Utdanningsdirektoratet

Eksamen

29.05.2013

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv. • Hippokrates (Utdanningsdirektoratet) • Alle grafar og figurar (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (2 poeng)

Formlane for arealet A av ein sirkel og volumet V av ei kule med radius r er gitt ved

$$A(r) = \pi r^2 \text{ og } V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Bestem $A'(r)$ og $V'(r)$.

Oppgåve 2 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $g(x) = 3\ln(x^2 - 1)$

b) $h(x) = \dfrac{2x^2}{e^x}$

Oppgåve 3 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

a) Vis at $P(1) = 0$

b) Bruk mellom anna polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i førstegradsfaktorar.

c) Løys ulikskapen $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

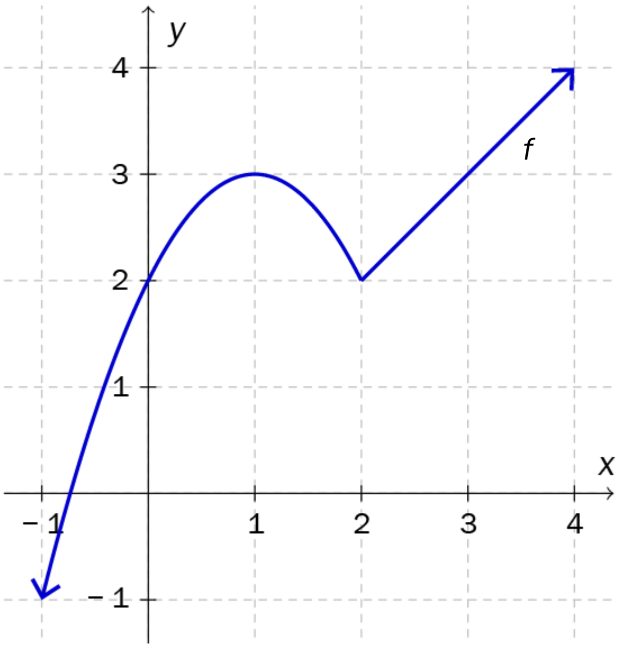
Oppgåve 4 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

$$\ln(a^2 \cdot b) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

Oppgåve 5 (2 poeng)

Figuren nedanfor viser grafen til ein funksjon f der $D_f = \langle -1, 4 \rangle$



Avgjer for kva x-verdiar f er kontinuerleg, og for kva x-verdiar f er deriverbar.

Oppgåve 6 (3 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$$

Vis at grafen til f har ein vendetangent i punktet $(-2, f(-2))$ med likning $y = -12x - 10$

Oppgåve 7 (3 poeng)

Vektorane $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-6, 4]$ og $\vec{c} = [3, 11]$ er gitt.

a) Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Bestem ved rekning to tal k og t slik at $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$

Oppgåve 8 (4 poeng)

Hippokrates frå Khios (ca. 470–410 f.Kr.) var truleg den første greske matematikaren som skreiv ei lærebok i geometri, 100 år før Euklid.

Grekarane forsøkte å konstruere eit kvadrat som hadde like stort areal som ein sirkel (*kvadraturen til sirkelen*).

Hippokrates-månen (i blå farge nedanfor) var ein del av dette forsøket.

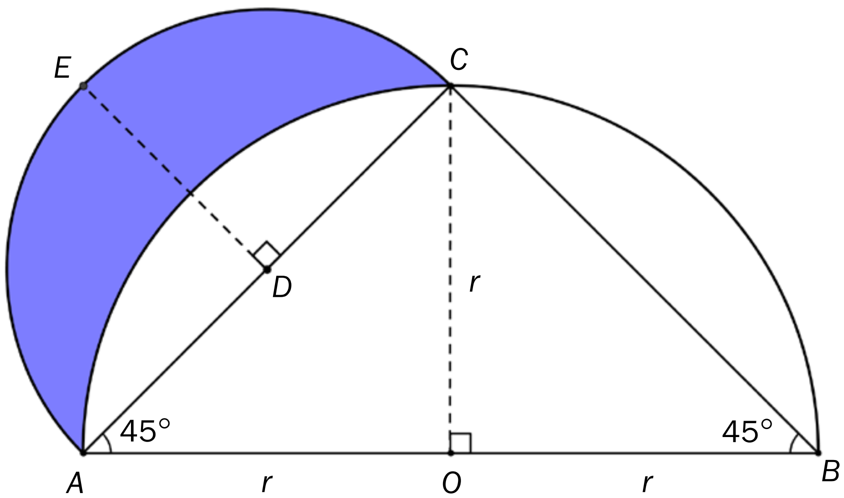
Kjelde: Proclus, *Kommentar til Euklid I*

På figuren nedanfor er *ACB* ein halvsirkel med sentrum i *O*, og *AEC* er ein halvsirkel med sentrum i *D*. $\angle CAB = \angle ABC = 45°$

a) Konstruer figuren nedanfor når du set $r = 5{,}0\text{ cm}$. Ta med konstruksjonsforklaring.

b) På figuren nedanfor har Hippokrates-månen blå farge.

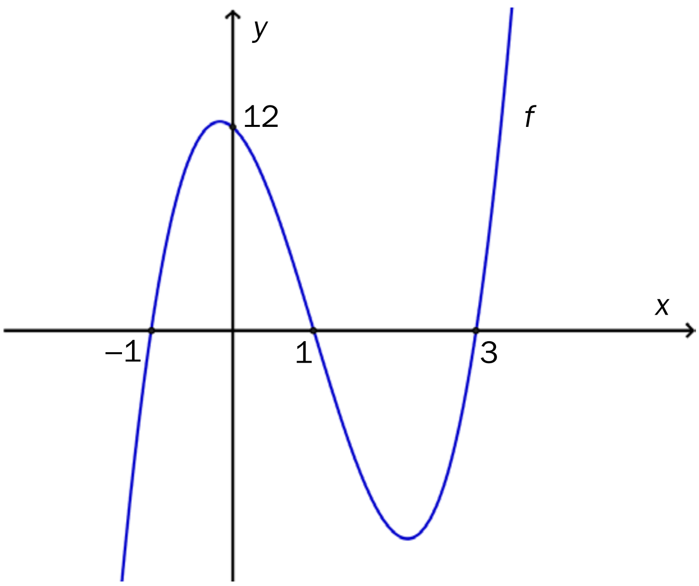
Vis ved rekning at arealet av *Hippokrates-månen* er lik arealet av $\triangle AOC$ når radien i halvsirkelen ACB er r.



DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (7 poeng)

Figuren nedanfor viser grafen til ein tredjegradsfunksjon f.



a) Forklar at $f(x)$ er deleleg med $(x-1)$, $(x+1)$ og $(x-3)$.

Grunngi at vi da kan skrive

$$f(x) = a(x^2 - 1)(x - 3) \quad , \text{ der } a \text{ er ein konstant.}$$

Bestem a når punktet $(0, 12)$ ligg på grafen til f.

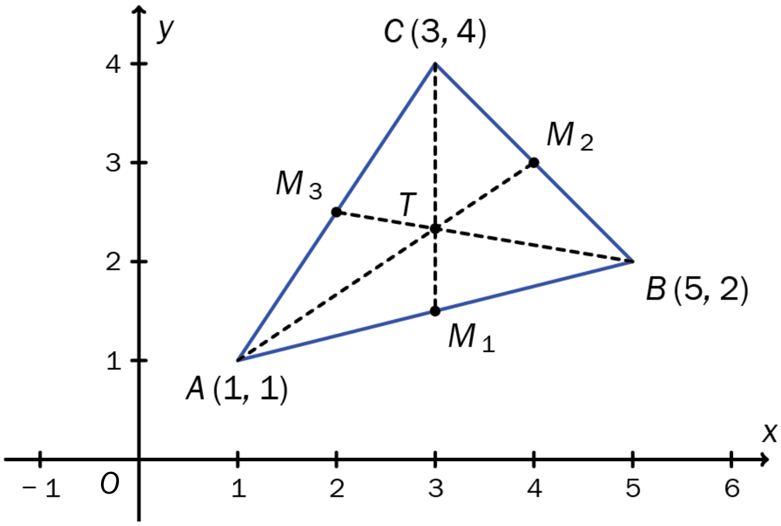
b) Bestem likninga til tangenten i punktet $(0, 12)$.

c) Denne tangenten skjer grafen til f i eit anna punkt.

Bestem ved rekning koordinatane til dette punktet.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Sjå skissa nedanfor.



a) Midtpunkta på sidekantane i $\triangle ABC$ er M_1, M_2 og M_3.

Vis ved rekning at M_1 har koordinatane $\left(3, \frac{3}{2}\right)$. Bestem koordinatane til M_2 og M_3 ved rekning.

b) Bestem ei parameterframstilling til linja gjennom A og M_2 og ei parameterframstilling til linja gjennom C og M_1.

c) Tyngdepunktet T i trekanten er skjeringspunktet mellom medianane.
Bestem koordinatane til T.

Oppgåve 3 (7 poeng)

Ein partikkel har posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[\ln t,\, t^2 - 4t\right], \qquad t > 0$$

a) Teikn grafen til $\vec{r}$ og bestem skjeringspunkta med koordinataksane ved rekning.

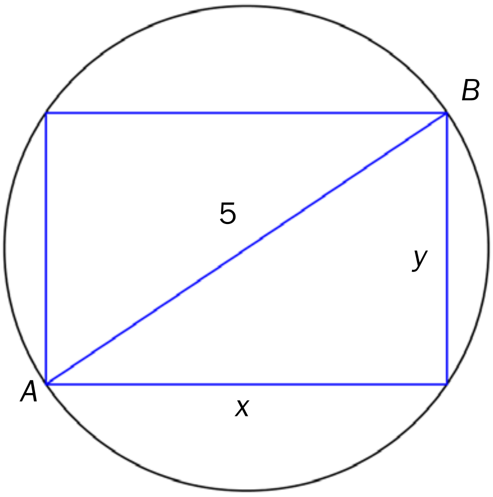
b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til $\vec{r}$. Teikn inn $\vec{v}(1)$ på grafen.

c) Vis at akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \left[-\frac{1}{t^2},\, 2\right]$. Bestem $\vec{a}(t)$ når $t \to \infty$.

Kommenter svaret.

Oppgåve 4 (8 poeng)

Eit rektangel med sider x og y er skrivne inn i ein sirkel med diameter $AB = 5$.



a) Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar kva verdiar x kan ha.

b) Bestem x og y når arealet er størst mogleg.
Kommenter svaret.

c) Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mogleg.
Kommenter svaret.

Oppgåve 5 (6 poeng)

Vi har raude og svarte kuler i ei eske. Vi skal trekkje tilfeldig to kuler utan tilbakelegging. Vi definerer desse hendingane:

A: Vi trekkjer to kuler med ulik farge.

B: Vi trekkjer to kuler med same farge.

Tenk deg at vi har 6 raude og 4 svarte kuler i eska.

a) Bestem $P(A)$

b) Bestem $P(B)$

Tenk deg at vi har 6 raude og eit ukjent tal svarte kuler i eska, og at hendingane A og B skal ha likt sannsyn.

c) Kor mange svarte kuler kan det vere i eska?

Oppgåve 6 (2 poeng)

Løys likninga

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv. • Hippokrates (Utdanningsdirektoratet) • Alle grafer og figurer (Utdanningsdirektoratet)

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Formlene for arealet A av en sirkel og volumet V av en kule med radius r er gitt ved

$$A(r) = \pi r^2 \text{ og } V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Bestem $A'(r)$ og $V'(r)$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $g(x) = 3\ln(x^2 - 1)$

b) $h(x) = \dfrac{2x^2}{e^x}$

Oppgave 3 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

a) Vis at $P(1) = 0$

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

c) Løs ulikheten $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

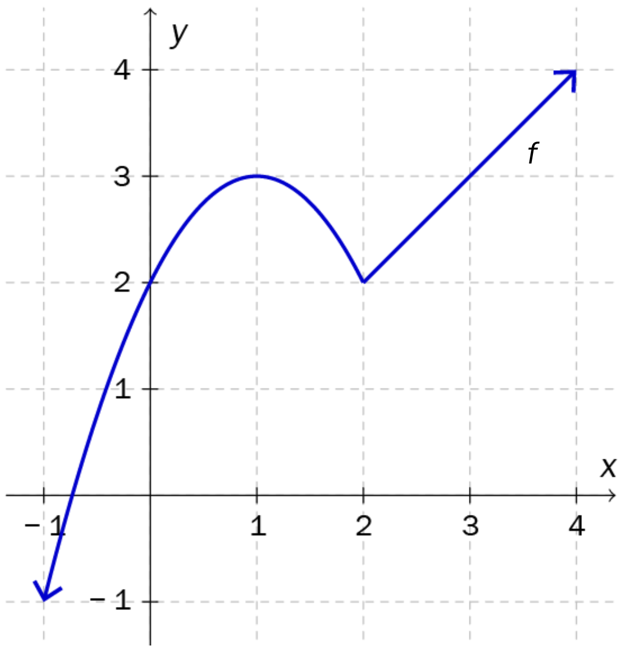
Oppgave 4 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\ln(a^2 \cdot b) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon f der $D_f = \langle -1, 4 \rangle$



Avgjør for hvilke *x*-verdier f er kontinuerlig, og for hvilke *x*-verdier f er deriverbar.

Oppgave 6 (3 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 2$$

Vis at grafen til f har en vendetangent i punktet $(-2, f(-2))$ med likning $y = -12x - 10$

Oppgave 7 (3 poeng)

Vektorene $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-6, 4]$ og $\vec{c} = [3, 11]$ er gitt.

a) Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Bestem ved regning to tall k og t slik at $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b}$

Oppgave 8 (4 poeng)

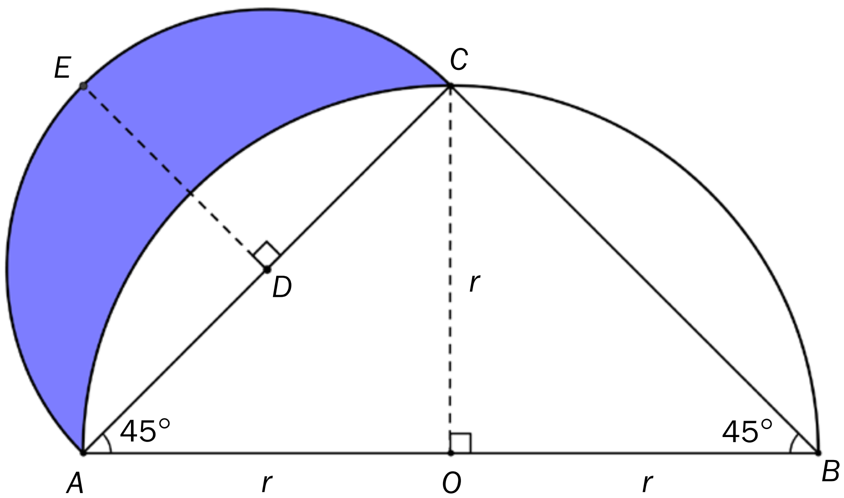
> Hippokrates fra Khios (ca. 470–410 f.Kr.) var trolig den første greske matematikeren som skrev en lærebok i geometri, 100 år før Euklid.
>
> Grekerne forsøkte å konstruere et kvadrat som hadde like stort areal som en sirkel (*sirkelens kvadratur*).
>
> *Hippokrates-månen* (i blå farge nedenfor) var en del av dette forsøket.
>
> Kilde: Proclus, *Kommentar til Euklid I*

På figuren nedenfor er *ACB* en halvsirkel med sentrum i *O*, og *AEC* er en halvsirkel med sentrum i *D*. $\angle CAB = \angle ABC = 45°$

a) Konstruer figuren nedenfor når du setter $r = 5{,}0$ cm. Ta med konstruksjonsforklaring.

b) På figuren nedenfor har Hippokrates-månen blå farge.

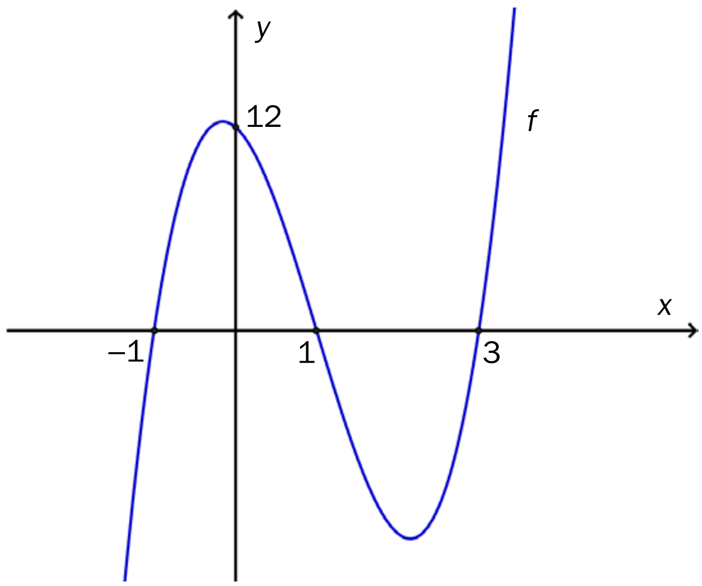
Vis ved regning at arealet av *Hippokrates-månen* er lik arealet av $\triangle AOC$ når radien i halvsirkelen ACB er r.



DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

Figuren nedenfor viser grafen til en tredjegradsfunksjon f.



a) Forklar at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$, $(x+1)$ og $(x-3)$.

Begrunn at vi da kan skrive

$$f(x) = a(x^2 - 1)(x-3) \quad , \text{ der } a \text{ er en konstant.}$$

Bestem a når punktet $(0, 12)$ ligger på grafen til f.

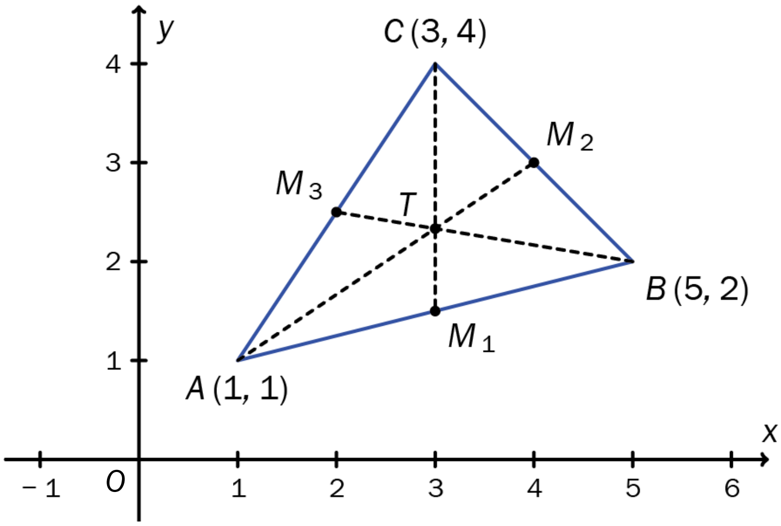
b) Bestem likningen til tangenten i punktet $(0, 12)$.

c) Denne tangenten skjærer grafen til f i et annet punkt.

Bestem ved regning koordinatene til dette punktet.

Oppgave 2 (6 poeng)

Se skissen nedenfor.



a) Midtpunktene på sidekantene i $\triangle ABC$ er M_1, M_2 og M_3.

Vis ved regning at M_1 har koordinatene $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$. Bestem koordinatene til M_2 og M_3 ved regning.

b) Bestem en parameterframstilling til linjen gjennom A og M_2 og en parameterframstilling til linjen gjennom C og M_1.

c) Tyngdepunktet T i trekanten er skjæringspunktet mellom medianene.
Bestem koordinatene til T.

Oppgave 3 (7 poeng)

En partikkel har posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[\ln t,\, t^2 - 4t\right], \qquad t > 0$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ og bestem skjæringspunktene med koordinataksene ved regning.

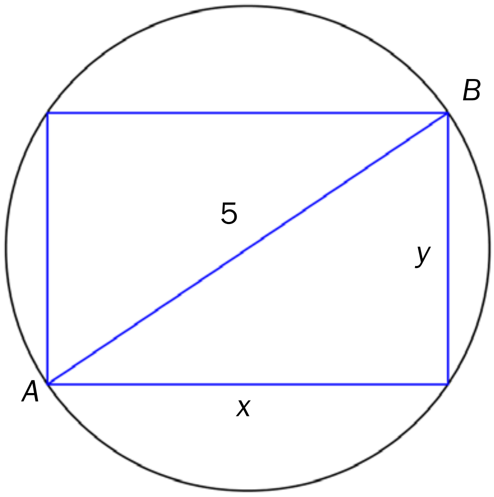
b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $\vec{r}$. Tegn inn $\vec{v}(1)$ på grafen.

c) Vis at akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = \left[-\dfrac{1}{t^2},\, 2\right]$. Bestem $\vec{a}(t)$ når $t \to \infty$.

Kommenter svaret.

Oppgave 4 (8 poeng)

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



a) Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

b) Bestem x og y når arealet er størst mulig.
Kommenter svaret.

c) Vis at omkretsen til rektangelet er gitt ved

$$O(x) = 2 \cdot \sqrt{25 - x^2} + 2x$$

Bruk $O'(x)$ og bestem x når omkretsen er størst mulig.
Kommenter svaret.

Oppgave 5 (6 poeng)

Vi har røde og svarte kuler i en eske. Vi skal trekke tilfeldig to kuler uten tilbakelegging. Vi definerer følgende hendelser:

A: Vi trekker to kuler med ulik farge.

B: Vi trekker to kuler med samme farge.

Anta at vi har 6 røde og 4 svarte kuler i esken.

a) Bestem $P(A)$

b) Bestem $P(B)$

Anta at vi har 6 røde og et ukjent antall svarte kuler i esken, og at hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet.

c) Hvor mange svarte kuler kan det være i esken?

Oppgave 6 (2 poeng)

Løs likningen

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet