BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Matematisk–Naturvitenskaplig Fakultet

Eksamen i MAT220 og MAUMAT644– Algebra

Fredag, 8. Juni, 09-14, 2012

Lovlige hjelpemidler: Kalkulator I henhold til fakultetets regler.
Oppgavesettet består av 3 sider.
Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes. Det må være med tilstrekkelig mellomregning til at fremgangsmåten går tydelig frem av det du skriver.

Oppgave 1

La $\sigma \in S_{10}$ være permutasjonen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler.
2. Er σ en jevn eller en odde permutasjon?
3. Hva er ordenen til σ?

Oppgave 2

1. Klassifiser den abelske gruppen $\mathbb{Z}_{60}$ i henhold til fundamentalteoremet for endelig genererte abelske grupper.
2. Hvilken orden n har elementet 50 i $\mathbb{Z}_{60}$? Skriv ned alle elementene i $\mathbb{Z}_{60}$ som har samme orden n som 50 i $\mathbb{Z}_{60}$.
3. Hva er ordenen til $(5,5)$ i $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{15}$? Klassifiser $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{15}/\langle(5,5)\rangle$ i henhold til fundamentalteoremet for endelig genererte abelske grupper.
4. La $p \in \mathbb{Z}$ være et primtall. Forklar hvorfor $\langle p \rangle$ er eit maksimalideal i $\mathbb{Z}$.

Oppgave 3

Divisjonsalgoritmen for $\mathbb{Z}$ sier, at gitt heltall m og n der $n > 0$, da finnes entydig bestemte heltall q og r der $0 \leq r \leq n-1$ slik at $m = nq + r$. La $\mu\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ være funksjonen som tar $m \in \mathbb{Z}$ til den entydig bestemte r beskrevet ovenfor.

1. Beskriv addisjon og multiplikasjon i ringen $\mathbb{Z}_n$.
2. Vis at μ er ein homomorfisme av ringer.
3. Forklar hvorfor kjernen til μ er $n\mathbb{Z}$.
4. Bevis at $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}_n$ er isomorfe ringer. (Hint: bruk μ.)

Oppgave 4

1. Skriv polynomet $2x^2 - 10$ som et produkt av irredusible elementer i $\mathbb{Z}[x]$, og list opp de irredusible elementene i faktoriseringen.

2. Skriv polynomet $2x^2 - 10$ som et produkt av irredusible polynomer i $\mathbb{Q}[x]$, og list opp de irredusible polynomene i faktoriseringen.

3. Skriv polynomet $2x^2 - 10$ som et produkt av irredusible polynomer i $\mathbb{Q}(\sqrt{5})[x]$, og list opp de irredusible polynomene i faktoriseringen.

4. Skriv polynomet $2x^2 - 10$ som et produkt av irredusible polynomer i $\mathbb{Z}_5[x]$, og list opp de irredusible polynomene i faktoriseringen.

5. Vis at polynomet $2x^2 - 10$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$. (Hint: anta $m + n\sqrt{2}$ er et nullpunkt til $2x^2 - 10$. Hva kan du da si om m og n?)

6. Hva er graden til kroppsutvidelsen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$? (Hint: bruk 5.)

Oppgave 5

1. Bruk Euklids algoritme til å finne største felles divisor til heltallene 582 og 212. Du skal skrive ned alle utregningene.

2. Bruk Euklids algoritme til å finne heltall a og b slik at $582a + 212b = 2$.

Oppgave 6

Juniorsudoku er et 4×4 ruters kvadrat der noen ruter er fylt inn med et av tallene $\{1,2,3,4\}$ og andre ruter er blanke som vist nedenfor. Formålet er å fylle inn et av tallene $\{1,2,3,4\}$ i hver av de tomme rutene slik at hver rekke og hver kolonne og hvert av de fire øvre høyre, øvre venstre, nedre høyre og nedre venstre 2×2 kvadrat inneholder hvert av tallene 1 til 4.

Hensikten med denne oppgaven er å telle antallet ferdig utfylte juniorsudoku.

	2		4
3		1	2
		4	
	1		3

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Tabell 1: Et juniorsudoku og den ferdig utfylte utgaven.

Ved å forandre eksempelet i tabell 1 systematisk er det mulig å vise at der er nøyaktig tolv ulike ferdig utfylte juniorsudokuer der øvre venstre 2×2 kvadrat er på formen

1	2
3	4

I fortsettelsen kan du bruke dette uten å bevise det.

La den symmetriske gruppen S_4 virke på mengden X av fullførte juniorsudokuer ved at du permuterer tallene $1, 2, 3$ og 4 i rutene.

1. Forklar hvorfor mengden $X_g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ er tom for alle g i S_4 bortsett fra identiteten.

2. Forklar at mengden X/S_4 av baner har 12 elementer.

3. Bruk Burnsides formel til å regne ut antall elementer i X, det vil si antall mulige ferdigutfylde juniorsudokuer. (Du får ikke full uttelling dersom du finner tallet uten å bruke Burnsides formel.)

4. La den sykliske gruppen $C_2 = \{e, t\}$ virke på X ved permutasjon av de to nederste rekkene. Vil denne virkningen av C_2 på X indusere en virkning av C_2 på $Y = X/S_4$ definert ved $t \cdot (S_4 \cdot x) = S_4 \cdot (t \cdot x)$? Dersom denne virkningen av C_2 på Y er veldefinert, hva er i så fall kardinaltallet til Y_t ?

Morten Brun