Eksamen 1T vår 2015

Del 1, ingen hjelpemidler, 3 timer

Oppgave 1

$$\frac{7{,}5 \cdot 10^{15}}{0{,}003} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{7{,}5}{3} \cdot 10^{15-(-3)} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{18}}}$$

(Strengt tatt skal det rundes av til $3 \cdot 10^{18}$ siden 0,003 bare har ett gjeldende siffer, men det er jo en teoretisk oppgave så det går sikkert bra).

Oppgave 2

Velger addisjonsmetoden:

$$\begin{bmatrix} x + 6y = 1 \\ 2x + 4y = -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} | \\ | \cdot -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 6y = 1 \\ -x - 2y = 3 \end{bmatrix}$$

Legger sammen de to ligningene:

$$4y = 4$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$

$$x = 1 - 6y$$

$$\underline{\underline{x = -5}}$$

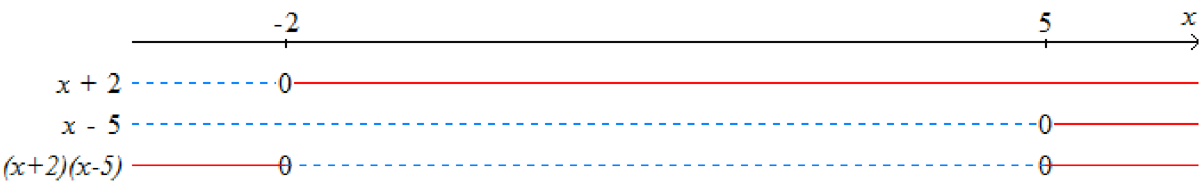
Svar: Løsningen på ligninga er $x = -5$ og $y = 1$.

Oppgave 3

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

Løser med abc-formelen eller ser at $2 - 5 = -3$ og $2 \cdot (-5) = -10$, og faktoriserer:

$$(x + 2)(x - 5) > 0$$



De ytre intervallene er de positive, så ulikheten er oppfylt for $x \in \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle$

Oppgave 4

a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 8^0 \cdot 2^{-1} \cdot \sqrt[4]{16} = (2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{2^4} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{4}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{2}}$

b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{18 \cdot 2} + \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{36} + \sqrt{9} = 6 + 3 = \underline{\underline{9}}$

Oppgave 5

$$\lg(x^2 - 0{,}9) = -1$$

$$10^{\lg(x^2 - 0{,}9)} = 10^{-1}$$

$$x^2 - 0{,}9 = \frac{1}{10}$$

$$x^2 = 0{,}1 + 0{,}9$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

(Begge løsningene er mulige siden de gir positive verdier inne i lg i det originale uttrykket).

Oppgave 6

$x^2 + bx + 16 = x^2 + bx + 4^2$ ELLER $x^2 + bx + 16 = x^2 + bx + (-4)^2$

For at uttrykket skal kunne skrives som et fullstendig kvadrat må det mellomste leddet være $2 \cdot x \cdot 4 = 8x$, eller $2 \cdot x \cdot (-4) = -8x$ altså må $\underline{\underline{b = \pm 8}}$.

Oppgave 7

$$2x(x-2) - (x-2)(2x+1) = 2x^2 - 4x - (2x^2 + x - 4x - 2) = \underline{\underline{2 - x}}$$

Oppgave 8

$$\frac{x^2 - 12x + 36}{2x^2 - 72} = \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2}{2(x^2 - 6^2)} = \frac{(x-6)^2}{2(x+6)(x-6)} = \underline{\underline{\frac{x-6}{2(x+6)}}}$$

Oppgave 9

Har $x_1 = -1$ og $y_1 = 2$ og $x_2 = 3$ og $y_2 = 4$.

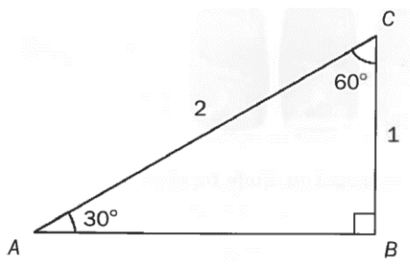
Finner stigningstallet, $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

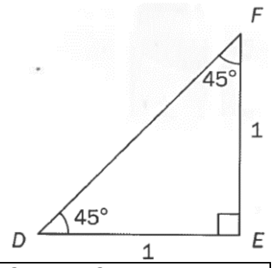
Bruker ettpunktsformelen: $y = ax + y_1 - ax_1 = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Svar: Ligninga for den rette linja er $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}}$

Oppgave 10

a) Begge trekantene er rettvinklet, så jeg kan bruke Pytagoras for å finne de manglende sidene:





$AB^2 + BC^2 = AC^2$ $AB^2 = 2^2 - 1^2$ $\underline{\underline{AB = \sqrt{3}}}$	$DF^2 = DE^2 + EF^2$ $DF^2 = 1^2 + 1^2$ $\underline{\underline{DF = \sqrt{2}}}$

b) Bruker definisjonene:

$\sin u = \dfrac{motstående\ katet}{hypotenus}$ gir $\sin 30° = \sin A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$ og $\quad \sin 60° = \sin C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos u = \dfrac{hosliggende\ katet}{hypotenus}$ gir $\cos 45° = \cos D = \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ og $\quad \cos 60° = \cos C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\tan u = \dfrac{motstående\ katet}{hosliggende\ katet}$ gir $\tan 30° = \tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ og $\quad \tan 45° = \tan D = \dfrac{EF}{DE} = 1$

Fyller ut tabellen (verdiene fra oppgaven er merket med fet skrift):

u	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
$30°$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{\mathbf{3}}$

Oppgave 11

Lar «Surf» være S og «Jump» være J og «Catch» være C.
$\bar{S}$ betyr «ikke Surf» og tilsvarende for de andre typene.

a) Først er det 6 av 9 som er $\bar{J}$, hvis den første er $\bar{J}$ er det igjen 5 av 8 som er $\bar{J}$, bruker multiplikasjonsprinsippet og finner at sannsynligheten for at ingen av de to flaskene er J er

$$P(\bar{J}\bar{J}) = \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{5}{3\cdot 2\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

b) Dette kan skje på to måter: Først S så C eller først C så S. Finner sannsynligheten for hver av disse på samme måte som i a):

$$P(S\cap C) = P(SC) + P(CS) = \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{8}{9\cdot 8} + \frac{8}{9\cdot 8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

c) Dette kan skje på tre måter.

$$P(to\ like) = P(SS) + P(JJ) + P(CC) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1\cdot 1}{9\cdot 4} + \frac{3\cdot 1}{9\cdot 4} + \frac{2\cdot 3}{9\cdot 4} = \frac{10}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{18}}}$$

Oppgave 12

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

a) I skjæringspunktet med y-aksen er $x = 0$, som gir $y = f(0) = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 6 = 6$
I skjæringspunktet med x-aksen er $y = 0$, som gir ligningen

$$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad | \cdot -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Løser med løsningsformelen for andregradsligninger:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

Svar: <u>Grafen skjærer y-aksen i punktet $(0, 6)$ og x-aksen i punktene $(-1, 0)$ og $(3, 0)$.</u>

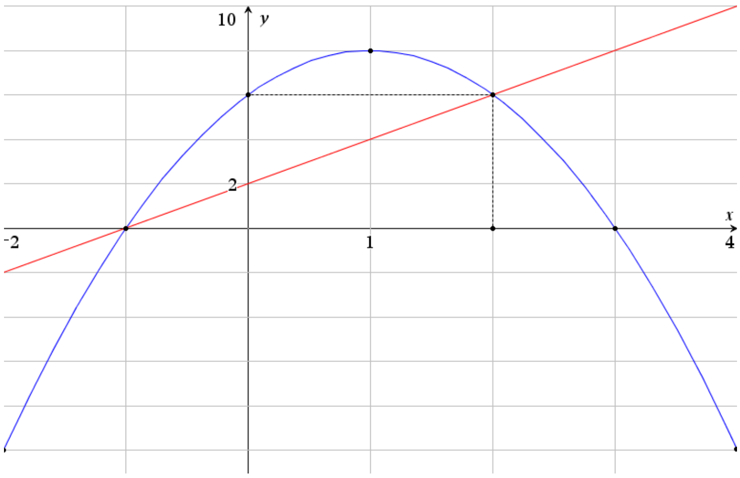
b) Har nullpunktene og skjæringspunktet med y-aksen. Finner ekstremalpunktet:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$$

$$y = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 8$$

Regner ut
$f(4) = -2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 6 = -10$.
Bruker symmetri rundt ekstremalpunktet til å finne:
$f(-2) = f(4) = -10$
$f(2) = f(0) = 6$.

Markerer punktene og tegner grafen:



c) $g(x) = 2x + 2$ starter i $g(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$, så går jeg 1 bort og 2 opp og trekker linja sammen med grafen i koordinatsystemet i b). Markerer skjæringspunktene mellom grafene og leser av at:
<u>Grafene til $f(x)$ og $g(x)$ skjærer hverandre i $(-1, 0)$ og $(2, 6)$</u>

Oppgave 13

Omkretsen av jorda er $O = 2\pi r$, der r er radien av jorda.
Når omkretsen øker med 20 får jeg en ny sirkel med radius r_2 og omkrets O_2:

$$O_2 = O + 20$$

$$2\pi r_2 = 2\pi r + 20$$

$$r_2 = \frac{2\pi r + 20}{2\pi} = r + \frac{20}{2\pi} = r + \frac{10}{\pi}$$

Siden $\frac{10}{\pi} \approx 3$ vil jeg anta at: <u>Ja, jeg kan gå under tauet.</u>

(Merk at $r_2 = r + \frac{10}{\pi}$ uavhengig av størrelsen til r).

Del 2, alle hjelpemidler, 2 timer:

Oppgave 1

a) «Før 1. april» betyr $x = 0$, regner $f(0) = 80 \cdot 1{,}045^0 = 80 \cdot 1 = \underline{\underline{80}}$

Vekstfaktoren $k = 1{,}045$ tilsvarer en prosentendring på $p = 100k - 100 = 104{,}5 - 100 = \underline{\underline{4{,}5}}$

Svar: 80 personer hadde likt sida før 1. april, og antall likes øker med 4,5% per dag.

Definerer funksjonen i GeoGebra CAS: f(x):=80*1.045^x

b) April og mai har 61 dager til sammen, regner i GeoGebra:

f(61)

$\approx$ **1172.69**

Svar: Ja, antallet likes passerer 1000 innen utgangen av mai.

c)

f(16)

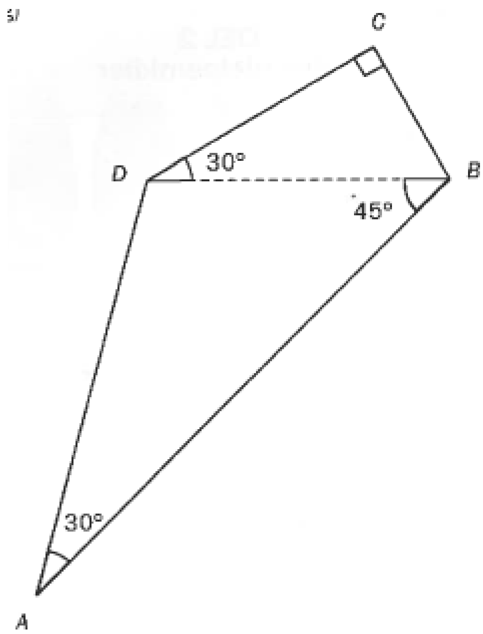
$\approx$ **161.79**

f'(16)

$\approx$ **7.12**

Disse tallene forteller at 16. april er antall likes ca. 162, og det øker med ca. 7 likes den dagen.

Oppgave 2



Har at $BD = 8$

Vet at $\sin \angle D = \frac{BC}{BD}$ og $\cos \angle D = \frac{CD}{BD}$:

Løs[sin(30°)=BC/8,BC]

$\rightarrow \{\mathrm{BC} = 4\}$

Løs[cos(30°)=CD/8,CD]

$\rightarrow \{\mathrm{CD} = 4\sqrt{3}\}$

Finner de siste to sidene med sinussetningen:

$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle A}$ gir

AD=8sin(45°)/sin(30°)

$\rightarrow \mathrm{AD} = \sqrt{2} \cdot 8$

$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle A}$ gir

AB=8sin(180°-30°-45°)/sin(30°)

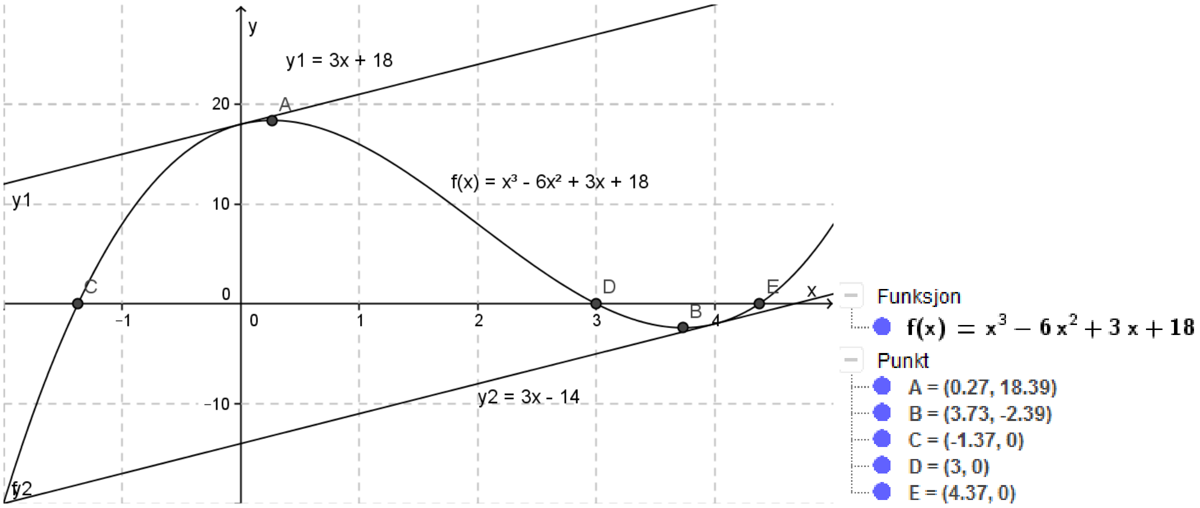
$\rightarrow \mathrm{AB} = 4\sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot 4$

Svar: De fire sidene er $AB \approx 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ og $BC = 4$ og $CD = 4\sqrt{3}$ og $AD = 8\sqrt{2}$.

Oppgave 3

Velger å bruke *Inntastingsfelt* og *Algebrafelt* fordi dette er bedre enn *CAS* til å behandle funksjoner.

a) Definerer funksjonen og bruker $Ekstramalpunkt[f(x)]$ for å finne toppunktet A og bunnpunktet B, og $Nullpunkt[f(x)]$ for å finne nullpunktene C, D og E.
Grafen og resultatene vises under, sammen med tangentene fra d).



Svar: <u>Funksjonen har nullpunkter i $\underline{\underline{(-1.37, 0)}}$ og $\underline{\underline{(3, 0)}}$ og $\underline{\underline{(4.37, 0)}}$ og et toppunkt i $\underline{\underline{(0.27, 18.4)}}$ og et bunnpunkt i $\underline{\underline{(3.73, -2.39)}}$</u>

b) Finner nullpunktene med

Løs[f(x)=0]

$$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{33}+3}{2}, x = 3, x = \frac{\sqrt{33}+3}{2}\right\}$$

Finner x-verdien til ekstremalpunktene ved å finne når den deriverte er lik 0, ser på fortegnet til den deriverte i intervallene for å se hva som er topp og bunn og regner y-verdien fra funksjonen:

Løs[f'(x)=0]

$$\rightarrow \left\{x = -\sqrt{3}+2, x = \sqrt{3}+2\right\}$$

f'(0)

$$\rightarrow 3$$

f'(2)

$$\rightarrow -9$$

f'(4)

$$\rightarrow 3$$

f(-sqrt(3)+2)

$$\rightarrow \sqrt{3}\cdot 6 + 8$$

f(sqrt(3)+2)

$$\rightarrow -\sqrt{3}\cdot 6 + 8$$

Svar: <u>Funksjonen har nullpunkter i $\underline{\underline{\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}, 0\right)}}$ og $\underline{\underline{(3, 0)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}, 0\right)}}$ og et toppunkt i $\underline{\underline{(2-\sqrt{3}, 8+6\sqrt{3})}}$ og et bunnpunkt i $\underline{\underline{(2+\sqrt{3}, 8-6\sqrt{3})}}$</u>

c) Stigningstallet til tangenten er lik $f'(x)$, finner $f'(x) = 3$ og finner tangentene for de x-verdiene.

Løs[f'(x)=3]

$$\rightarrow \{x = 0, x = 4\}$$

Tangent[0, f(x)]

$$\rightarrow y = 3x + 18$$

Tangent[4, f(x)]

$$\rightarrow y = 3x - 14$$

Svar: De to tangentene med stigningstall 3 er $y = 3x + 18$ og $y = 3x - 14$.

d) Tangentene er tegnet med grafen i a).

Oppgave 4

Jeg sier at hun selger x små og y store is.

x is til 24 per is og y is til 32 per is gir en inntekt på $24x + 32y$, og inntekten skal være lik 2752.

Første ligning er $24x + 32y = 2752$

x is med 2 kuler per is og y is med 3 kuler per is tar til sammen $2x + 3y$ kuler,
og det er brukt $20l$ iskrem, altså $20 \cdot 12$ kuler.

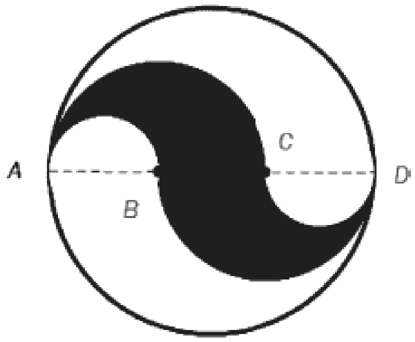
Andre ligning blir $2x + 3y = 20 \cdot 12$

Løs[{24x+32y=2752,2x+3y=20*12},{x,y}]

$\rightarrow \quad \{\{x = 72, y = 32\}\}$

Svar: Hun solgte 72 små is og 32 store is.

Oppgave 5



Siden jeg ser på forholdstall i en symmetrisk figur velger jeg å bare se på den øvre halvsirkelen.

Hvis $AD = a$ så har halvsirkelen en radius på $\frac{1}{2}a$ og dermed et areal på $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$AC = \frac{2AD}{3} = \frac{2}{3}a$ så den svarte halvsirkelen har en radius på $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a$ og et areal på $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a\right)^2$.

$AB = \frac{AD}{3} = \frac{1}{3}a$ så den lille hvite halvsirkelen har en radius på $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a$ og et areal på $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a\right)^2$.

Dette betyr at det svarte området har areal $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a\right)^2$, regner forholdstallet:

(1/2*pi*(2/3*1/2*a)^2-1/2*pi*(1/3*1/2*a)^2)/(1/2*pi*(1/2a)^2)

$\rightarrow \quad \frac{1}{3}$

Svar: Arealet av det svarte området er en tredjedel av arealet av sirkelen.