Eksamen S1 vår 2015

Del 1, uten hjelpemidler, 3 timer

Oppgave 1

a)

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \qquad |:2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$x = \frac{3+1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3-1}{2}$$
$$\underline{\underline{x = 2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

b)

$$2\lg x - \lg 2 = \lg(4-x)$$
$$\lg\left(\frac{x^2}{2}\right) = \lg(4-x)$$
$$10^{\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 10^{\lg(4-x)}$$
$$\frac{x^2}{2} = 4 - x \qquad | \cdot 2$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$$

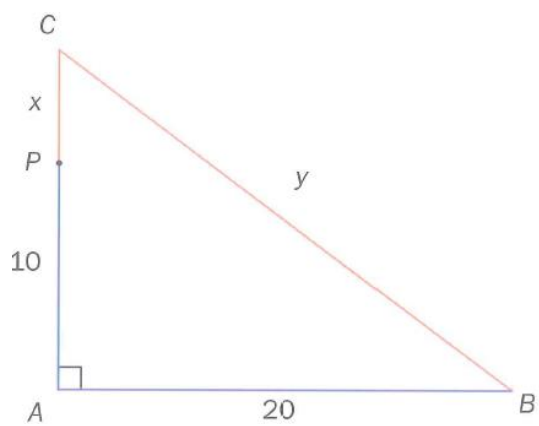
Den originale ligninga inneholder $\lg x$ så den negative løsninga kan ikke brukes.
Svar: <u>Ligninga er oppfylt for $x = 2$.</u>

Prøve på svaret:
Venstre: $2\lg 2 - \lg 2 = \lg 1$ Høyre: $\lg(4-2) = \lg 2$

Oppgave 2

a) Har $AB = 20$ og $PA = 10$ og $PC = x$ og $CB = y$

$$PA + AB = PC + CB$$
$$10 + 20 = x + y$$
$$x + y = 30$$



Bruker pytagoras:

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$
$$(10+x)^2 + 400 = y^2$$

Altså er ligningssettet $\begin{bmatrix} x + y = 30 \\ (10+x)^2 + 400 = y^2 \end{bmatrix}$

b) Fra den første ligninga får jeg $x = 30 - y$, setter det inn i den andre ligninga:

$$(10 + 30 - y)^2 + 400 = y^2$$
$$(40 - y)^2 + 400 - y^2 = 0$$
$$40^2 - 2 \cdot 40 \cdot y + y^2 + 400 - y^2 = 0$$
$$2000 - 80y = 0$$
$$-80y = -2000$$
$$y = \frac{-2000}{-80} = \underline{\underline{25}}$$
$$x = 30 - y = 30 - 25 = \underline{\underline{5}}$$

Svar: $\underline{\underline{x = 5 \text{ og } y = 25}}$

Oppgave 3

a) $(a+1)^2 - 2(a+1)(a-1) + (a-1)^2 = a^2 + 2a \cdot 1 + 1^2 - 2(a^2 - 1^2) + a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2$
$$= a^2 + 2a + 1 - 2a^2 + 2 + a^2 - 2a + 1 = \underline{\underline{4}}$$

b) $$\frac{(2a^2)^{-1}(3b)^2}{(3a^2b^{-1})^2} = \frac{2^{-1} \cdot a^{2\cdot(1)} 3^2 b^2}{3^2 a^{2\cdot 2} b^{-1\cdot 2}} = 2^{-1} \cdot a^{-2-4} \cdot 3^{2-2} \cdot b^{2-(2)} = 2^{-1}a^{-6}3^0b^4 = \underline{\underline{\frac{b^4}{2a^6}}}$$

Oppgave 4

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad , \qquad D_f = \mathbb{R}$$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{3x^2 - 12x + 9}}$

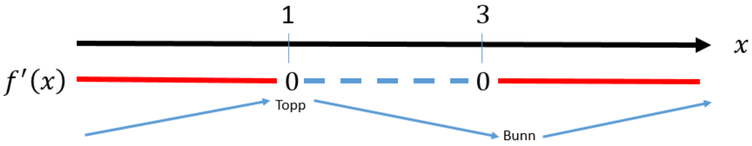
b) Finner x-verdien til ekstremalpunktene der den deriverte er lik 0, $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad |:3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

Nullpunktene for den deriverte er i $x = 1$ og $x = 3$.

Undersøker fortegnet i hvert intervall og tegner fortegnslinje:

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 < 0$$
$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 48 - 48 + 9 > 0$$



Regner ut y-verdiene:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$$
$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$$

Svar: $\underline{\underline{f(x) \text{ har et toppunkt i } (1, 0) \text{ og et bunnpunkt i } (3, -4)}}$

c) $x_1 = 0$ $\quad y_1 = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 4 = -4$ $\quad a = f'(0) = 9$

Bruker ettpunktsformelen, $y = ax + y_1 - ax_1 = 9x + (-4) - 9 \cdot 0 = 9x - 4$

Svar: <u>Ligninga for tangenten i $\big(0, f(0)\big)$ er</u> $\underline{\underline{y = 9x - 4}}$

d) Den parallelle tangenten har også stigningstall 9, altså er den deriverte $f'(x) = 9$

$$3x^2 - 12x + 9 = 9$$
$$3x^2 - 12x = 0 \qquad |:3$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad \underline{\underline{x = 4}}$$

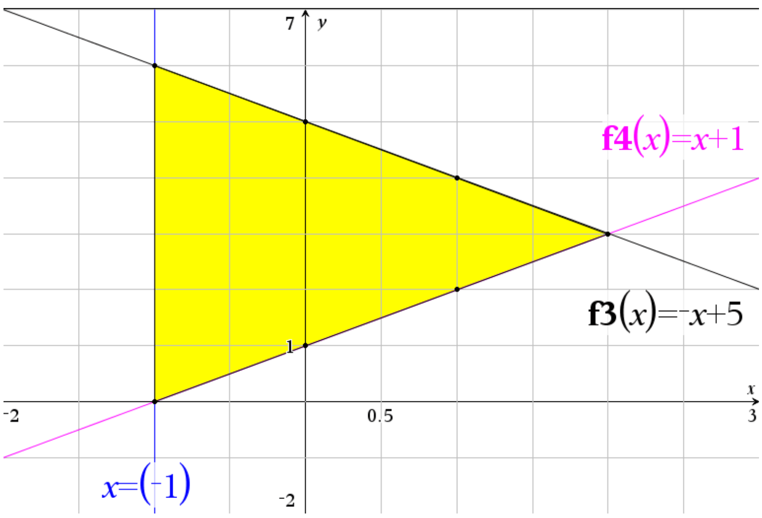
$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 4 = 64 - 96 + 36 - 4 = \underline{\underline{0}}$$

Svar: <u>Den andre tangenten med stigningstall 9 tangerer grafen i punktet $(4, 0)$</u>

Oppgave 5

a) Omskriver de to første ulikhetene så y er alene, tegner linjene i koordinatsystemet og skisserer området som oppfyller de tre ulikhetene

$x + y \leq 5$ $y \leq -x + 5$	$y - x \geq 1$ $y \geq x + 1$



b) Jeg finner den største verdien for funksjonen i et av skjæringspunktene mellom ulikhetene, altså i $(-1, 0)$ eller $(-1, 6)$ eller $(2, 3)$

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -3$$
$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 = -3 + 12 = 9$$
$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 + 6 = 12$$

Svar: <u>$3x + 2y$ blir størst mulig i punktet $(2, 3)$.</u>

Oppgave 6

$$K(x) = 0{,}25x^2 + 100x + 5000 \quad , \qquad x \in [0, 400]$$

a) Hvis de selger x enheter for 200kr per enhet har de en inntekt på $I(x) = 200x$.
Overskudd er inntekt minus kostnad,

$$O(x) = I(x) - K(x) = 200x - (0{,}25x^2 + 100x + 5000) = \underline{\underline{-0{,}25x^2 + 100x - 5000}}$$

b) Dette kan løses med løsningsformelen for andregradsligninger og fortegnslinje, men jeg ser at andregradsfunksjonen har et toppunkt fordi $a = -0{,}25 < 0$, jeg finner x-verdien med

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-0{,}25)} = -\frac{100}{-0{,}5} = \underline{\underline{200}}$$

$$O(200) = -0{,}25 \cdot 200^2 + 100 \cdot 200 - 5000 = -1000 + 20000 - 5000 = \underline{\underline{5000}}$$

Svar: <u>Det største overskuddet er 5000 kroner per dag, det oppnås ved en produksjon på 200 enheter per dag.</u>

Oppgave 7

(Jeg setter opp formlene for binomialkoeffisientene, men du kan finne dem med Pascals trekant, eller bruke at $\binom{n}{1} = n$ og $\binom{n}{n-1} = n$ og $\binom{n}{0} = 1$ og $\binom{n}{n} = 1$).

I a) og b) har vi en gruppe som er delt i to ikke-overlappende grupper, og vi trekker uten tilbakelegging, altså kan vi bruke en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell med $n = 7$ og $r = 3$, lar a være antallet røde kuler, $a = 3$, da er antall blå kuler $b = 4$.

a) Hvis jeg trekker 2 røde så trekker jeg 1 blå, sannsynligheten blir

$$P(2\,røde) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{\cancel{3!}}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{\cancel{3!} \cdot 1!}}{\frac{7!}{4! \cdot 3!}} = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1} \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1}{\cancel{2 \cdot 1} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \underline{\underline{\frac{12}{35}}}$$

b) «Flere røde enn blå» betyr enten 2 røde og 1 blå (som jeg fant i a) eller 3 røde og 0 blå.

$$P(3\,røde) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{\cancel{3!}}{0! \cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 0!}}{\frac{7!}{4! \cdot 3!}} = 1 \cdot \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{35}$$

$$P(2\,røde) + P(3\,røde) = \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \underline{\underline{\frac{13}{35}}}$$

(Alternativ tenkemåte: Først er 3 av 7 røde, hvis den første er rød er 2 av 6 røde, og til slutt er 1 av 5 røde, $P(3\,røde) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$)

c) Med tilbakelegging er det like stor sannsynlighet for en rød kule hver gang, hvert trekk er uavhengig, og det er to muligheter i hvert trekk, altså kan vi bruke den binomiske modellen med $p = \frac{3}{7}$ og $n = 3$ og $x = 2$.

$$P(2\,røde) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{3^2}{7^2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{108}{343}}}$$

Oppgave 8

a) Graf A er en hyperbel, altså $g(x)$ eller $h(x)$. De to har samme vertikale asymptote, og den horisontale asymptoten er i $y = 2$, som passer med $h(1000) = \frac{2000+3}{1000-1} \approx 2$, altså <u>gir $h(x)$ graf A.</u>

b) Graf B er en tredjegradsfunksjon, altså $f(x)$ eller $k(x)$. Grafen har ekstremalpunkter i $x = \pm 1$, undersøker: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, $f'(1) = 3 + 2 - 2 = 3$, det passer ikke.
$k'(x) = 6x^2 - 6$, ser at $k'(-1) = 0$ og $k'(1) = 0$, altså har vi at <u>$k(x)$ gir graf B.</u>

Oppgave 9

$9^x - 3^x - 12 = 0$ $(3^2)^x - 3^x - 12 = 0$ $3^{2\cdot x} - 3^x - 12 = 0$ $(3^x)^2 - 3^x - 12 = 0$ $z^2 - z - 12 = 0$	$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$ $z = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$ $3^x = 4 \quad \vee \quad 3^x = -3$ 3^x er alltid positivt, bare den andre løsningen er gyldig	$\lg 3^x = \lg 4$ $x \lg 3 = \lg 2^2$ $\underline{\underline{x = \frac{2\lg 2}{\lg 3}}}$

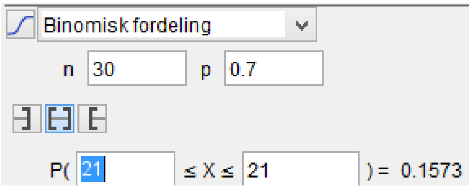
Del 2, alle oppgaver, 2 timer

Oppgave 1

Her antar jeg at elevene blir fornøyd med utdanningen sin uavhengig av hverandre, dermed kan jeg bruke en binomisk sannsynlighetsmodell med $n = 30$, $p = 0{,}70$ i a) og b).

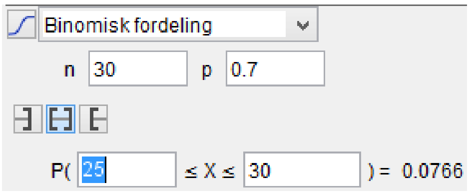
a) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra, $x = 21$:

Svar: $P(21\ fornøyde) \approx \underline{\underline{0{,}157}}$



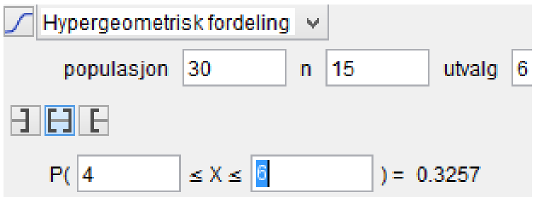
b) Minst 25 betyr $x \in [25, 30]$, bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra:

Svar: $P(minst\ 25\ fornøyde) \approx \underline{\underline{0{,}077}}$



c) Her er det ei gruppe som er delt i to ikke-overlappende undergrupper, altså kan jeg bruke en hypergeometrisk sannsynlighets-modell.

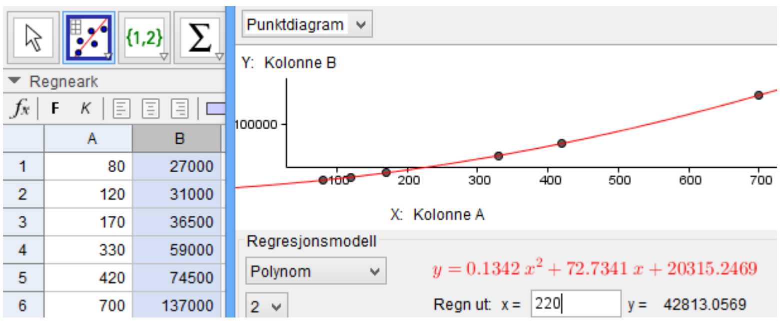
«Flere jenter enn gutter» av 6 betyr 4, 5 eller 6 jenter, bruker sannsynlighetskalkulatoren:
Svar: $P(flere\ jenter\ enn\ gutter) \approx \underline{\underline{0{,}326}}$



Oppgave 2

a) Setter opp et regneark med verdiene i GeoGebra og bruker *Regresjonsanalyse* til å utføre en polynomregresjon av andre grad for å finne funksjonen. Velger å ikke runde av funksjonen, men heller runde av svarene fra funksjonen.

Regner ut funksjonsverdien direkte i regresjonsvinduet.



Svar: <u>En andregradsfunksjon som passer bra er $K(x) = 0{,}1342x^2 + 72{,}7341x + 20315{,}2469$, og når det produseres 220 enheter blir kostnadene ca. 42 813 kroner.</u>

b) Et salg av x enheter til 250 kroner per enhet gir en inntekt på $I(x) = 250x$.
Definerer funksjonene i GeoGebra CAS og finner når inntektene er høyere enn kostnadene:

1	K(x):=0.1342x^2+72.7341x+20315.2469 $\approx$ $K(x) := 0.13\,x^2 + 72.73\,x + 20315.25$
2	I(x):=250x $\rightarrow$ $I(x) := 250\,x$
3	Løs[I(x) > K(x)] $\approx$ $\{126.3 < x \leq 1237.32\}$

Må ha antall enheter i heltall, så
<u>bedriften går med overskudd når den produserer fra og med 127 til og med 1237 enheter.</u>

c) Overskuddet er størst når grenseinntekten er lik grensekostnaden:

4	Løs[I'(x)=K'(x)] $\approx$ $\{x = 681.81\}$ $\approx \underline{\underline{682}}$

5	I(682)-K(682) $\approx$ 40116.77

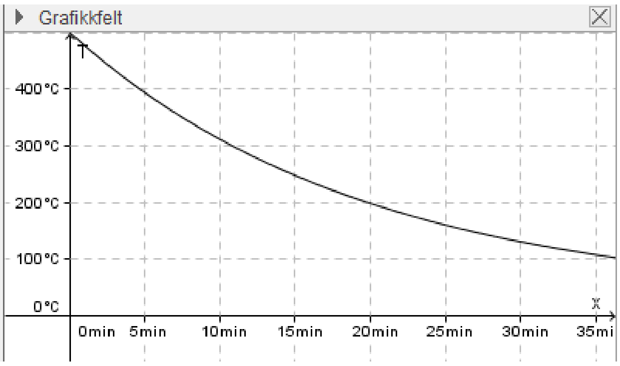
Svar: <u>Det største overskuddet er litt over 40 tusen, ved en produksjon på 682 enheter.</u>

Oppgave 3

a) Definerer funksjonen i CAS, da tegnes den automatisk i grafvinduet, og regner $f(0)$.

CAS

1	f(x):=470*0.95^x+30 $\rightarrow$ $f(x) := 470 \left(\frac{19}{20}\right)^x + 30$
2	f(0) $\approx$ 500
3	Løs[f(x)=150] $\approx$ $\{x = 26.62\}$



Svar: <u>Når metallet tas ut av ovnen er temperaturen 500°C.</u>

(Det kunne vi også sett rett fra funksjonen fordi $0{,}95^0 = 1$)

b) Tiden er funnet i rute (3) i skjermbildet.
Når x blir større vil 0.95^x gå mot 0, altså forsvinner det første leddet og $f(x)$ går mot 30.

Svar: <u>Smeden har ca. 26,6 min. å bearbeide metallet på, og temperaturen i rommet er 30°C.</u>

c) 10 minutter ekstra betyr 36,6 min, jeg må altså finne A slik at $A \cdot 0.95^{36{,}6} + 30 = 150$
Løs[A*0.95^36.6+30=150,A]

$\approx$ $\{A = 784.33\}$, og da er starttemperaturen $784 \cdot 0{,}95^0 + 30 = 784 + 30 = \underline{814}$

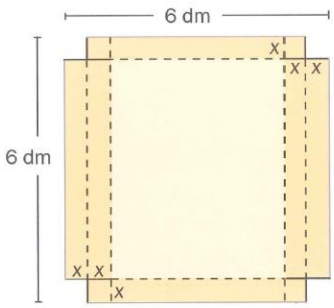
Svar: <u>Metallet må begynne med en temperatur på ca. 814°C.</u>

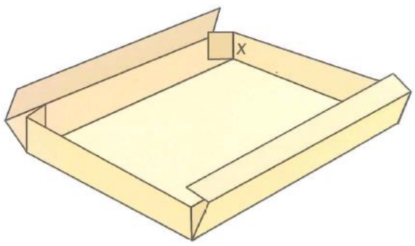
Oppgave 4

a) Høyden i boksen er $h = x$.

Det klippes bort x fra hver side av lengden, som gir $l = 6 - 2x$.

Det klippes bort $2x$ fra hver side av bredden, som gir $b = 6 - 2 \cdot 2x = 6 - 4x$.





Volumet er lengde ganger bredde ganger høyde, GeoGebra regner:

V(x):=(6-2x)(6-4x)x

$\rightarrow$ $\mathbf{V(x) := 8\,x^3 - 36\,x^2 + 36\,x}$, qed

Sidene er målt i dm, dermed blir volumet målt i dm^3

$x > 0$ fordi vi ikke kan klippe en negativ lengde, og hvis vi klipper for langt forsvinner bredden:

$$4x < 6$$
$$x < 1{,}5$$

Altså er $x \in \langle 0, 1{,}5 \rangle$.

b) Det er en praktisk oppgave, så jeg løser den med tilnærmingsverdier.
Finner x-verdien til ekstremalpunktene der den deriverte er lik 0, finner y-verdien til punktet som er innenfor definisjonsområdet, og ser på fortegnet til den deriverte på hver side for å vise at det er et toppunkt.

11	Løs[V'(x)=0] $\approx$ $\{x = 0.63, x = 2.37\}$
12	V(0.63) $\approx$ 10.39

13	V'(0.6) $\approx$ 1.44
14	V'(0.7) $\approx$ -2.64

<u>Det største mulige volumet er ca. $10{,}4 dm^3$, da er $x \approx 0{,}63 dm$</u>

c) Hvis plata har sidelengde a får boksen sidelengder $l = a - 2x$ og $b = a - 4x$ og $h = x$.

V2(x):=(a-2x)(a-4x)x

$\rightarrow$ $\mathbf{V2(x) := 8\,x^3 - 6\,a\,x^2 + a^2\,x}$, og på samme måte som over har jeg at $x \in \langle 0, \frac{a}{4} \rangle$

Regner som i b), men med eksaktverdier:

16	Løs[V2'(x)=0] $\rightarrow$ $\left\{x = \frac{1}{4}\,a - \frac{\sqrt{3}}{12}\,\lvert a\rvert, x = \frac{1}{4}\,a + \frac{\sqrt{3}}{12}\,\lvert a\rvert\right\}$
17	V2(1/4*a-sqrt(3)*a/12) $\rightarrow$ $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{36}\,a^3$

18	V2'(a/4-sqrt(3)*a/11) $\rightarrow$ $\frac{23}{242}\,a^2$
19	V2'(a/4-sqrt(3)*a/13) $\rightarrow$ $-\frac{25}{338}\,a^2$

QED. (Her er GeoGebra litt vrien, men vi vet jo at $a > 0$ så vi kan fjerne absoluttverditegnet.)

(Merk også at siden $\frac{\sqrt{3}a}{11} > \frac{\sqrt{3}a}{12}$ så blir $\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{3}a}{11} < \frac{a}{4} - \frac{\sqrt{3}a}{12}$, og tilsvarende for det andre intervallet.

Du kan også gjøre det selv:

$$V_2'(x) = 8 \cdot 3x^2 - 6a \cdot 2x + a^2 \cdot 1 = 24x^2 - 12a \cdot x + a^2 = 0$$

$$x = \frac{-(-12a) \pm \sqrt{(-12a)^2 - 4 \cdot 24 \cdot a^2}}{2 \cdot 24} = \frac{12a \pm \sqrt{48a^2}}{2 \cdot 2 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 3a \pm 4\sqrt{3a^2}}{4 \cdot 12} = \frac{3a \pm \sqrt{3} \cdot a}{12}$$

Kan ta $\sqrt{a^2} = a$ fordi $a > 0$.

$\frac{3a+\sqrt{3} \cdot a}{12} > \frac{a}{4}$, altså er $\frac{3a-\sqrt{3} \cdot a}{12}$ den som er innenfor intervallet.

Sett så inn og regn ut $V_2\left(\frac{3a-\sqrt{3} \cdot a}{12}\right)$