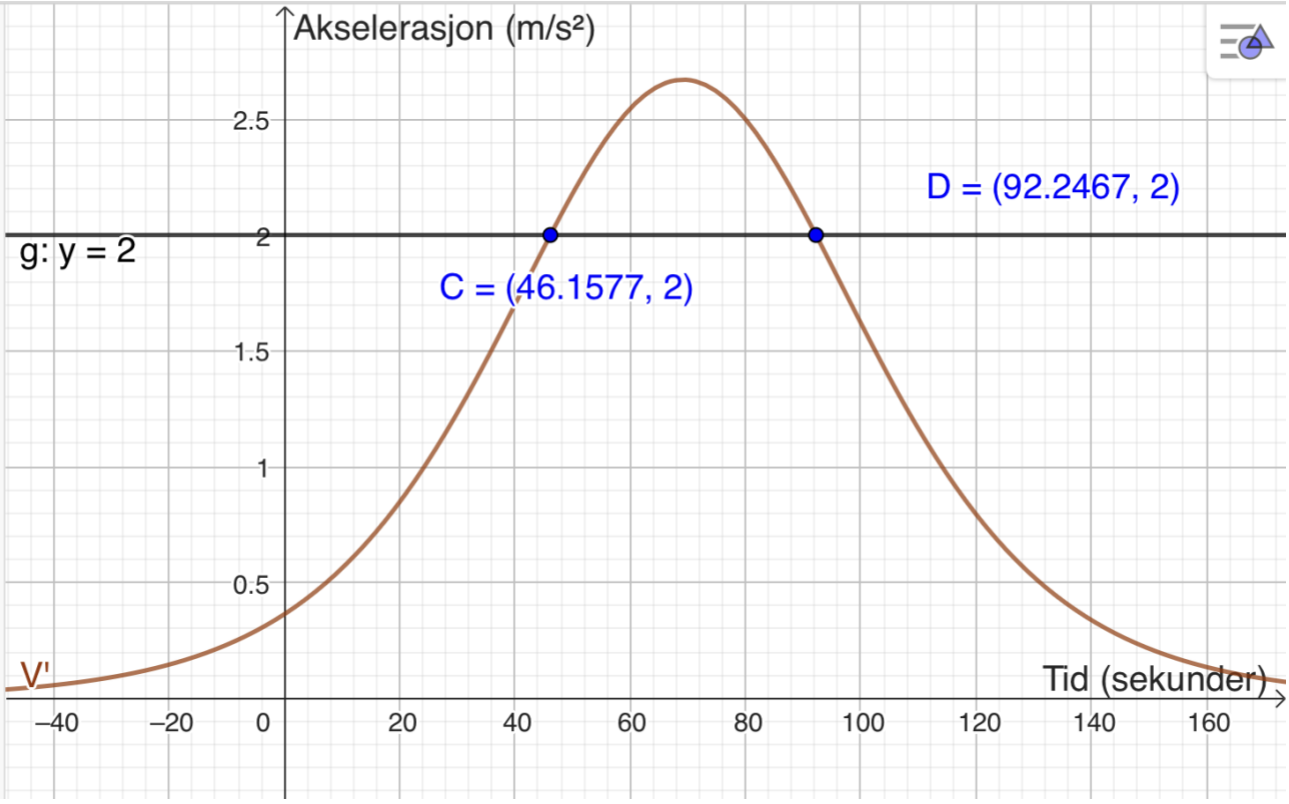
1	V $\rightarrow \dfrac{\frac{210178297}{940490}}{\frac{729169931}{26682913}\, e^{\frac{-367627}{7690899} x} + 1}$
2	$V(x) = 100, x = 1$ NLøs: $\{x = 64.7903\}$
3	$V'(64.8)$ $\approx$ **2.6412**

d) Vi kan bruke algebrafelt fortsatt. Jeg tegner linjen y=2 og finner skjæring mellom linjen og grafen til den derivere av V ved å bruke verktøyet *Skjæring mellom to objekt*

$g: y = 2$

$C = \text{Skjæring}(V', g, (46.1577,\ 2))$
$= (46.1577,\ 2)$

$D = \text{Skjæring}(V', g, (92.2467,\ 2))$
$= (92.2467,\ 2)$



Farten til raketten øker med mer enn 2 m/s^2 mellom 46,2 og 92,3 sekunder etter den forlot utskytningsrampen. Dette utgjør 92,3-46,2=46,1 sekunder.

Vi kan også bruke CAS om man vil

4 $V'(x) > 2$

Løs: $\left\{ x > -5000000000000000 \cdot \frac{\ln\left(\frac{-}{74677715203923300847087}\right.}{} \right.$

5 $4

$\approx \{46.1577 < x < 92.2467\}$

Oppgave 2

a) Vi løser oppgaven i CAS

1. $l(t) := \left(6t + 120, \frac{5}{3}t + 50\right)$
   $\approx$ $\mathbf{l(t) := (6t + 120,\ 1.667t + 50)}$
2. $l\left(\frac{1}{2} \cdot 60\right)$
   $\approx$ $\mathbf{(300,\ 100)}$
3. $\left|l'\left(\frac{1}{2}\right)\right|$
   $\approx$ $\mathbf{6.227}$

Vi skriver vektorfunksjonen til banen til skøyteløperen og finner posisjonen ved å skrive l(1/2) og får at skøyteløperen er i posisjonen (23,11,7)

Vi finner banefarten ved å ta lengden av farten når t=1/2 og får at skøyteløperen har fart på omtrent 21 m/s.

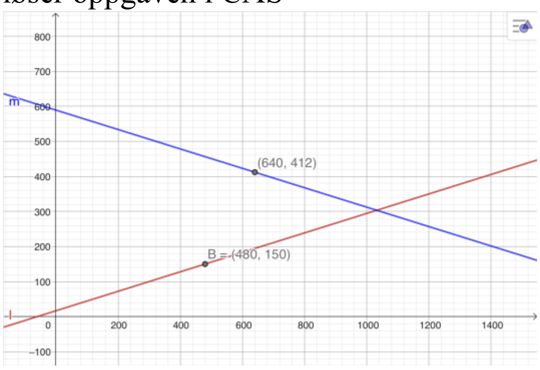
b) Vi definere banen til hunden via en vektorfunksjon m(t). For å sjekke om de kommer til å treffes, må finne ut om banene deres krysser og at de er i skjæringspunktet til samme tid.

I rad 5 og 6 bruker vi forskjellige navn på parametere og ser at de er i skjæringspunkt til forskjellige tider og derfor treffes ikke .

I rad 7 viser vi at det ikke finnes en tid der de er i samme posisjon, noe som betyr at de ikke treffes.

4. $m(t) := \left(\frac{13}{2}t + 250, -\frac{9}{5}t + 520\right)$
   $\approx$ $\mathbf{m(t) := (6.5t + 250,\ -1.8t + 520)}$
5. $l(t) = m(s)$
   Løs: $\left\{\left\{s = \frac{5206666666666580}{43266666666671}, t = \frac{6578000000000000}{43266666666671}\right\}\right\}$
6. $5
   $\approx$ $\{\{s = 120.339, t = 152.034\}\}$
7. $l(t) = m(t)$
   Løs: $\{\}$

c) Vi løser oppgaven i CAS



8. $A := m(1 \cdot 60)$
   $\rightarrow$ $A := (640,\ 412)$
9. $B := l(1 \cdot 60)$
   $\approx$ $B := (480,\ 150)$
10. $m(120.339)$
   $\approx$ $\mathbf{(1032.204,\ 303.39)}$
11. $S := |m(120.339) - l(60)|$
   $\approx$ $S := 573.112$
12. $fart := \frac{S}{120.339 - 60}$
   $\approx$ $\mathbf{fart := 9.498}$

Vi finner ut hvor er skøyteløperen og hunden eter et minutt.

Vi finner også ut koordinatene til skjæringspunktet mellom banene deres (rad 10).

Strekningen til skøyteløperen posisjonen hans etter et min og til skjæringspunktet er 573.112 m (rad 11).

Siden hunden er i skjæringspunktet etter 120.339 sekunder da har han 60 sek på seg til å være der.

Farten han må ha regnes ved å dele strekningen på tiden. Han må ha fart på 9,5m/s for å fange hunden

Oppgave 3

a) Vi løser oppgaven i CAS

Vi definerer funksjonen i CAS så bruker vi grafen til å utrykke begge lengdene med a

1. $f(x) := 100 \cdot 0.8^x$
   $\rightarrow \; f(x) := 100 \left(\frac{4}{5}\right)^x$
2. $AB := 5 - a$
   $\rightarrow \; AB := -a + 5$
3. $AD := 200 - f(a)$
   $\rightarrow \; AD := -100 \left(\frac{4}{5}\right)^a + 200$

b) Vi definerer arealet av rektangelet som en funksjon A(a) (rad 5).

Vi finner største areal ved å sette den deriverte lik null og løse likningen (rad 6).

Vi bekrefter at a=0,171 er et toppunkt ved å bruke andrederiverttest (rad 7).

Vi finner største areal ved å taste inn

A (0,171) og får at største areal er på 501

5. $A(a) := AB\ AD$
   $\rightarrow \; A(a) := (-a + 5) \left(-100 \left(\frac{4}{5}\right)^a + 200\right)$
6. $A'(a) = 0$
   NLøs: $\{a = 0.171\}$
7. $A''(0.171) < 0$
   $\approx$ **true**
8. $A(0.171)$
   ≈ 500.979

Oppgave 4

a) Funksjonen må ha delt forskrift fordi regelen for strømpris endrer seg ved x=75:

- under 75 øre: ingen støtte
- over 75 øre: staten dekker 90 % av overskytende

Funksjonen er kontinuerlig for at det ikke skal skjer noe hopp i prisen ved x=75.

b) For spotpris opp til 75 øre/kWh får man ingen støtte, så husholdningen betaler hele spotprisen:

$$f(x) = x \quad for \;\; x \leq \; 75$$

Når spotprisen er over 75 øre/kWh, dekker staten 90 % av det som overstiger 75 øre/kWh.

Da blir støtten: 0,9(x-75)

Husholdningen betaler derfor 75 pluss 10% av den delen som overstiger 75 og delen som overstiger 75 matematisk er gitt ved x-75.

$$f(x) = 75 + 0{,}1(x - 75) \;\; for \;\; x > 75.$$

$$f(x) = 75 + 0{,}1(x - 75) = 75 + 0{,}1x - 0{,}1 \cdot 75 = 0{,}1x + 67.5$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \; 75 \\ 0{,}1x + 67{,}5\,, & x > 75 \end{cases}$$

Oppgave 5

Vi taster inn funksjonen f(x) i CAS i GeoGebra. Deretter definerer vi en generell funksjon for tangenten, g(x). Siden tangenten skal gå gjennom origo, må den være på formen $g(x) = a \cdot x$. Vi setter $a = f'(x)$ siden den deriverte gir stigningstallet til tangenten (rad 2).

Vi vet at tangeringspunktet (k, f(k)) er et felles punkt for både grafen og tangenten. Derfor kan vi sette opp ligningen $f(k) = g(k)$, som vi løser for k i CAS (rad 3).

Dette gir $k = \frac{1}{2}$. For å finne y-koordinaten til tangeringspunktet, regner vi ut $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i CAS og får e. Tangeringspunktet blir da $\left(\frac{1}{2}, e\right)$

Til slutt bekrefter vi svaret vårt grafisk i GeoGebra ved å bruke kommandoen $Tangent\left(\frac{1}{2}, f\right)$.