

Eksamen R1 høst 2015 løsning

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a) Derivasjonsregelen for polynomer: $f'(x) = 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 = \underline{6x + 5}$

b) Kjernerregelen: $g'(x) = 3 \cdot [u^4]' \cdot [x^2 - 2]' = 3 \cdot 4u^3 \cdot 2x = \underline{24x \cdot (x^2 - 2)^3}$

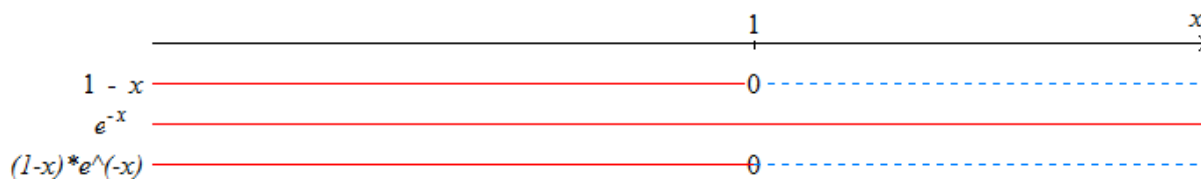
c) Delutregning med kjernerregelen: $[\ln(x^2 + 3)]' = [\ln u]' \cdot [x^2 + 3]' = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$

Så produktregelen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [x]' \cdot \ln(x^2 + 3) + x \cdot [\ln(x^2 + 3)]' = 1 \cdot \ln(x^2 + 3) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 3} \\ &= \ln(x^2 + 3) + \underline{\underline{\frac{2x^2}{x^2 + 3}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

$$f'(x) = [x]' \cdot e^{-x} + x \cdot [e^{-x}]' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$$



Oppgave 3

a) Hvis $f(x)$: $(x - 1)$ skal gå opp, må $f(1) = 0$

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - k \cdot 1 + 6 = 0$$

$$\underline{\underline{k = 5}}$$

b) Polynomdividerer først med $(x - 1)$, siden jeg så i a) at dette går opp:

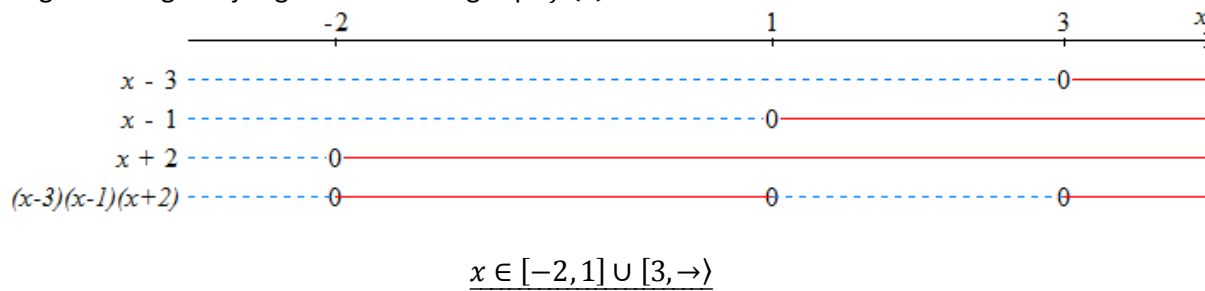
$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

Kan nå bruke abc -formelen, men jeg bruker at $-1 = -3 + 2$ og $-6 = -3 \cdot 2$ og faktoriserer:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Endelig lineær faktorisering blir $f(x) = \underline{\underline{(x - 3)(x - 1)(x + 2)}}$

c) Tegner fortegnslinje og leser av løsningen på $f(x) \geq 0$:



Oppgave 4

Denne kan løses på to hovedmåter:

Trekke sammen:

$$\lg(a^2 b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right) = \lg(a^2 b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) + \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg\left(a^2 b^3 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{a}{b}\right) = \underline{\underline{\lg(a^3)}}$$

Løse opp:

$$\begin{aligned} \lg(a^2 b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right) &= \lg(a^2) + \lg(b^3) - \lg(b^2) - (\lg b - \lg a) \\ &= 2 \lg a + 3 \lg b - 2 \lg b - \lg b + \lg a = \underline{\underline{3 \lg a}} \end{aligned}$$

Oppgave 5

$$f(x) = -x^4 + 4x^3, \quad x \in \langle -2, 4 \rangle$$

a) Faktoriserer og løser med $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

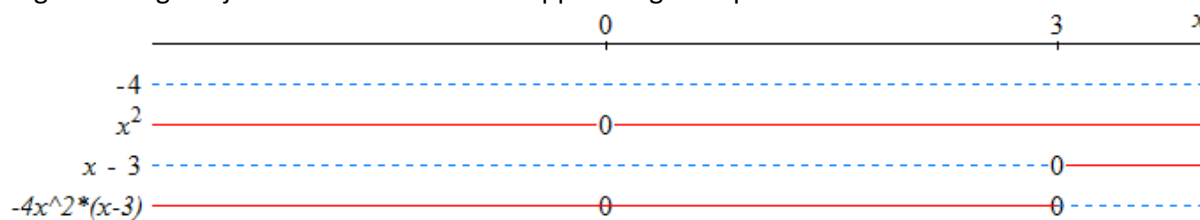
$$\begin{aligned} -x^4 + 4x^3 &= 0 \\ x^3(4 - x) &= 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x &= 4 \end{aligned}$$

Men $x = 4$ er utenfor definisjonsområdet, så $f(x)$ har et nullpunkt i $(0, 0)$

b) Finner ekstremalpunktene der den deriverte er lik 0:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x^3 + 4 \cdot 3x^2 &= 0 \\ -4x^2(x - 3) &= 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x &= 3 \end{aligned}$$

Tegner fortegnsskjema for å se hva som er toppunkt og bunnpunkt:



Ser at det er et terrassepunkt ved $x = 0$ og et toppunkt ved $x = 3$.

Finner $f(3) = -3^4 + 4 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot (-3 + 4) = 27 \cdot 1 = \underline{27}$

Svar: $f(x)$ har et toppunkt i $(3, 27)$

- c) Finner vendepunkt der den dobbeltderiverte er lik 0

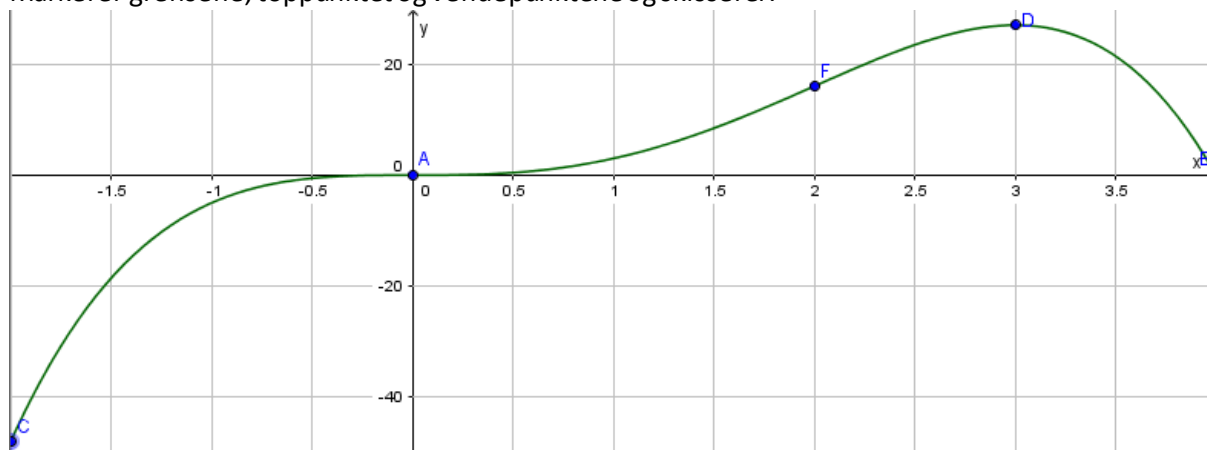
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -4 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x &= 0 \\ -12x(x - 2) &= 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Har $f(0) = 0$, og regner $f(2) = -2^4 + 4 \cdot 2^3 = 2^3(-2 + 4) = 8 \cdot 2 = 16$

Svar: $f(x)$ har vendepunkter i $(0, 0)$ og $(2, 16)$

- d) Finner $f(-2) = -(-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 = (-2)^3 \cdot (2 + 4) = -8 \cdot 6 = -48$

Markerer grensene, toppunktet og vendepunktene og skisserer:



Oppgave 6

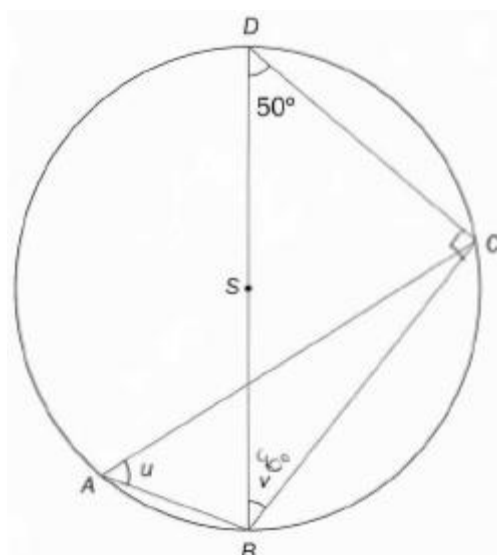
$\angle CDB$ og $\angle CAB$ er periferivinkler til den samme sentralvinkelen, altså er $\angle CAB = \angle CDB$

$$\underline{u = 50^\circ}$$

Siden BD er diameteren i sirkelen forteller Thales' setning at $\angle BCD = 90^\circ$, som betyr at den siste vinkelen i trekant BCD er $\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$$\underline{v = 40^\circ}$$

(Kan også tenke at $\angle BCD$ er periferivinkelen til sentralvinkelen $\angle BSD = 180^\circ$)



Oppgave 7

Har fra oppgaven at $P(J) = 0,60$, som betyr at $P(G) = 0,40$, der J står for jente og G for gutt.

Har også de betingede sannsynlighetene for blå øyne, B : $P(B|J) = 0,70$ og $P(B|G) = 0,55$.

a) $P(B) = P(B \cap J) + P(B \cap G) = P(B|J) \cdot P(J) + P(B|G) \cdot P(G) = 0,7 \cdot 0,6 + 0,55 \cdot 0,4 = \underline{0,64}$

Svar: Sannsynligheten for at en tilfeldig elev har blå øyne er 64%

b) $P(\bar{B}|G) = 1 - P(B|G) = 0,45$ og $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,36$. Bruker Bayes' regel:

$$P(G|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|G) \cdot P(G)}{P(\bar{B})} = \frac{0,45 \cdot 0,40}{0,36} = \underline{0,50}$$

Svar: Sannsynligheten for at en elev som ikke har blå øyne er en gutt er 50%.

Oppgaven kan løses på flere måter, f.eks. med en krysstabell. 70% av 60% betyr at 42% av elevene er jenter med blå øyne, mens 55% av 40% betyr at 22% av elevene er gutter med blå øyne. Resten er enkel aritmetikk. Fyller ut:

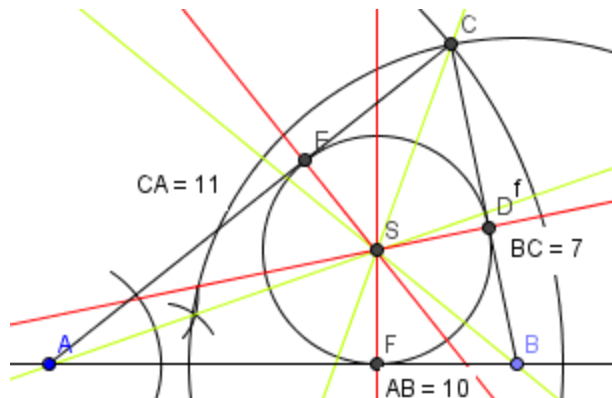
	Blå	Ikke blå	Sum
Gutt	22%	18%	40%
Jente	42%	18%	60%
Sum	64%	36%	100%

a) Leser av krysstabellen at sannsynligheten for at en tilfeldig elev har blå øyne er 64%

b) $P(G|\bar{B}) = \frac{P(G \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{18\%}{36\%} = \underline{0,50}$

Oppgave 8

a) Tegner ei rett linje, markerer et punkt A på linja, slår $10,0\text{cm}$ langs linja med en passer og markerer punkt B . Lager en halvsirkel over linja med $r = 11,0\text{cm}$ ut fra punkt A , og en halvsirkel over linja med $r = 7,0\text{cm}$ ut fra punkt B , og der halvsirklene møtes finner jeg punkt C .



b) Konstruerer halveringslinjene ved å trekke en bue som krysser vinkelbeina fra hvert hjørne, og slå to nye buer med samme avstand fra punktene der den første buen skjærer vinkelbeina (vist ved vinkel A). Halveringslinjene er grønne. Ser at de møtes i ett punkt, S .

c) Konstruerer normaler ned fra S til sidene i trekanten. Normalene er røde. De treffer sidene i punktene D , E og F .

d) Fordi punkt S ligger på halveringslinja mellom AB og AC ligger punktet like langt fra de to sidene. På samme måte ligger S like langt fra AB og BC . S ligger altså like langt fra alle de tre sidene i trekanten, og dermed må $SD = SE = SF$

Dermed vet jeg også at de tre punktene D , E og F ligger på omkretsen av sirkelen, og jeg konstruerer den innskrevne sirkelen ved å plassere passerspissen i S og blyet i D og trekke opp sirkelen.

Oppgave 9

$$\begin{aligned}\lg(x+2)^2 &= \lg x^4 \\ 10^{\lg(x+2)^2} &= 10^{\lg x^4} \\ (x+2)^2 &= x^4 \\ x+2 &= \pm x^2\end{aligned}$$

Først den negative muligheten:

$$\begin{aligned}x+2 &= -x^2 \\ x^2+x+2 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}\end{aligned}$$

Det ga ingen reelle løsninger. Så den positive muligheten:

$$\begin{aligned}x+2 &= x^2 \\ x^2-x-2 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}\end{aligned}$$

Det ga de to løsningene $x_1 = -1$ og $x_2 = 2$

En rask prøve på svaret:

$$\begin{aligned}\lg(-1+2)^2 &= \lg(-1)^4 \\ \lg 1 &= \lg 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg(2+2)^2 &= \lg 2^4 \\ \lg 16 &= \lg 16\end{aligned}$$

Det stemmer!