Eksamen 1T høsten 2015, løsningsforslag

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

$$1{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}0005 = 1{,}8 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{12+(-4)} = \underline{\underline{9 \cdot 10^{8}}}$$

Oppgave 2

Velger addisjonsmetoden

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 2y = 2 \end{bmatrix} : (-2)$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y = 13 \\ -2x + y = -1 \end{bmatrix}$$

Legger sammen ligningene:

$$4y = 12$$
$$\underline{\underline{y = 3}}$$

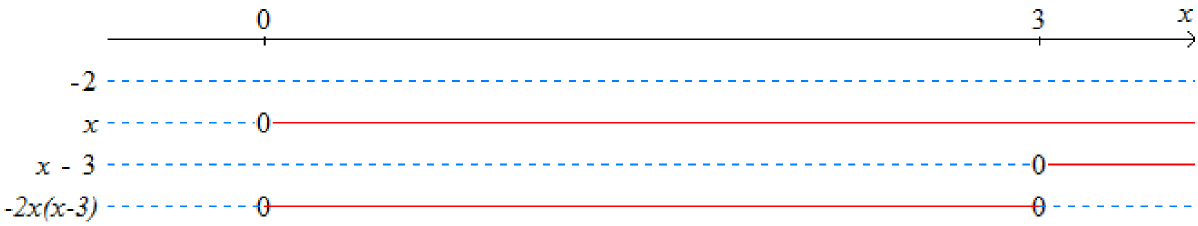
$$2x + 3 \cdot 3 = 13$$
$$2x = 13 - 9$$
$$x = 4$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Svar: $\underline{\underline{x = 2 \ \wedge \ y = 3}}$

Oppgave 3

$$-2x^2 + 6x < 0$$

$$-2x(x - 3) < 0$$



Løsningen på ulikheten er $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}$

Oppgave 4

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{8}}{2} + \sqrt[3]{8} - \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} \quad = \quad 2 - \frac{\sqrt{4\cdot 2}}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{\frac{128}{2}}$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}} + 2 - \sqrt[3]{64} \quad = \quad 4 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{4^3} \quad = \quad 4 - \sqrt{2} - 4 \quad = \quad \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$$

Oppgave 5

Vet at $x^2 + bx + c$ kan faktoriseres som $1 \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, og har at $x_1 = -4$ og $x_2 = 2$.

$$\big(x - (-4)\big)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

Svar: $\underline{\underline{b = 2\ og\ c = -8}}$

Oppgave 6

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{2x-2} + \frac{1}{2} = \frac{(x+1)\cdot 2}{(x-1)\cdot 2} - \frac{x-3}{2(x-1)} + \frac{1\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)}$$

$$= \frac{2x+2-x+3+x-1}{2(x-1)} = \frac{2x+4}{2(x-1)} = \frac{2(x+2)}{2(x-1)} = \underline{\underline{\frac{x+2}{x-1}}}$$

Oppgave 7

Faktoriserer telleren med 2. kvadratsetning: $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 = (x-2y)^2$

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{3xy - 6y^2} = \frac{(x-2y)^2}{3y(x-2y)} = \underline{\underline{\frac{x-2y}{3y}}}$$

Oppgave 8

$$2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 32$$

$$2^{4x+x^2} = 2^5$$

De to sidene av ligninga er potenser med samme grunntall, så eksponentene må være like:

$$4x + x^2 = 5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Kan løses med abc-formelen, men jeg bruker at $4 = -1 + 5$ og $-5 = -1 \cdot 5$ til å faktorisere, og bruker produktregelen:

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = -5}}$$

Oppgave 9

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 45^\circ = \angle B$$

Dette er altså en likebeint trekant, som betyr at $AB = AC = x$, og jeg bruker Pytagoras:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

$$x^2 + x^2 = \sqrt{2}^2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Sidene må ha positiv lengde, så $AB = AC = 1$.

I en rettvinklet trekant er katetene grunnlinje og høyde, så arealet blir:

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(Det finnes mange måter å forklare hvorfor $AB = AC = 1$, jeg valgte en formell metode).

Oppgave 10

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

a) Finner nullpunktene ved å løse $f(x) = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Nullpunktene er i } x_1 = -1 \text{ og } x_2 = 2.}}$

b) Vet at grafen til f har et bunnpunkt fordi $a = 1 > 0$.
Finner x-verdien til bunnpunktet der den deriverte er lik 0.

$$f'(x) = 2x - 1 - 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Setter x-verdien inn i funksjonen for å finne y-verdien:

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{9}{4}$$

Funksjonen har et bunnpunkt i $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, qed

c) Bruker ettpunktsformelen, $y - y_1 = a(x - x_1)$. Finner først verdiene:

Har oppgitt $x_1 = 2$

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$$

$$a = f'(x_1) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 - 0 = 3$$

$$y = ax + y_1 - ax_1 = 3x + 0 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3x - 6}}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Tangenten i punktet } (2,0) \text{ har ligning } y = 3x - 6}}$

d) Linja er parallell med tangenten fra c), og har dermed stigningstall $a = 3$

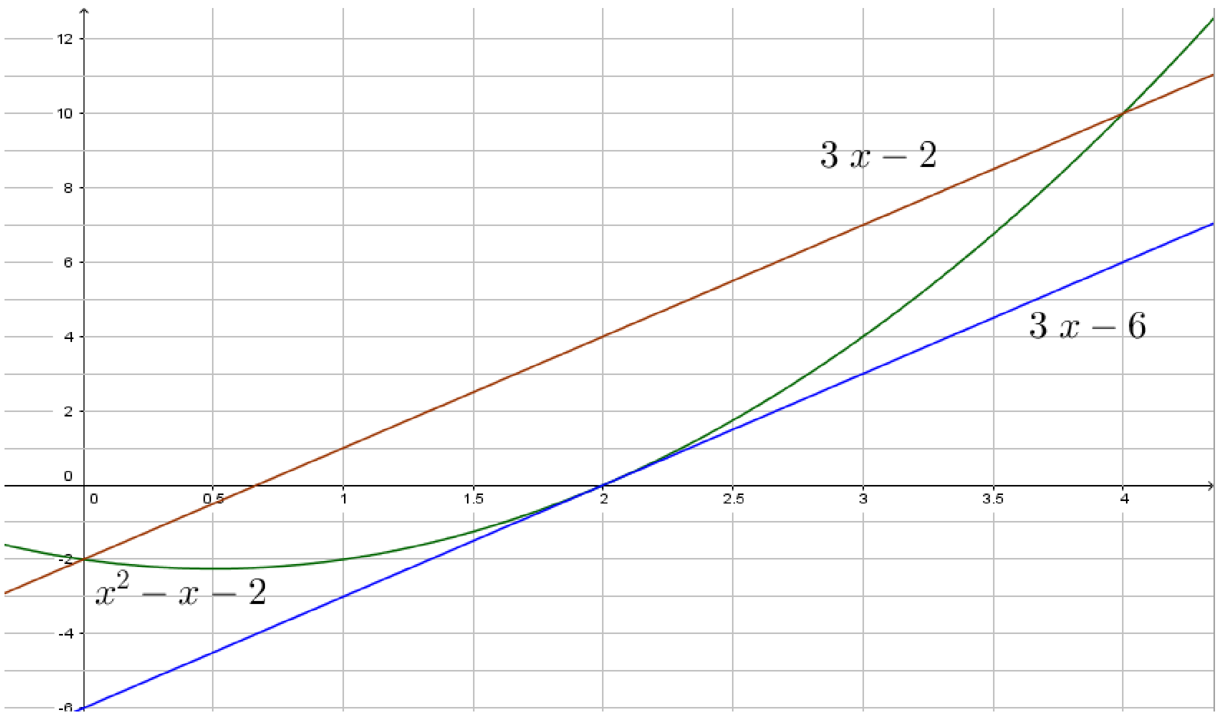
$$y = ax + y_1 - ax_1 = 3x + 7 - 3 \cdot 3 = 3x - 2$$

Finner skjæringspunktene:

$$f(x) = y$$
$$x^2 - x - 2 = 3x - 2$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$
$$\underline{x_1 = 0} \quad \vee \quad \underline{x_2 = 4}$$

$$y_1 = f(x_1) = f(0) = 0 - 0 - 2 = \underline{-2}$$
$$y_2 = f(4) = 4^2 - 4 - 2 = \underline{10}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Linja } l \text{ skjærer grafen til } f \text{ i punktene } (0,-2) \text{ og } (4,10)}}$



e)

Oppgave 11

Arealet av det lille trapeset er $A = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$, der h er høyden og a og b er de parallelle sidene.

Når to figurer er formlike så har de det samme forholdstallet mellom alle sidene, så hvis det største trapeset har høyde $3h$ så er de to parallelle sidene $3a$ og $3b$.

Da blir arealet av det største trapeset:

$$A_2 = \frac{(3a + 3b) \cdot 3h}{2} = \frac{3(a + b) \cdot 3h}{2} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{(a + b) \cdot h}{2} = \underline{\underline{9A}}$$

Oppgave 12

a) Regner: 60 av 360 er smittet, da er 300 ikke smittet
68 tester positivt, av dem er 10 ikke smittet, da er 58 smittet.
360-68=292 testet ikke positivt, av dem er 60-58=2 smittet, og 300-10=290 ikke smittet.

	Smittet	Ikke smittet	Sum
Tester positivt	58	10	68
Tester ikke positivt	2	290	298
Sum	60	300	360

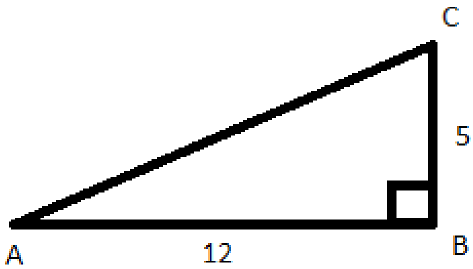
Lar videre S stå for smittet, $\bar{S}$ for ikke smittet, T for tester positivt og $\bar{T}$ for tester ikke positivt.

b) Av de 60 som er smittet tester 58 positivt, $P(T|S) = \frac{58}{60} = \underline{\underline{\frac{29}{30}}}$

c) Av de 68 som tester positivt er 10 ikke smittet, $P(\bar{S}|T) = \frac{10}{68} = \underline{\underline{\frac{5}{34}}}$

Oppgave 13:

Når $\angle B = 90°$ så er $\tan A = \frac{BC}{AB}$.



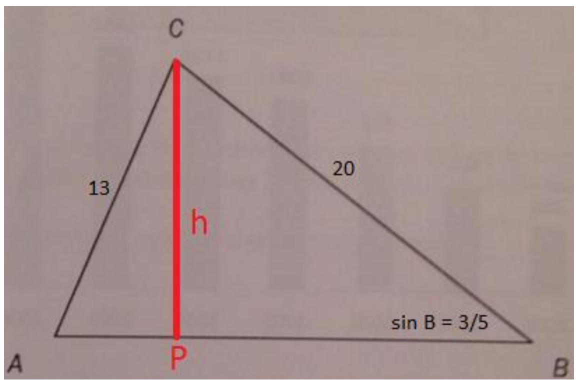
Jeg lar $BC = 5$ og $AB = 12$ og skisserer figuren:

Pytagoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \underline{\underline{\frac{5}{13}}}$$

Oppgave 14:



Konstruerer h fra C til punktet P på AB.

$$\frac{h}{BC} = \sin B$$

$$\frac{h}{20} = \frac{3}{5}$$

$$h = 12$$

$$BP = \sqrt{BC^2 - h^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

$$AP = \sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

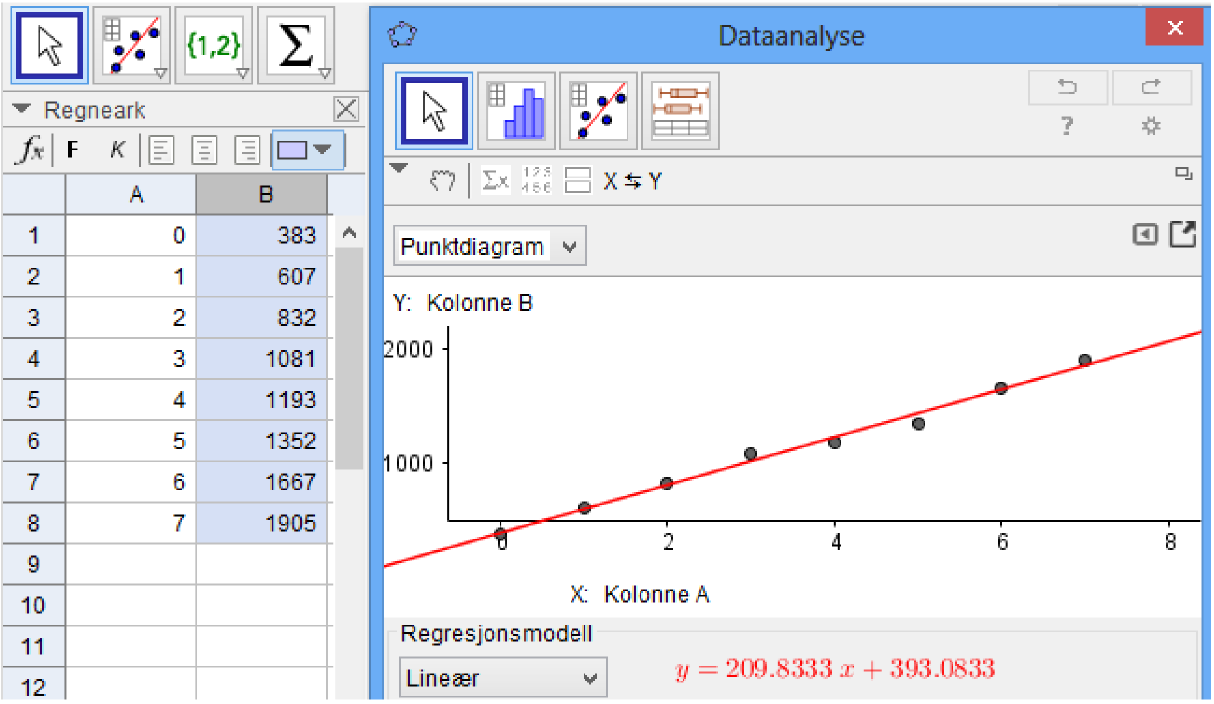
$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (16 + 5) \cdot 12 = 21 \cdot 6 = \underline{\underline{126}}$$

Svar: <u>Arealet av trekanten er 126</u>

Del 2, alle hjelpemidler (GeoGebra og Math 4.0 i Word er brukt):

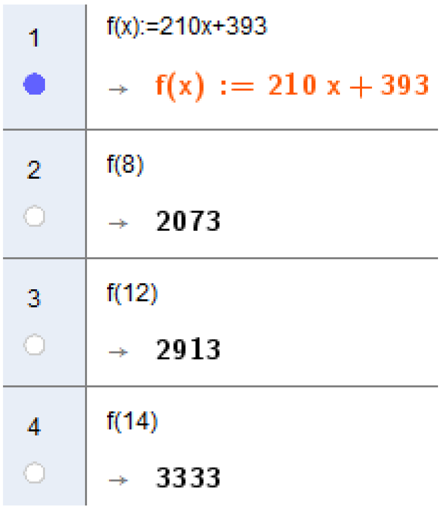
Oppgave 1

a) Setter verdiene i et regneark og bruker Dataanalyseverktøyet til å utføre en lineær regresjon:



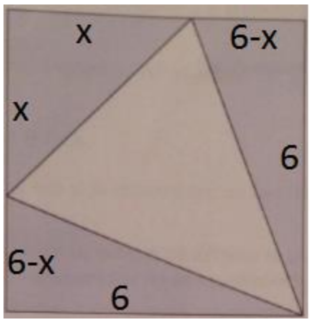
Runder av og finner at en lineær funksjon f som beskriver utviklingen er $\underline{\underline{f(x) = 210x + 393}}$

b) Definerer funksjonen i CAS, og regner ut verdiene modellen forutsier for de tre årene:



Jeg ser at verdien for 2008 passer ganske bra, men i 2012 og 2014 ligger verdiene fra modellen langt under de virkelige tallene. Antallet elbiler endrer seg ikke lenger lineært.

Oppgave 2



Siden de blå trekantene skal ha samme areal og den hvite trekanten er likebeint, må to av de blå trekantene være formlike, som vist på figuren.

De blå trekantene har samme areal, løser direkte i Word:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 - x)$$

$$x = -3\sqrt{5} - 3 \text{ } eller \text{ } x = 3\sqrt{5} - 3$$

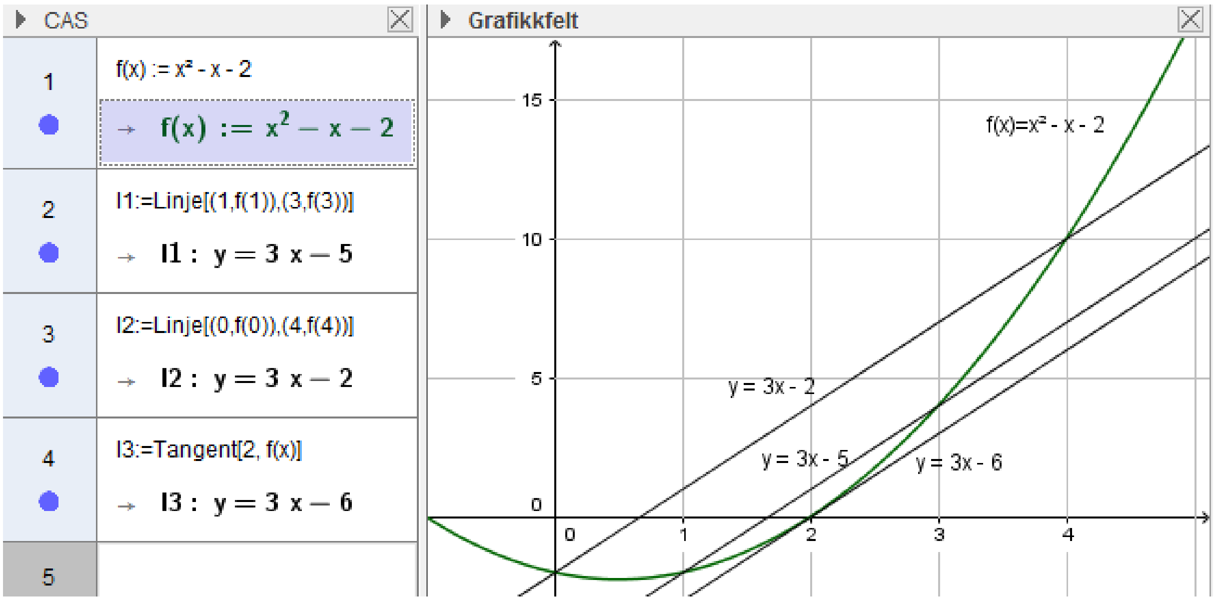
Kan ikke ha negative sider, så $x = 3\sqrt{5} - 3$, lar Word regne ut arealet av den hvite trekanten som kvadratet minus de tre trekantene (de har samme areal):

$$T = 6^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{5} - 3\right)^2 = \underline{\underline{27\sqrt{5} - 45}}$$

Oppgave 3

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

a) Bruker de innebygde GeoGebra-kommandoene til å definere funksjonene og linjene, de tegnes automatisk:



b) Tangenten i punktet $(c, f(c))$ har stigningstall

5	f'(c) → $2c - 1$

Linja gjennom punktene $(c + h, f(c + h))$ og $(c - h, f(c - h))$ har stigningstall

Derivert[Linje[(c+h,f(c+h)),(c-h,f(c-h))],x]

→ $0 = 2c - 1$

De to stigningstallene er like, så tangenten er parallell med linja, qed.

Oppgave 4

Arealet er gitt ved $l \cdot b = \frac{3}{8}$ og omkretsen er gitt ved $2l + 2b = \frac{5}{2}$, GeoGebra løser:

Løs[{l*b=3/8,2l+2b=5/2}, {l,b}]

$$\rightarrow \left\{ \left\{ \ell = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \ell = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4} \right\} \right\}$$

Lar lengden være den lengste sida, så svaret er $\underline{\underline{l = \frac{3}{4}}}$ og $\underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}$

Oppgave 5

a) $\frac{4}{5} \approx 0{,}80$, mens 1350 av totalt 1570 kjøretøy var elbiler, $\frac{1350}{1570} \approx 0{,}86 > 0{,}8$, det er nært nok.
Svar: Ja, det er grunnlag for overskriften.

Bruker videre at E står for elbil, med $P(E) = \frac{4}{5}$, og at $\bar{E}$ står for ikke elbil, med $P(\bar{E}) = \frac{1}{5}$

b) Det er tre måter det kan komme akkurat en elbil av tre kjøretøy: $E\bar{E}\bar{E}$ eller $\bar{E}E\bar{E}$ eller $\bar{E}\bar{E}E$.
Bruker produktsetningen for uavhengige setninger på hver situasjon, og adderer sannsynlighetene for å finne den totale sannsynligheten. Word regner:

$$P(1\,E) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{12}{125}}}$$

Svar: Sannsynligheten for at nøyaktig ett av tre kjøretøy er en elbil er $\underline{\underline{\frac{12}{125}}}$

c) Minst 2 av 3 betyr enten 2 eller 3, så jeg kan regne $P(2E) + P(3E)$, men siden jeg alt har regnet ut $P(1E)$ gjør jeg heller slik:

$$P(0E) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$$

$$P(minst\ 2\ E) = 1 - P(0E) - P(1E) = 1 - \frac{1}{125} - \frac{12}{125} = \underline{\underline{\frac{112}{125}}}$$

Svar: Sannsynligheten for at minst to av tre kjøretøy er elbiler er $\underline{\underline{\frac{112}{125}}}$

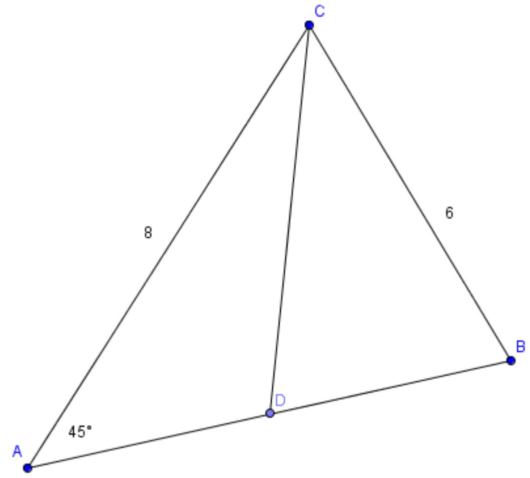
Oppgave 6

a) Bruker cosinussetningen,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A,$

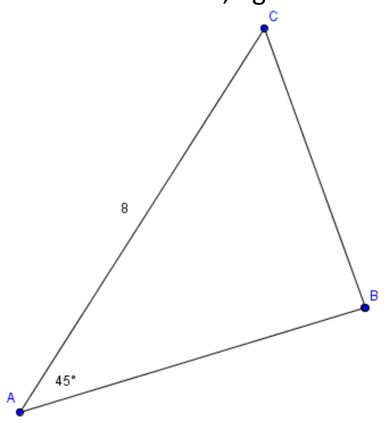
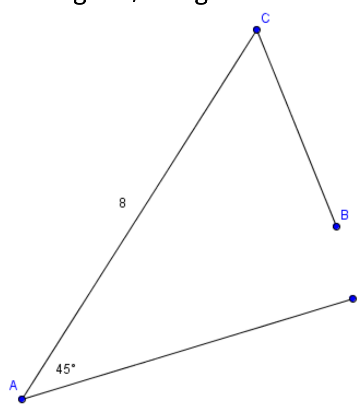
1	Løs[6^2=AB^2+8^2-2*AB*8*cos(45°), AB]
	$\rightarrow \left\{ \mathbf{AB = 4\ \sqrt{2} - 2,\ AB = 4\ \sqrt{2} + 2} \right\}$

Begge løsningene er mulige.



b) Lengden BC avgjør hvor mange trekanter vi kan lage.

I a) var det to muligheter, fordi med BC=6 kan BC skjære vinkelbeinet fra A i to punkter. De to mulighetene er vist her som BC og DC.

Hvis BC blir kortere vil den bare kunne treffe vinkelbeinet fra A i ett punkt, da blir ABC en rettvinklet trekant, og det er én mulig løsning. 	Hvis BC blir enda kortere når den ikke ned til vinkelbeinet fra A i det hele tatt, og da finnes det ingen løsninger 

c) Løser ligninga i GeoGebra:

2	Løs[a^2=8^2+x^2-16x*cos(45°)]
	$\approx \left\{ \mathbf{x = (a^2 - 32)^{0.5} + 5.66,\ x = -(a^2 - 32)^{0.5} + 5.66} \right\}$

$$(a^2 - 32) = \sqrt{a^2 - 32}$$

Uttrykket under rottegnet kan ikke ha en negativ verdi, og hvis det er lik 0 blir de to løsningene like. Undersøker når uttrykket er større enn 0, lik 0 og mindre enn 0:

Løs[a^2-32>0, a]	4	Løs[a^2-32=0, a]	Løs[a^2-32<0, a]
$\rightarrow \left\{ \mathbf{-4\ \sqrt{2} > a, a > 4\ \sqrt{2}} \right\}$		$\rightarrow \left\{ \mathbf{a = -4\ \sqrt{2}, a = 4\ \sqrt{2}} \right\}$	$\rightarrow \left\{ \mathbf{-4\ \sqrt{2} < a < 4\ \sqrt{2}} \right\}$

Ser bort fra de negative intervallene, og får at:

<u>Det er to løsninger for $a > 4\sqrt{2}$, én løsning for $a = 4\sqrt{2}$ og ingen løsninger for $a < 4\sqrt{2}$</u>

d) Når BC er lang nok er det to løsninger, når den blir for kort er det ingen, så:

<u>Ja, svarene fra c) passer med skissene mine fra b.</u>