Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x)=x^3+2x^2-3x$

b) $g(x)=\ln(x-2)$

c) $h(x)=(2x^2-1)^3$

Oppgave 2 (5 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$$

a) Vis at $(x-2)$ er en faktor i $P(x)$.

b) Bruk blant annet polynomdivisjon til å faktorisere $P(x)$ med lineære faktorer.

c) Bestem $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x-2}$

Oppgave 3 (3 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{3x}{x^2-4}$$

Oppgave 4 (2 poeng)

En sirkel er gitt ved likningen

$$x^2-2x+y^2+4y-20=0$$

Bestem sentrum S og radius r i sirkelen.

Oppgave 5 (5 poeng)

Vektoren $\vec{v} = [3, 4]$ er gitt.

a) Bestem en vektor $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$ og motsatt rettet.

b) Bestem en vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ som står vinkelrett på $\vec{v}$.

c) Bestem konstantene k og t slik at

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{w}$$

d) Bestem en vektor $\vec{x}$ som har samme retning som $\vec{v}$ og som har lengde lik 7.

Oppgave 6 (4 poeng)

Binomialkoeffisientene er gitt ved $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

a) Bestem $\binom{12}{2}$. Vis at $\binom{n}{1} = n$.

b) Bruk det du fant i oppgave a) til å løse likningen $\dfrac{\binom{x}{1} \cdot \binom{12-x}{1}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{6}{11}$

Oppgave 7 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x \cdot e^{-x} \quad , \quad x \in \langle -1 , 4 \rangle$$

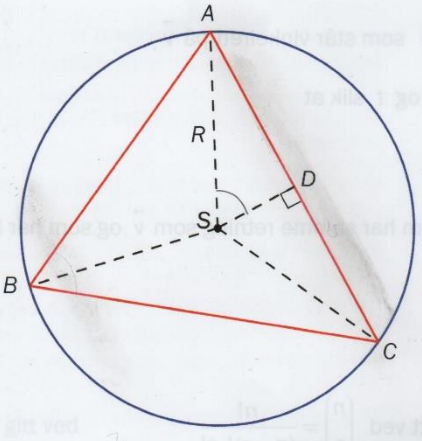
a) Bruk $f'(x)$ til å avgjøre hvor $f(x)$ vokser og hvor $f(x)$ avtar. Bestem x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter.

b) Bruk $f''(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (6 poeng)

En vilkårlig $\triangle ABC$ er gitt. En sirkel har radius R og sentrum i S og omskriver $\triangle ABC$.
En normal fra S til siden AC har fotpunkt D. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at $\angle B = \angle DSA$.

Vi setter $AC = b$.

b) Vis at $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

Vi setter $BC = a$ og $AB = c$.

c) Bruk tilsvarende resonnement som i oppgave b) til å vise at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Løs likningen

$$9^x - 3^x - 12 = 0$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

En sirkel har følgende egenskaper:

- Sentrum i sirkelen ligger på linjen $y = x$
- Sentrum i sirkelen ligger like langt fra origo som fra punktet $A(6, 0)$
- Origo og punktet A ligger begge på sirkelperiferien

a) Tegn sirkelen i et koordinatsystem.

b) Bestem en likning for sirkelen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Bilene i en bilkø holder en fart på v km/h. Ifølge køteori vil antall biler N som passerer et bestemt sted per minutt være gitt ved modellen

$$N(v) = \frac{16{,}7v}{4 + 0{,}25v + 0{,}006v^2}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til N for $v \in [0, 120]$.

b) Bestem grafisk hva farten bør være for at minst 25 biler skal kunne passere stedet per minutt.

c) Bestem grafisk hva farten må være for at flest mulig biler skal kunne passere stedet per minutt. Hvor mange biler passerer stedet per minutt da?

Oppgave 3 (6 poeng)

Posisjonen til to båter A og B er gitt ved

$$\vec{r_A}(t) = [18t - 8\ ,\ 10 - 3t]$$

$$\vec{r_B}(t) = [10t\ ,\ 20 - 6t]$$

Alle lengdemål er gitt i kilometer, og tiden t er gitt i timer.

a) Bestem farten (banefarten) til hver av båtene.

b) Forklar at avstanden d mellom båtene er gitt ved

$$d(t) = \sqrt{(8t-8)^2 + (3t-10)^2}$$

c) Når er denne avstanden minst? Hvor langt fra hverandre er båtene da?

Oppgave 4 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1\ ,\quad D_f = \mathbb{R}$$

Om denne funksjonen vet vi at

- f har nullpunkt i $x = 1$
- $x = 2$ er x-koordinaten til vendepunktet på grafen til f
- Grafen til f går gjennom punktet $(3, 4)$

a) Sett opp tre likninger som svarer til opplysningene ovenfor.

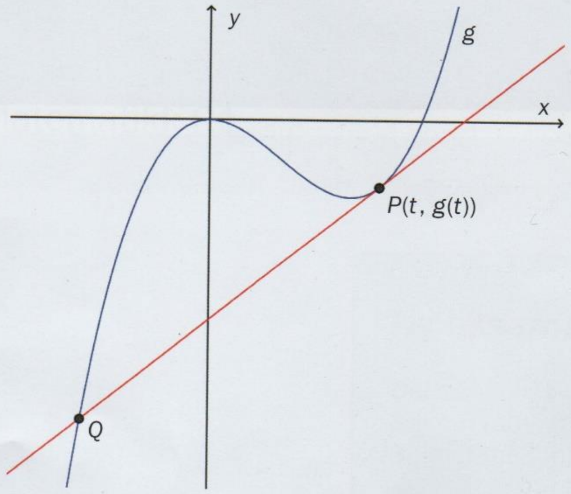
b) Bruk CAS til å bestemme konstantene a, b og c.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t\ ,\ g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a) Vis at tangenten har likningen

$$y = (3at^2 - 2t)x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.