Eksamen 1T høsten 2015, løsningsforslag

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

$$1{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}0005 = 1{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{12+(-4)} = \underline{\underline{9 \cdot 10^{8}}}$$

Oppgave 2

Velger addisjonsmetoden

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 2y = 2 \end{bmatrix} : (-2)$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y = 13 \\ -2x + y = -1 \end{bmatrix}$$

Legger sammen ligningene:

$$\begin{aligned} 4y &= 12 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 3}} \end{aligned}$$

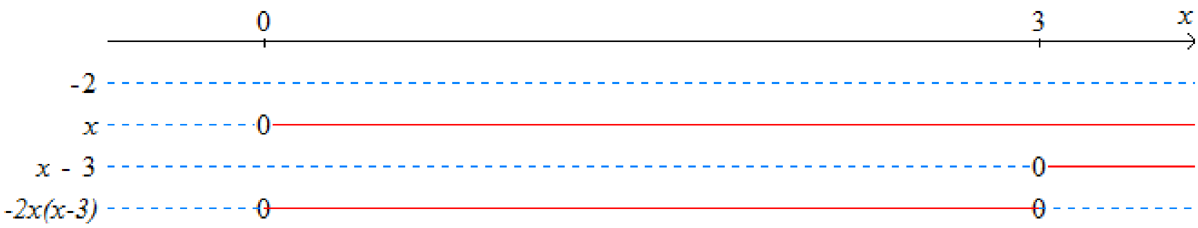
$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 3 &= 13 \\ 2x &= 13 - 9 \\ x &= 4 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{x = 2 \;\wedge\; y = 3}}$

Oppgave 3

$$-2x^2 + 6x < 0$$

$$-2x(x-3) < 0$$



Løsningen på ulikheten er $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}$

Oppgave 4

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{8}}{2} + \sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} \quad = \quad 2 - \frac{\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{\frac{128}{2}}$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}} + 2 - \sqrt[3]{64} \quad = \quad 4 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{4^3} \quad = \quad 4 - \sqrt{2} - 4 \quad = \quad \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$

Oppgave 5

Vet at $x^2 + bx + c$ kan faktoriseres som $1\cdot(x - x_1)(x - x_2)$, og har at $x_1 = -4$ og $x_2 = 2$.

$$\big(x - (-4)\big)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

Svar: $\underline{\underline{b = 2 \; og \; c = -8}}$

Oppgave 6

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{2x-2} + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)\cdot 2}{(x-1)\cdot 2} - \frac{x-3}{2(x-1)} + \frac{1\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)}$$

$$= \frac{2x + 2 - x + 3 + x - 1}{2(x-1)} = \frac{2x+4}{2(x-1)} = \frac{2(x+2)}{2(x-1)} = \underline{\underline{\frac{x+2}{x-1}}}$$

Oppgave 7

Faktoriserer telleren med 2. kvadratsetning: $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 = (x - 2y)^2$

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{3xy - 6y^2} = \frac{(x-2y)^2}{3y(x-2y)} = \underline{\underline{\frac{x-2y}{3y}}}$$

Oppgave 8

$$2^{4x}\cdot 2^{x^2} = 32$$

$$2^{4x+x^2} = 2^5$$

De to sidene av ligninga er potenser med samme grunntall, så eksponentene må være like:

$$4x + x^2 = 5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Kan løses med abc-formelen, men jeg bruker at $4 = -1 + 5$ og $-5 = -1\cdot 5$ til å faktorisere, og bruker produktregelen:

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = -5}}$$

Oppgave 9

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 45° = \angle B$$

Dette er altså en likebeint trekant, som betyr at $AB = AC = x$, og jeg bruker Pytagoras:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

$$x^2 + x^2 = \sqrt{2}^2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Sidene må ha positiv lengde, så $AB = AC = 1$.

I en rettvinklet trekant er katetene grunnlinje og høyde, så arealet blir:

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(Det finnes mange måter å forklare hvorfor $AB = AC = 1$, jeg valgte en formell metode).

Oppgave 10

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

a) Finner nullpunktene ved å løse $f(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Svar: Nullpunktene er i $x_1 = -1$ og $x_2 = 2$.

b) Vet at grafen til f har et bunnpunkt fordi $a = 1 > 0$.
Finner x-verdien til bunnpunktet der den deriverte er lik 0.

$$f'(x) = 2x - 1 - 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Setter x-verdien inn i funksjonen for å finne y-verdien:

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{9}{4}$$

Funksjonen har et bunnpunkt i $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, qed

c) Bruker ettpunktsformelen, $y - y_1 = a(x - x_1)$. Finner først verdiene:

Har oppgitt $x_1 = 2$

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$$

$$a = f'(x_1) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 - 0 = 3$$

$$y = ax + y_1 - ax_1 = 3x + 0 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3x - 6}}$$

Svar: $\underline{\text{Tangenten i punktet } (2, 0) \text{ har ligning } y = 3x - 6}$

d) Linja er parallell med tangenten fra c), og har dermed stigningstall $a = 3$

$$y = ax + y_1 - ax_1 = 3x + 7 - 3 \cdot 3 = 3x - 2$$

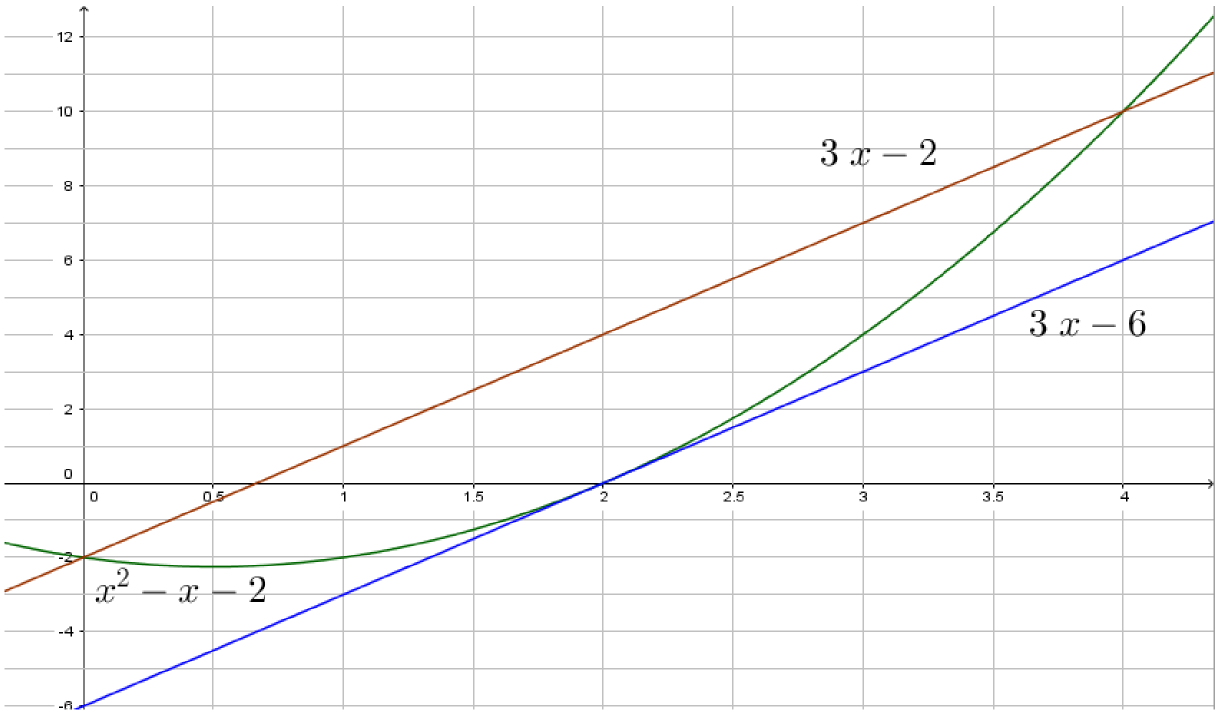
Finner skjæringspunktene:

$$f(x) = y$$
$$x^2 - x - 2 = 3x - 2$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$
$$\underline{x_1 = 0} \quad \vee \quad \underline{x_2 = 4}$$

$$y_1 = f(x_1) = f(0) = 0 - 0 - 2 = \underline{-2}$$
$$y_2 = f(4) = 4^2 - 4 - 2 = \underline{10}$$

Svar: $\underline{\text{Linja } l \text{ skjærer grafen til } f \text{ i punktene } (0, -2) \text{ og } (4, 10)}$

e)



Oppgave 11

Arealet av det lille trapeset er $A = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, der h er høyden og a og b er de parallelle sidene.

Når to figurer er formlike så har de det samme forholdstallet mellom alle sidene, så hvis det største trapeset har høyde $3h$ så er de to parallelle sidene $3a$ og $3b$.

Da blir arealet av det største trapeset:

$$A_2 = \frac{(3a + 3b) \cdot 3h}{2} = \frac{3(a + b) \cdot 3h}{2} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \underline{\underline{9A}}$$

Oppgave 12

a) Regner: 60 av 360 er smittet, da er 300 ikke smittet
68 tester positivt, av dem er 10 ikke smittet, da er 58 smittet.
360-68=292 testet ikke positivt, av dem er 60-58=2 smittet, og 300-10=290 ikke smittet.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt	2	290	298
Sum	60	300	360

Lar videre S stå for smittet, $\bar{S}$ for ikke smittet, T for tester positivt og $\bar{T}$ for tester ikke positivt.

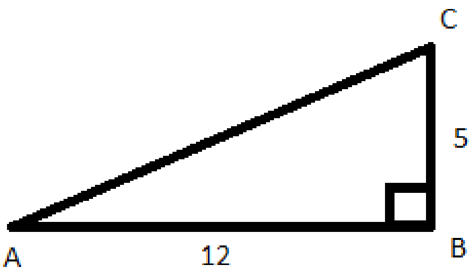
b) Av de 60 som er smittet tester 58 positivt, $P(T|S) = \frac{58}{60} = \underline{\underline{\frac{29}{30}}}$

c) Av de 68 som tester positivt er 10 ikke smittet, $P(\bar{S}|T) = \frac{10}{68} = \underline{\underline{\frac{5}{34}}}$

Oppgave 13:

Når $\angle B = 90°$ så er $\tan A = \frac{BC}{AB}$.

Jeg lar $BC = 5$ og $AB = 12$ og skisserer figuren:



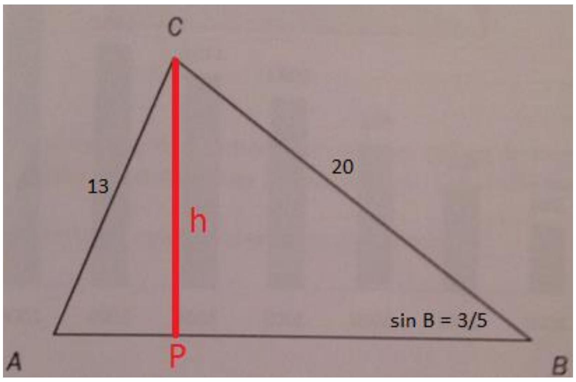
Pytagoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \underline{\underline{\frac{5}{13}}}$$

Oppgave 14:

Konstruerer h fra C til punktet P på AB.



$$\frac{h}{BC} = \sin B$$

$$\frac{h}{20} = \frac{3}{5}$$

$$h = 12$$

$$BP = \sqrt{BC^2 - h^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

$$AP = \sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (16 + 5) \cdot 12 = 21 \cdot 6 = \underline{\underline{126}}$$

Svar: Arealet av trekanten er 126