Eksamen REA3056 matematikk R1 høst 2022

# Del 1 – uten hjelpemidler – 1 time

# Oppgave 1

Avgjør for hver av funksjonene nedenfor om den har en omvendt funksjon. Husk å begrunne svaret.

### Løsning

For at en funksjon skal ha en omvendt funksjon, må den være én-entydig, det vil si at hver funksjonsverdi, bare framkommer av kun én -verdi.

Denne funksjonen er ikke én-entydig siden for eksempel både og . Funksjonen har ikke en omvendt funksjon.

### Løsning

Funksjonen er én-entydig dersom funksjonen enten er stigende eller synkende i hele definisjonsområdet. For å avgjøre dette deriverer vi funksjonsuttrykket og undersøker om fortegnet til den deriverte endrer seg i definisjonsmengden.

er alltid større enn . Siden vil , så vil alltid være negativ. Funksjonen har derfor en omvendt funksjon i definisjonsområdet.

# Oppgave 2

Bestem grenseverdien

### Løsning

Vi ser at når , går både telleren og nevneren mot Vi regner ut telleren og undersøker om vi kan faktorisere og forkorte:

Grenseverdien til brøken når , er 8.

# Oppgave 3

Hvilket av tallene er mindre enn 10? Husk å begrunne svarene.

### Løsning

Er mindre enn 10?

Siden , er

er mindre enn 10.

Er mindre enn 10?

Logaritmen til et tall er det tallet vi må opphøye 10 i for å få tallet. , så vil derfor være et tall som er mindre enn 1. vil derfor være 10 multiplisert med et tall som er mindre enn 1.

er mindre enn 10.

Er mindre enn 1?

og

er større enn 1.

# Oppgave 4

Vi har gitt punktene .

1. Vis at

### Løsning

Hvis en vinkel er , vil skalarproduktet mellom vektorene som danner vinkelen, være lik

Vi har vist at

En linje er parallell med og går gjennom punktet .

Det er også et annet punkt på som er slik at .

1. Bestem koordinatene til

### Løsning

Hvis ei linje er parallell med en vektor, er vektoren retningsvektor for linja. Når vi i tillegg kjenner et punkt på denne linja, kan vi sette opp en parameterframstilling for linja.

Siden er , må skalarproduktet .

eller

Det første punktet vi fant, er punktet Koordinatene til er .

# Oppgave 5

Marianne har skrevet følgende program:

|  |  |
| --- | --- |
| **1** | **def f(x):** |
| **2** | **return(6\*x-3)/(x-1) #Definerer funksjonen f(x)=(6x-3)/(x-1)** |
| **3** |  |
| **4** | **h=0.00001** |
| **5** | **def Df(x):** |
| **6** | **return(f(x+h)-f(x))/h** |
| **7** |  |
| **8** | **a=1.5 #En startverdi** |
| **9** | **while Df(a)<-3:** |
| **10** | **a=a+0.001** |
| **11** |  |
| **12** | **b=f(a) - Df(a)\*a #Regner ut konstantleddet** |
| **13** |  |
| **14** | **print("y = -3x +",b)** |

Bestem verdien av variabelen som defineres på linje 12.

### Løsning

I programmet over defineres funksjonen f(x) som . En variabel h settes lik , og en ny funksjon, Df(x), defineres som .

Vi gjenkjenner Df(x) fra definisjonen til den deriverte av , og Df vil derfor representere stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen til for små verdier av .

Videre i programmet settes alik 1,5, før ei løkke gjentas så lenge Df(a) når aøker med for hver gang løkka gjentas. Når løkka avsluttes, vil med andre ord a ha en verdi som gjør at f’(a) .

Marianne ønsker å finne tangenten i et punkt på grafen til der den deriverte er .

Vi beregner derfor når den deriverte er lik :

eller

eller

Siden startverdien til og øker, vil riktig -verdi i dette tilfellet være , og representerer konstantleddet til tangenten i punktet .

I linje 12 vil beregnes som .

# Del 2 – med hjelpemidler – 2 timer

# Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser hvor mye elektrisk energi Norge produserte noen utvalgte år.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| År | 1950 | 1960 | 1970 | 1981 | 1990 | 2000 | 2012 | 2020 |
| Produksjon (GWh) | 16 924 | 31 121 | 57 606 | 93 397 | 121 848 | 142 816 | 147 716 | 154 197 |

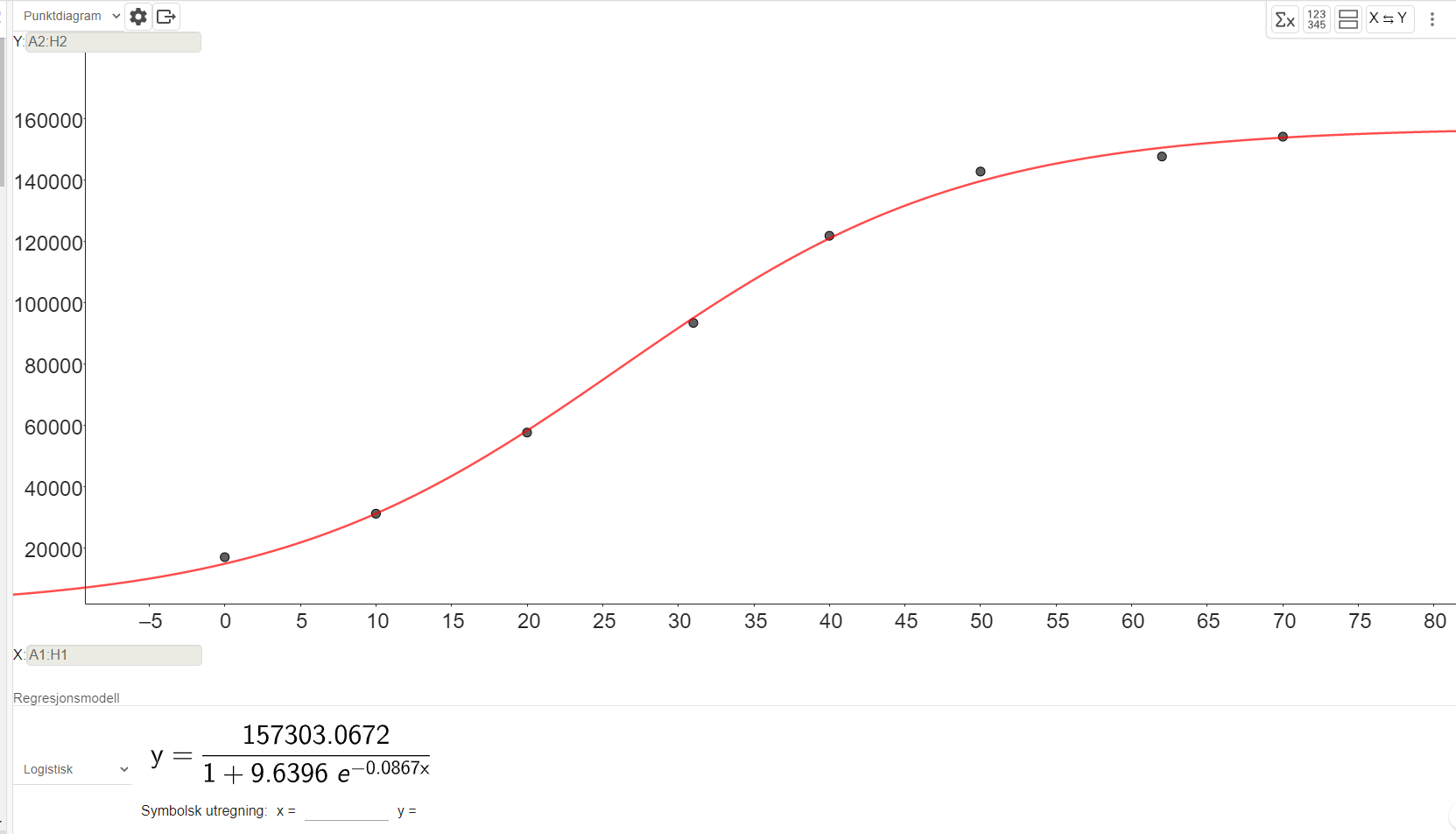
1. Bruk tallene fra tabellen til å lage en logistisk modell som viser oss Norges energiproduksjon år etter 1950.

### Løsning

Vi gjennomfører regresjon ved hjelp av GeoGebra. Vi legger inn tallene fra tabellen i regnearkdelen og bytter ut årstallene med antall år etter 1950:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 10 | 20 | 31 | 40 | 50 | 62 | 70 |
| 16 924 | 31 121 | 57 606 | 93 397 | 121 848 | 142 816 | 147 716 | 154 197 |

Vi markerer tallene i regnearket, velger regresjonsanalyse og deretter logistisk modell. Dette gir følgende resultat:

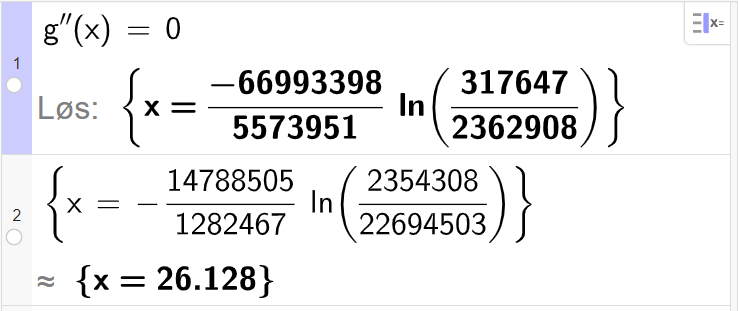
­­­

er en logistisk modell som viser oss Norges energiproduksjon år etter 1950.

1. I hvilket år økte produksjonen raskest ifølge modellen ?

### Løsning

Produksjonen økte raskest i vendepunktet. Vi finner -verdien til et vendepunkt ved å finne når den dobbeltderiverte til funksjonen er lik 0. Dette gjør vi ved å løse likning i CAS:



Produksjonen økte raskest 26,1 år etter 1950, det vil si i år 1976.

Tabellen nedenfor viser forbruket av elektrisk energi i Norge noen utvalgte år.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| År | 1950 | 1960 | 1970 | 1981 | 1990 | 2000 | 2012 | 2020 |
| Forbruk (GWh) | 16 924 | 31 253 | 56 770 | 88 161 | 105 941 | 123 761 | 129 900 | 133 725 |

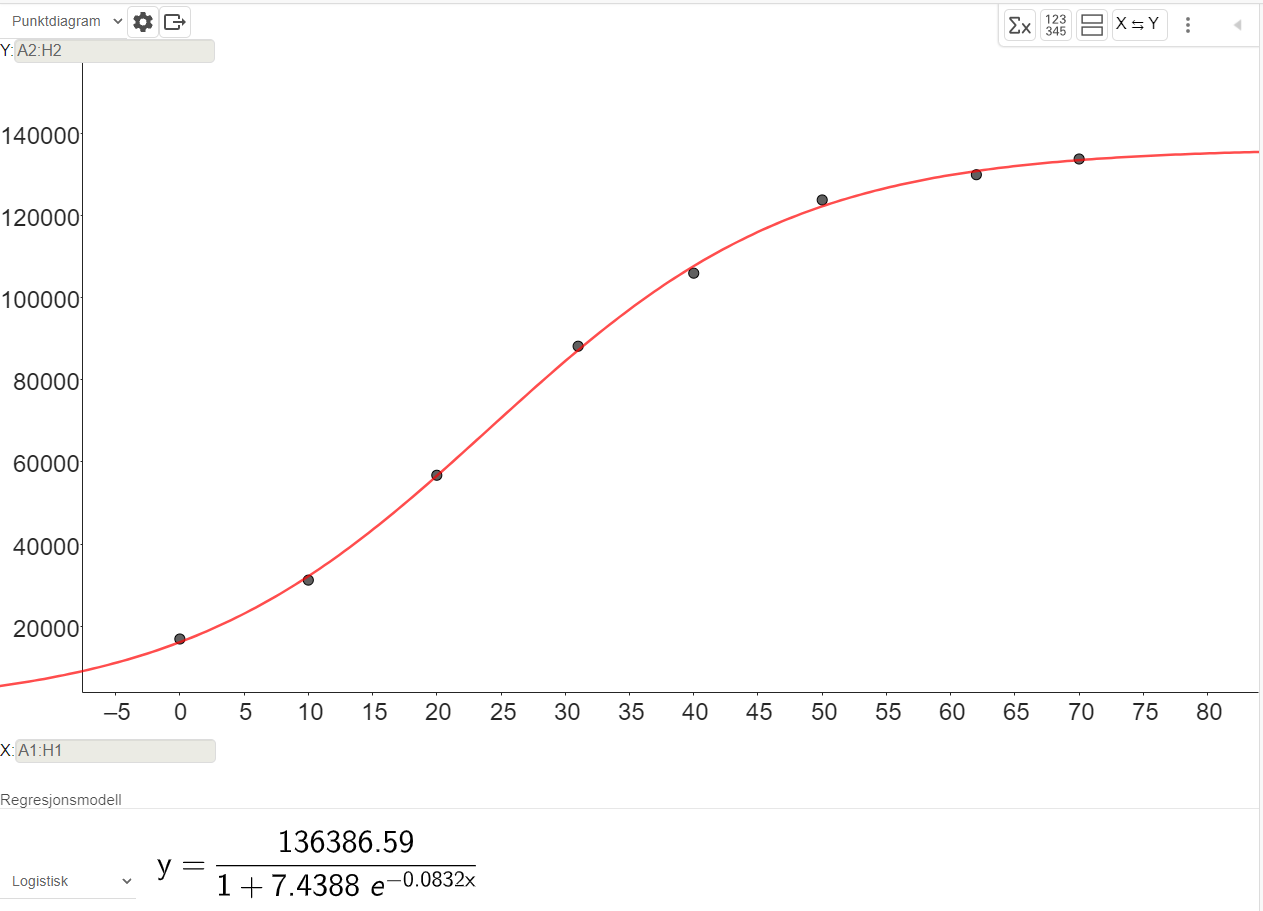
1. Bruk tallene fra tabellen til å lage en modell som du mener vi kan bruke til å vurdere om vi på sikt vil være selvforsynte med elektrisk energi.

### Løsning

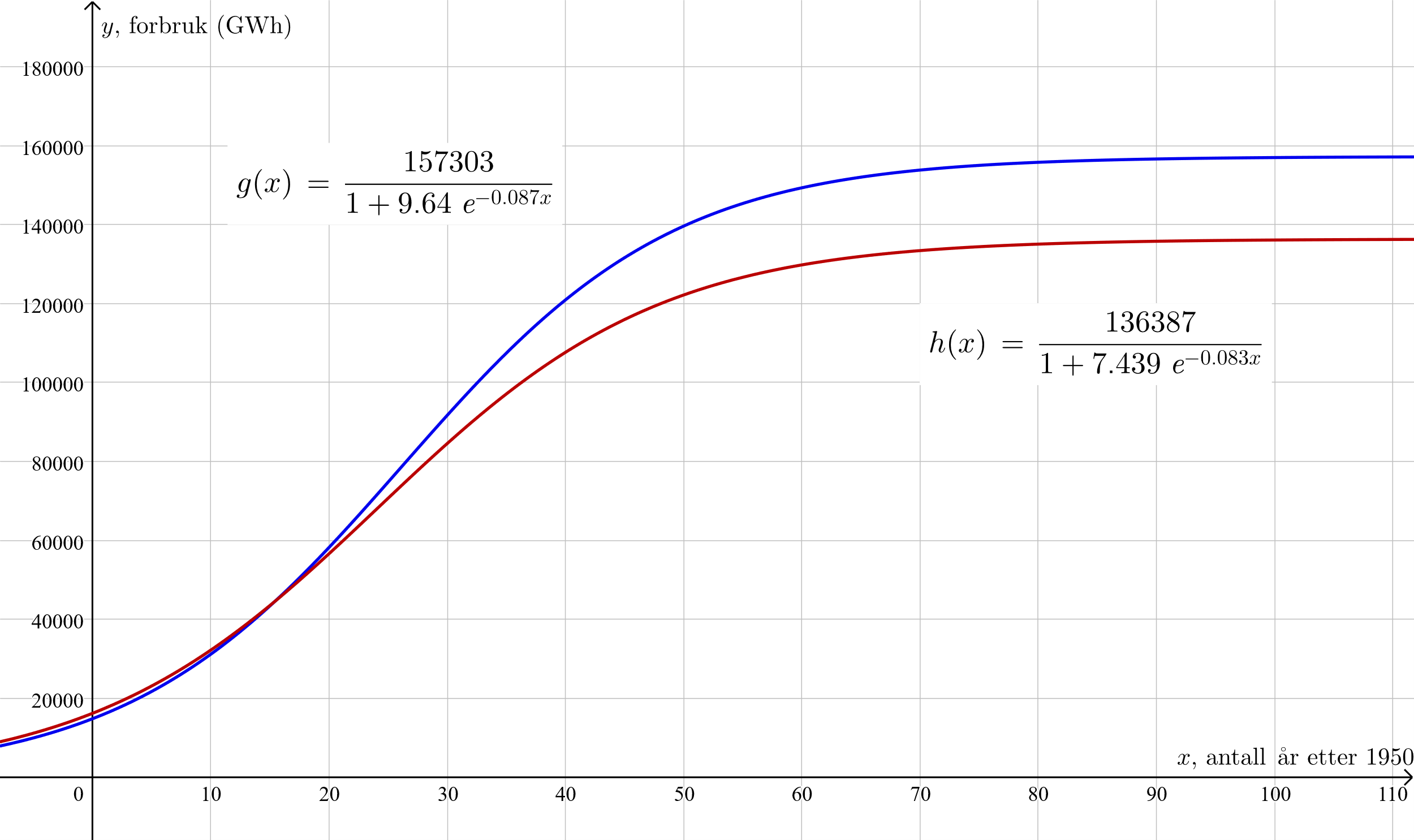
Vi gjennomfører en ny regresjon i GeoGebra ved å legge inn tallene fra tabellen i regnearket. Også nå erstatter vi årstallene med antall år etter 1950.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 10 | 20 | 31 | 40 | 50 | 62 | 70 |
| 16 924 | 31 253 | 56 770 | 88 161 | 105 941 | 123 761 | 129 900 | 133 725 |

Vi markerer tallene i regnearket, velger regresjonsanalyse og deretter logistisk modell. Dette gir følgende resultat:



Vi skriver inn begge funksjonsuttrykkene i algebrafeltet i GeoGebra og sammenlikner grafen for produksjon av elektrisk energi med grafen for forbruk av elektrisk energi:



Ut fra grafene ser vi at Norge etter 1965 har produsert mer energi enn vi forbruker. Dette kan vi også se ved løsning av likning i CAS:



# Oppgave 2

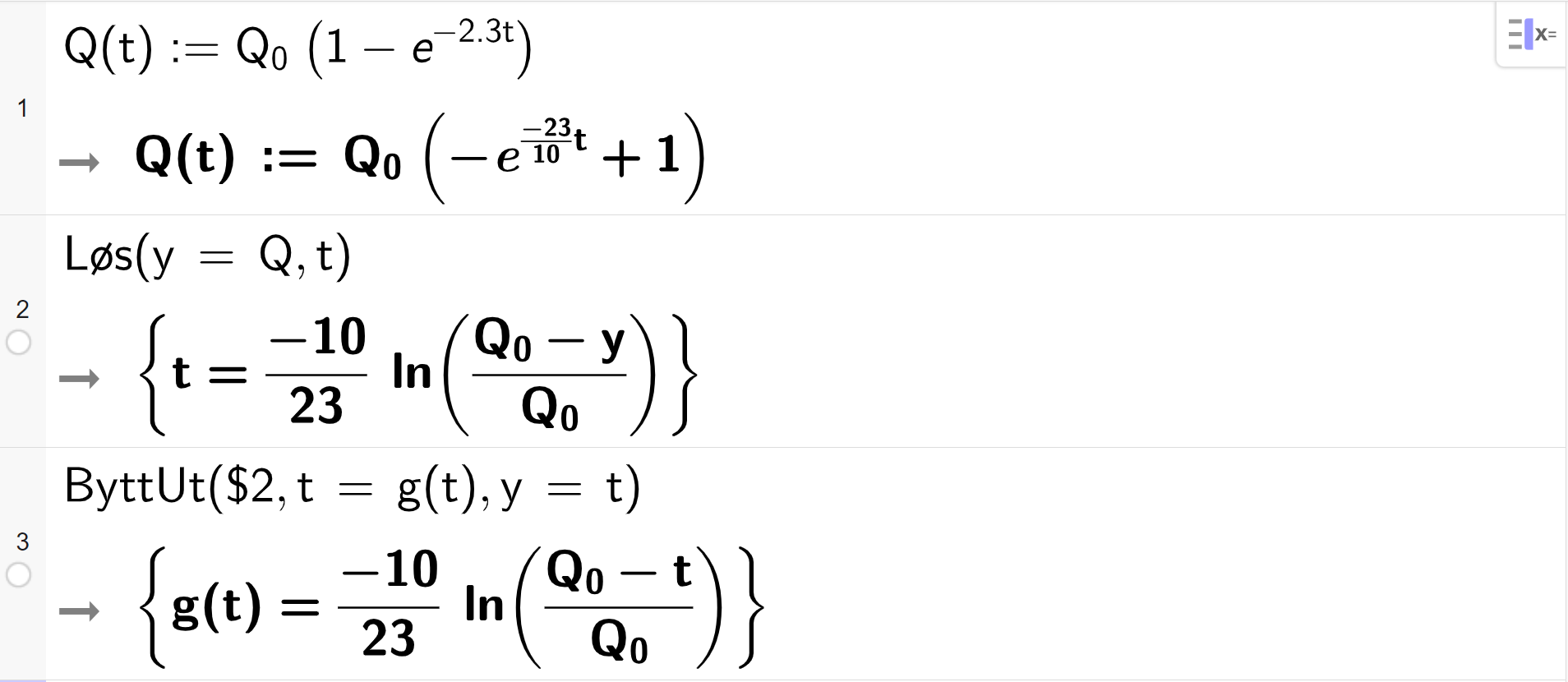
Når du bruker blitsen på et fotokamera, vil batteriet lade den opp igjen. Ladningen i blitsen sekunder etter at den går av, er gitt ved

Her er den maksimale ladningen i blitsen.

1. Bestem den omvendte funksjonen til .

### Løsning

Vi definerer funksjonen i CAS og bestemmer den omvendte funksjonen ved å løse likningen med hensyn på (kommandoen «Invers» gir ikke riktig svar):



Vi bytter navn på variablene og får at den omvendte funksjonen til er .

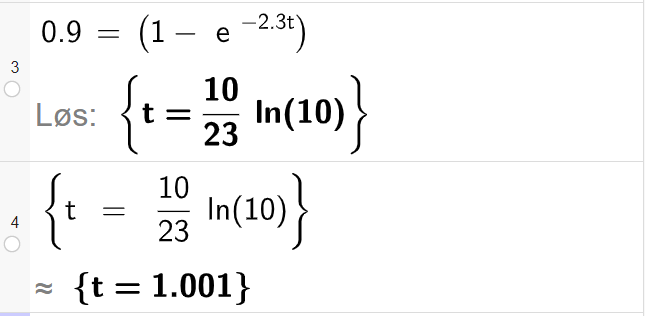
1. Hvor lang tid tar det før blitsen har fått 90 prosent av den maksimale ladningen?

### Løsning

90 prosent av den maksimale ladningen kan uttrykkes som , og ut fra dette kan vi sette opp følgende likning:

Vi ser at vi har på begge sider av likningen, og siden , kan vi forenkle likningen:

Vi løser likningen i CAS:



Det tar 1 sekund før blitsen har fått 90 prosent av den maksimale ladningen.

# Oppgave 3

Vi har gitt punktene og En stråle er gitt ved parameterframstillingen

1. Vis at ligger på.

### Løsning

Hvis punktet ligger på, må punktets koordinater passe med parameterframstillingen til :

Likningsløsning i CAS, to linjer. I linje 1 står det at 12 t er lik 24. Løsningen blir t er lik 2.
I linje 2 står det 5 t er lik 10. Løsningen blir t er lik 2. Skjermutklipp.

Vi ser at vi får samme -verdi ved løsning av likningene, og vi har dermed vist at ligger på.

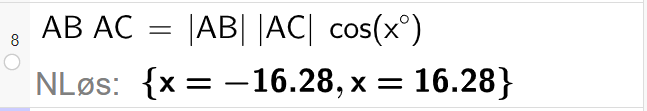
1. Bruk vektorregning til å bestemme .

### Løsning

Vi definerer punktene og i CAS, og deretter og

Definisjon av punkt og vektorer i CAS, fem linjer. I linje 1 defineres punktet A.
I linje 2 defineres punktet B. I linje 3 defineres punktet C. I linje 4 defineres vektor A B ved å skrive A B kolon er lik Vektor venstreparentes A komma B høyreparentes. I linje 5 defineres vektor A C ved å skrive A C kolon er lik Vektor venstreparentes A komma C høyreparentes. Skjermutklipp.

Vi kan nå finne ved hjelp av skalarproduktet:



.

Et annet punkt ligger på slik at .

1. Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til .

### Løsning

Når punktet ligger på, kan punktet uttrykkes ved hjelp av parameteren

Vi definerer dette punktet i CAS og bruker skalarproduktet for å bestemme :

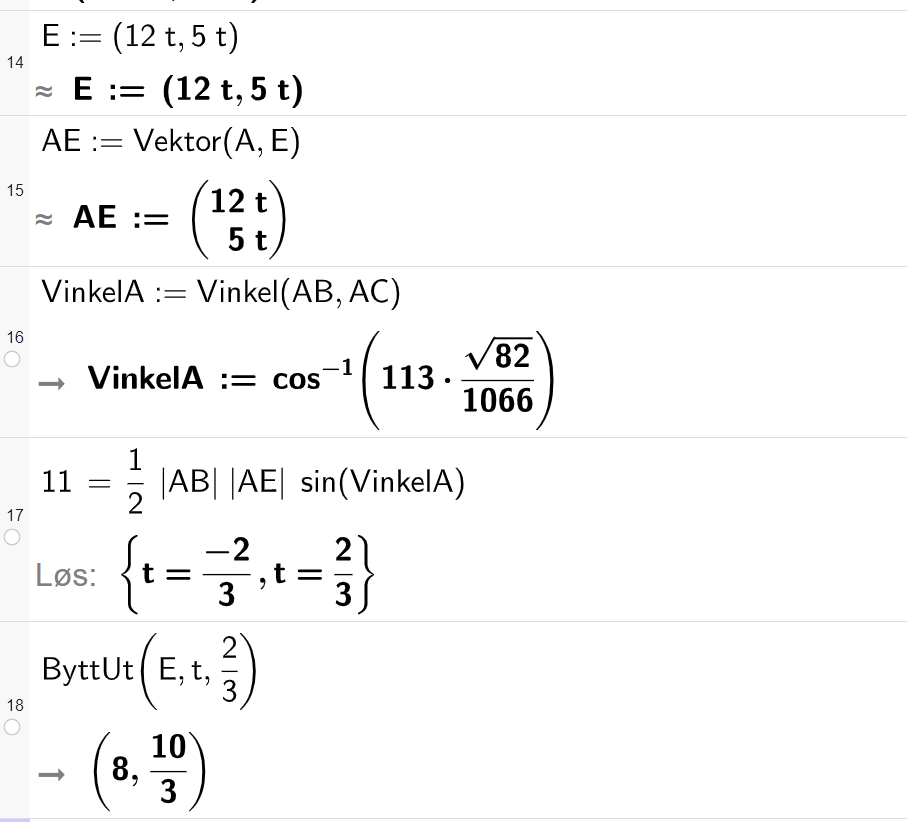
Vektorberegninger i CAS, fem linjer. I linje 1 defineres punktet D som venstreparentes 12 t komma 5 t høyreparentes. I linje 2 defineres Vektor D A som D A kolon er lik  Vektor venstreparentes D komma A høyreparentes. I linje 3 defineres Vektor D B som D B kolon er lik Vektor venstreparentes D komma B høyreparentes. I linje 4 løses likning 
med skalarproduktet av D A ganger D B er lik absoluttverdien av D A ganger absoluttverdien av D B ganger cosinus til 120 grader. Løsningen blir t er lik 0 eller t er lik et brøkuttrykk. I linje 5 står det at tilnærmet løsning er x er lik 6,67 og y er lik 2,78. Skjermutklipp.

Punktet har koordinatene .

Et punkt ligger på slik at arealet til er 11.

1. Bestem de eksakte koordinatene til .

Siden også dette punktet ligger på linja , angis det på samme måte som punktet når vi bruker parameterframstillingen. Vi kan derfor bruke samme definisjon av punktet i CAS. Vi finner først en eksakt verdi for vinkel , og siden vi vet arealet av , kan vi bruke arealsetningen til finne en ny verdi for



Vi får to verdier for , men siden er det kun som er gyldig verdi.

De eksakte koordinatene til er .

# Oppgave 4

Nedenfor ser du tre påstander. Avgjør i hvert tilfelle om påstanden er sann. Husk å argumentere!

1. Hvis for en funksjon , så er .

### Løsning

Hvis , og har vi at siden og .

Påstanden er ikke sann, for den kan motbevises.

1. Hvis , så er

### Løsning er det tallet vi må opphøye tallet i for å få Funksjonen er derfor en funksjon som vokser med økendeHvis og er positive tall og , har vi følgende:

Påstanden er sann.

1. Hvis og , så er .

### Løsning

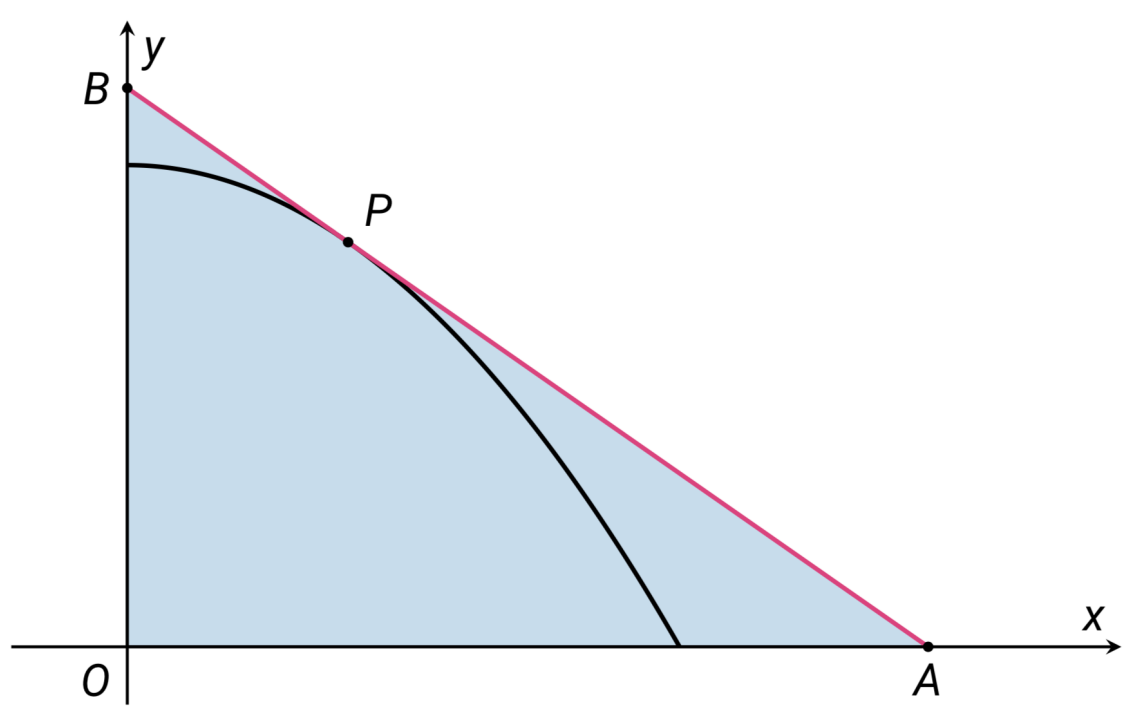
og er positive tall.

Påstanden er sann.

# Oppgave 5

En funksjon er gitt ved

La og være origo. Tangenten til grafen til i punktet skjærer -aksen i punktet og -aksen i punktet som vist på figuren.



1. Bestem arealet av når .

### Løsning

Linja fra punkt til punkt er tangent til funksjonen i punktet

Stigningstallet til tangenten i et punkt er verdien til den deriverte til funksjonen for punktets -verdi.

Den rette linja fra til går gjennom punktet og har stigningstall . Vi bruker ettpunktsformelen:

I punkt er :

Punkt er gitt ved .

I punkt er :

Punkt B er gitt ved .

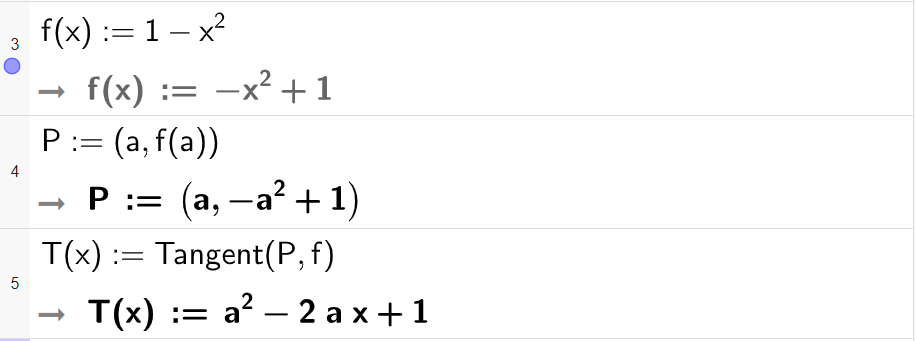
Arealet av trekanten:

1. Bestem det minste arealet kan ha.

### Løsning

Hvis vi finner et funksjonsuttrykk for arealet av trekanten, vil det minste arealet være når grafen har et bunnpunkt. I et bunnpunkt er den deriverte lik null og den andrederiverte positiv.

Vi definerer funksjonen og punktet i CAS og bestemmer et generelt uttrykk for tangenten:

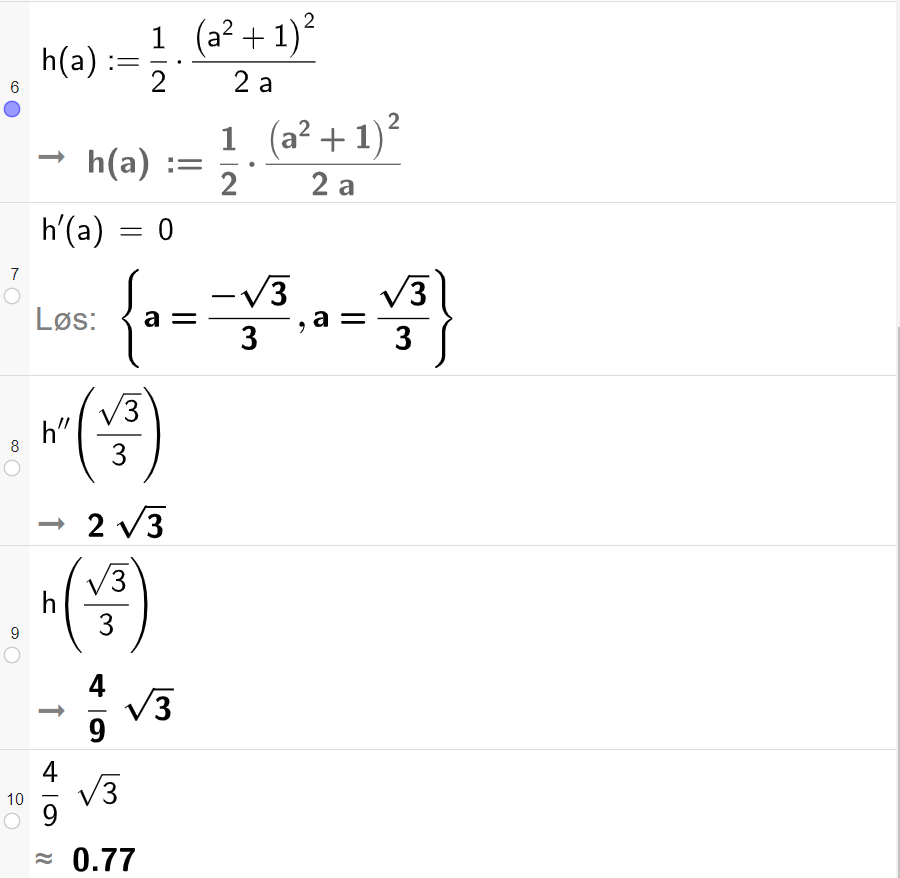


I punkt er

I punkt er :

En funksjon for arealet av trekanten er

Vi kan nå definere funksjonen i CAS og bestemme den deriverte, kontrollere fortegnet til den dobbeltderiverte og til slutt bestemme arealet:



Det minste arealet trekant kan ha, er .

# Oppgave 6

Tyngdepunktet i en trekant er gitt ved

der er origo.

Lag et program hvor du oppgir koordinatene til punktene og .

Programmet skal skrive ut koordinatene til tyngdepunktet.

### Løsning

|  |  |
| --- | --- |
| **1** | **from numpy import array** |
| **2** |  |
| **3** | **OA=array([1,3])** |
| **4** | **OB=array([2,4])** |
| **5** | **OC=array([5,2])** |
| **6** |  |
| **7** | **OT=1/3\*(OA+OB+OC)** |
| **8** |  |
| **9** | **print(f"Koordinatene er {round(OT[0],2),round(OT[1],2)}.")** |

Utskrift ved kjøring av programmet: «Koordinatene er (2.67, 3.0).»

# Oppgave 7

En funksjon er gitt ved

1. For hvilke verdier av har likningen løsning?

### Løsning

Vi bestemmer først den deriverte: .

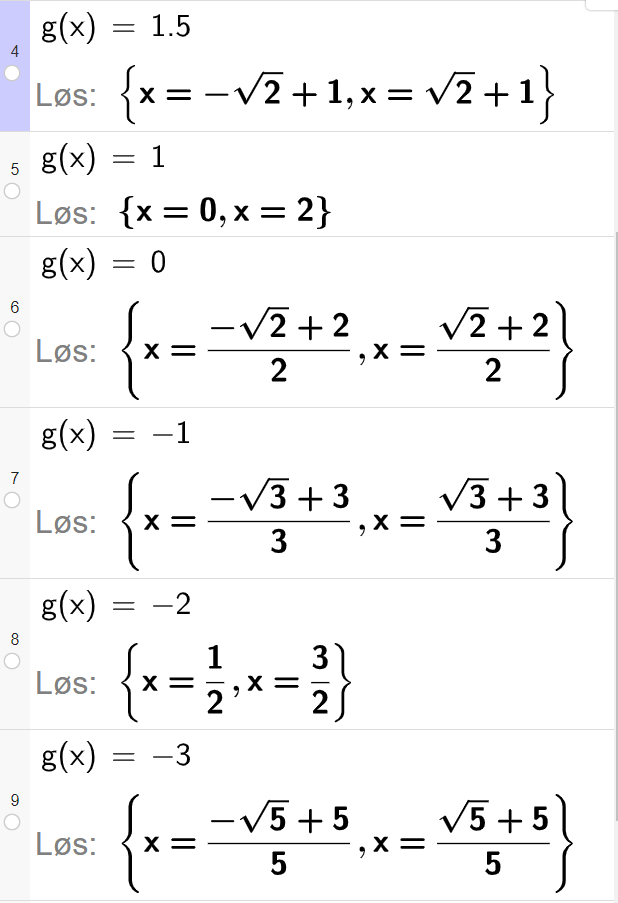
Siden brøken i uttrykket alltid vil være positiv, vil den deriverte alltid være mindre enn 2, men nærme seg 2 når går mot .

Likningen har løsning for .

1. Velg ulike verdier av , og beskriv symmetrien i løsningene til likningen for hver av disse verdiene.

### Løsning

Vi velger ulike verdier av og løser likningene:



Vi ser at likningene gir to løsninger, og at summen av løsningene alltid er lik 2. Symmetrien i løsningene er at de ligger på hver sin side av den loddrette asymptoten

La være en funksjon som kan skrives på formen

1. For hvilke verdier av har likningen løsning?

### Løsning

Ut fra det vi fant i oppgave a), kan vi si at siden brøken i uttrykket alltid vil være positiv, vil den deriverte alltid være mindre enn . Likningen har derfor en løsning dersom .

La nå

1. Utforsk og beskriv løsningene til likningen for ulike verdier av .

### Løsning

gir følgende likning:

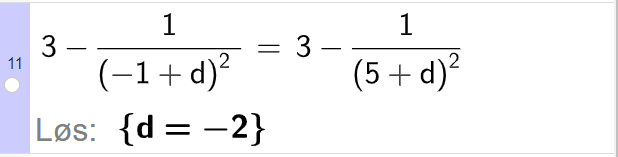
Ut fra resultatene i oppgave b) vet vi at denne funksjonen har en vertikal asymptote for . Løsningene til likningen vil for hver verdi av være symmetrisk om linja

1. Bestem og slik at og .

### Løsning

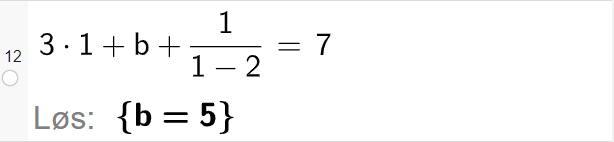
Vi setter inn i den første likningen:

Vi løser likningen i CAS:



Vi setter inn i den andre likningen:

Vi løser likningen i CAS:



Hvis og vil og .

# Kilder for bilder, tegninger osv.

Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet eller NDLA