

Eksamen

20.11.2025

REA3056 Matematikk R1



Se eksamenstips på baksiden!

Eksamensinformasjon

Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel blir delte ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar. Etter 2 timar kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Du kan bruke vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Du kan bruke alle hjelpemiddel, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. Du kan ikkje bruke kunstig intelligens til å generere innhald i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 6 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi låg uttelling. Bruk av digitale verktøy som rekneark, programmering, grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Poeng er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du • viser rekneferdigheiter og matematisk forståing • gjennomfører logiske resonnement • ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar • kan bruke formålstenlege hjelpemiddel • forklarar framgangsmåtar og grunngir svar • skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar • vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar	Kjelder for bilete, teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet.

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgave 1 (5 poeng)

a) Deriver funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + 2$$

Funksjon g gitt ved

$$g(x) = \frac{2x-3}{e^x}$$

er kontinuerleg og deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestem $g'(2)$ og $g'(3)$.

c) Kva fortel svara i oppgave b om grafen til g når $x \in [2, 3]$?

Oppgave 2 (3 poeng)

a) Løys likninga

$$(\lg x)^2 - 2\lg x = 8$$

b) Bestem a slik at

$$\log_a \frac{1}{64} = -3$$

Oppgave 3 (3 poeng)

a) Bestem grenseverdien dersom han eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x - 8}$$

b)

1) Bestem a slik at grenseverdien eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x - 8}$$

2) Bestem grenseverdien for denne verdien av a .

Oppgave 4 (6 poeng)

I eit koordinatsystem har vi gitt punkta $A(-2, 3)$ og $B(3, 2)$.

a) Bestem lengda av linjestykket AB .

Linja gjennom A og B skjer x -aksen i punktet C .

b) Bestem koordinatane til C .

Eit punkt D er gitt ved $D(2, t)$ der $t \in \mathbb{R}$.

c) Bestem t slik at $\angle ABD$ blir 90° .

Oppgave 5 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 4x^2 \cdot \ln x$$

a) Bestem koordinatane til eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f .

Ein elev jobbar med funksjonen f og har skrive programmet nedanfor:

```
1  from math import log          # log(x) er kode for ln(x)
2
3  a = 0.1
4  b = 3
5
6  maks_avvik = 0.0001
7
8  def f(x):                     # definerer funksjonen
9      |   return 4*x**2*log(x)
10
11 m = (a + b)/2
12
13 while abs(f(m)) >= maks_avvik: # abs() finn absoluttverdi
14     |
15     |   if f(a)*f(m) < 0:
16     |   |   b = m
17     |   else:
18     |   |   a = m
19     |
20     |   m = (a + b)/2
21
22 print(m)
```

b) Kva ønskjer eleven å finne ut?

Forklar kva programmet gjer i linje 11–20.

Bestem verdien som blir skriven ut når eleven køyrer programmet.

DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Tabellen nedanfor viser folketalet på ein liten tettstad, nokre år i perioden 1960–1980.

År	1960	1961	1963	1965	1967	1971	1975	1977	1980
Folketal	500	604	852	1043	1510	2163	2544	2639	2715

- a) Bruk informasjonen til å lage ein modell F på forma

$$F(t) = \frac{B}{1 + a \cdot e^{-kt}}$$

for antal personar $F(t)$ som budde på denne tettstaden t år etter 1960.

Vurder gyldigheitsområdet til modellen.

- b) Bestem $F'(12)$ og $F''(12)$.
Gi ei praktisk tolking av svara.
- c) Når auka talet på personar som budde på denne tettstaden, med meir enn 150 personar per år ifølgje modellen?

Oppgave 2 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -2 \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x & -2 < x < k \\ c & x \geq k \end{cases} \quad \text{der } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ og } k \in \langle -2, \rightarrow \rangle$$

- a) Avgjør om f er kontinuerleg når $x = -2$ dersom $a = 2$ og $b = -2$.
- b) Bestem a, b, c og k slik at f er kontinuerleg og deriverbar når $x = -2$ og når $x = k$.

Oppgave 3 (4 poeng)

Bebuarane i eit bustadområde klagar på lukt frå eit biogassanlegg. Kommunen tek luftprøver og vurderer vêrdata som vind og temperatur.

Prøvene blir analyserte, og kvar prøve blir gitt ein luktverdi C . Denne luktverdien er gitt i lukteiningar (odour units) per kubikkmeter (OU / m^3).

Samanhengen mellom C og luktintensiteten I er gitt ved

$$I = 1,4 \cdot \lg(C) - 0,3$$

Biogassanlegget er pålagt å forhalde seg til tabellen nedanfor.

Luktintensitet (I)	Vurdering
<1	uproblematisk
1–2	akseptabelt
2–3	kan aksepterst kortvarig
3–4	plagsam lukt, bør avgrensast
>4	plagsamt, tiltak krevst

Resultatet av prøvene viser luktverdiar mellom $500 OU / m^3$ og $1400 OU / m^3$.

- a) Har bebruarane grunnlag for å klage?

Biogassanlegget tek klagane på alvor og ønskjer å redusere luktplagene.

- b) Kva luktverdi må nye prøver vise for at luktintensiteten skal bli akseptabel?

Oppgave 4 (6 poeng)

Ina følger ein sti frå ei hytte til eit utsiktspunkt. I eit koordinatsystem der eininga langs aksane er meter, ligg hytta i punktet $H(0, 300)$ og utsiktspunktet i $U(1200, 400)$. Stien mellom hytta og utsiktspunktet er ei rett linje. Ina går med konstant fart.

a) Forklar at parameterframstillinga

$$l: \begin{cases} x = 1200s \\ y = 300 + 100s \end{cases} \quad s \in [0, 1]$$

gir den rette linja mellom hytta og utsiktspunktet.

Heile turen tek 20 minutt.

b) Bestem posisjonen til Ina etter 5 minutt.

c) Rekn ut farten til Ina. Gi svaret i m/s .

Jonas er ute på tur i same område som Ina. Dei to vennene møter kvarandre.

Jonas sin posisjon t minutt etter at han starta turen sin, er gitt ved

$$j: \begin{cases} x = 520 - 20t \\ y = 310 + 5t \end{cases}$$

d) Kor langt har Ina gått når ho møter Jonas?

Oppgave 5 (4 poeng)

For $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ og vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 30° .

Det er gitt at $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$.

a) Rekn ut den eksakte lengda av $\vec{p}$.

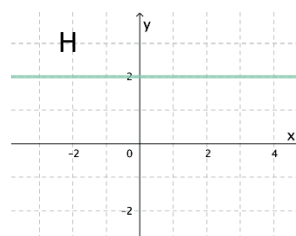
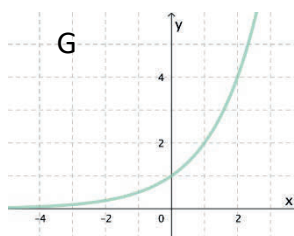
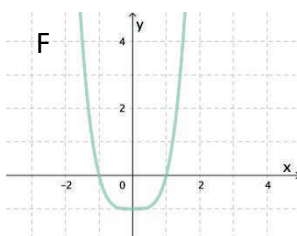
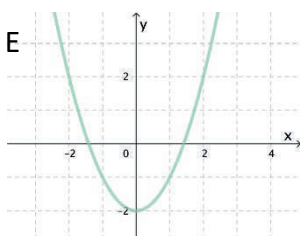
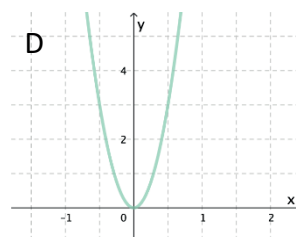
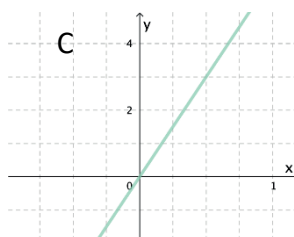
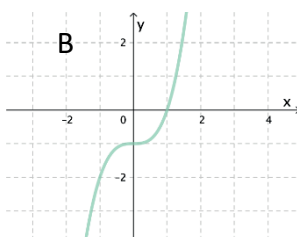
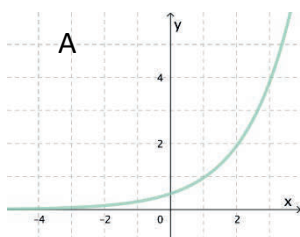
Det er gitt at $\vec{q} = t \cdot \vec{a} + \vec{b}$, der $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestem t slik at $\vec{p}$ og $\vec{q}$ blir ortogonale.

Oppgave 6 (6 poeng)

Nedanfor ser du åtte grafar.

- Ein av grafane er grafen til ein funksjon på forma a^x , der a er eit positivt heilt tal.
- Tre av grafane er grafar til funksjonar på forma $x^b - c$, der b og c er positive heile tal.
- Fire av grafane er grafane til den dobbeltderiverte til dei fire funksjonane som er beskrivne ovanfor.



a) Sorter grafane i par.

- Dei to grafane i kvart par skal vere grafen til ein funksjon og grafen til den dobbeltderiverte av funksjonen.
- Det må komme tydeleg fram kva graf som er grafen til funksjonen, og kva som er grafen til den dobbeltderiverte.

Hugs å grunngi svara.

b) Kva for nokre av dei åtte grafane ovanfor er grafar til funksjonar som har ein omvend funksjon?

Bokmål

Eksamensinformasjon

Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler blir delt ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Du kan bruke vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Du kan bruke alle hjelpemidler, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Du kan ikke bruke kunstig intelligens til å generere innhold i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav uttelling. Bruk av digitale verktøy som regneark, programmering, graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Poeng er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du • viser regneferdigheter og matematisk forståelse • gjennomfører logiske resonnementer • ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner • kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler • forklarer framgangsmåter og begrunner svar • skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger • vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Kilder for bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet.

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

a) Deriver funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{x} + 2$$

Funksjon g gitt ved

$$g(x) = \frac{2x-3}{e^x}$$

er kontinuerlig og deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestem $g'(2)$ og $g'(3)$.

c) Hva forteller svarene i oppgave b om grafen til g når $x \in [2, 3]$?

Oppgave 2 (3 poeng)

a) Løs likningen

$$(\lg x)^2 - 2\lg x = 8$$

b) Bestem a slik at

$$\log_a \frac{1}{64} = -3$$

Oppgave 3 (3 poeng)

a) Bestem grenseverdien dersom den eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x - 8}$$

b)

1) Bestem a slik at grenseverdien eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x - 8}$$

2) Bestem grenseverdien for denne verdien av a .

Oppgave 4 (6 poeng)

I et koordinatsystem har vi gitt punktene $A(-2, 3)$ og $B(3, 2)$.

a) Bestem lengden av linjestykket AB .

Linja gjennom A og B skjærer x -aksen i punktet C .

b) Bestem koordinatene til C .

Et punkt D er gitt ved $D(2, t)$ der $t \in \mathbb{R}$.

c) Bestem t slik at $\angle ABD$ blir 90° .

Oppgave 5 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 4x^2 \cdot \ln x$$

a) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

En elev jobber med funksjonen f og har skrevet programmet nedenfor:

```
1  from math import log                # log(x) er kode for ln(x)
2
3  a = 0.1
4  b = 3
5
6  maks_avvik = 0.0001
7
8  def f(x):                            # definerer funksjonen
9      return 4*x**2*log(x)
10
11 m = (a + b)/2
12
13 while abs(f(m)) >= maks_avvik:        # abs() finner absoluttverdi
14
15     if f(a)*f(m) < 0:
16         b = m
17     else:
18         a = m
19
20     m = (a + b)/2
21
22 print(m)
```

b) Hva ønsker eleven å finne ut?

Forklar hva programmet gjør i linje 11–20.

Bestem verdien som blir skrevet ut når eleven kjører programmet.

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser folketallet på et lite tettsted, noen år i perioden 1960–1980.

År	1960	1961	1963	1965	1967	1971	1975	1977	1980
Folketall	500	604	852	1043	1510	2163	2544	2639	2715

- a) Bruk informasjonen til å lage en modell F på formen

$$F(t) = \frac{B}{1 + a \cdot e^{-kt}}$$

for antall personer $F(t)$ som bodde på dette tettstedet t år etter 1960.

Vurder modellens gyldighetsområde.

- b) Bestem $F'(12)$ og $F''(12)$.

Gi en praktisk tolkning av svarene.

- c) Når økte antall personer som bodde på dette tettstedet, med mer enn 150 personer per år ifølge modellen?

Oppgave 2 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -2 \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x & -2 < x < k \\ c & x \geq k \end{cases} \quad \text{der } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ og } k \in \langle -2, \rightarrow \rangle$$

- a) Avgjør om f er kontinuerlig når $x = -2$ dersom $a = 2$ og $b = -2$.
- b) Bestem a, b, c og k slik at f er kontinuerlig og deriverbar når $x = -2$ og når $x = k$.

Oppgave 3 (4 poeng)

Beboerne i et boligområde klager på lukt fra et biogassanlegg. Kommunen tar luftprøver og vurderer værdata som vind og temperatur.

Prøvene analyseres, og hver prøve gis en luktverdi C . Denne luktverdien er gitt i luktenheter (odour units) per kubikkmeter (OU / m^3).

Sammenhengen mellom C og luktintensiteten I er gitt ved

$$I = 1,4 \cdot \lg(C) - 0,3$$

Biogassanlegget er pålagt å forholde seg til tabellen nedenfor.

Luktintensitet (I)	Vurdering
< 1	uproblematisk
1–2	akseptabelt
2–3	kan aksepteres kortvarig
3–4	plagsom lukt, bør begrenses
> 4	plagsomt, tiltak kreves

Resultatet av prøvene viser luktverdier mellom $500 OU / m^3$ og $1400 OU / m^3$.

- a) Har beboerne grunnlag for å klage?

Biogassanlegget tar klagene på alvor og ønsker å redusere luktplagene.

- b) Hvilken luktverdi må nye prøver vise for at luktintensiteten skal bli akseptabel?

Oppgave 4 (6 poeng)

Ina følger en sti fra ei hytte til et utsiktspunkt. I et koordinatsystem der enheten langs aksene er meter, ligger hytta i punktet $H(0, 300)$ og utsiktspunktet i $U(1200, 400)$. Stien mellom hytta og utsiktspunktet er en rett linje. Ina går med konstant fart.

a) Forklar at parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 1200s \\ y = 300 + 100s \end{cases} \quad s \in [0, 1]$$

gir den rette linja mellom hytta og utsiktspunktet.

Hele turen tar 20 minutter.

b) Bestem posisjonen til Ina etter 5 minutter.

c) Regn ut farten til Ina. Gi svaret i m/s .

Jonas er ute på tur i samme område som Ina. De to vennene møter hverandre.

Jonas sin posisjon t minutter etter at han startet sin tur, er gitt ved

$$j: \begin{cases} x = 520 - 20t \\ y = 310 + 5t \end{cases}$$

d) Hvor langt har Ina gått når hun møter Jonas?

Oppgave 5 (4 poeng)

For $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ og vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 30° .

Det er gitt at $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$.

a) Regn ut den eksakte lengden av $\vec{p}$.

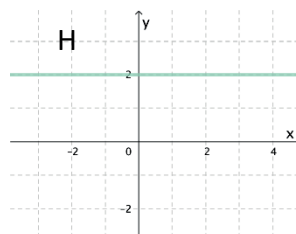
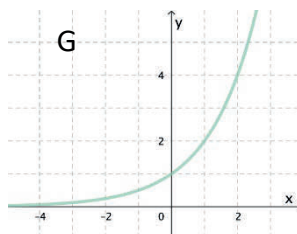
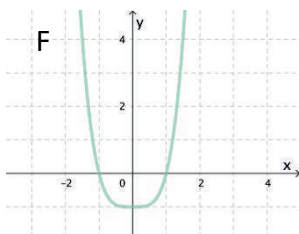
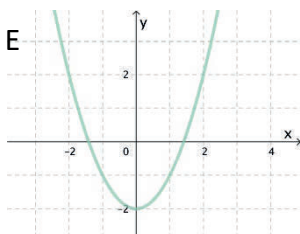
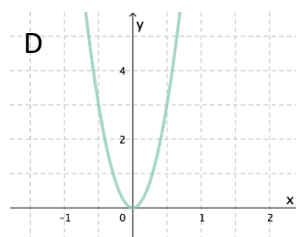
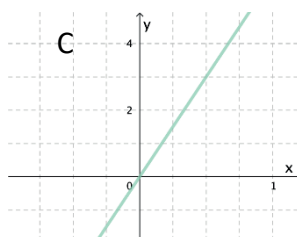
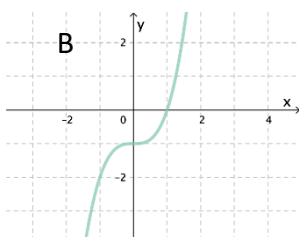
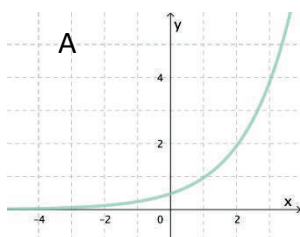
Det er gitt at $\vec{q} = t \cdot \vec{a} + \vec{b}$, der $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestem t slik at $\vec{p}$ og $\vec{q}$ blir ortogonale.

Oppgave 6 (6 poeng)

Nedenfor ser du åtte grafer.

- En av grafene er grafen til en funksjon på formen a^x , der a er et positivt helt tall.
- Tre av grafene er grafer til funksjoner på formen $x^b - c$, der b og c er positive hele tall.
- Fire av grafene er grafene til den dobbeltderiverte til de fire funksjonene som er beskrevet ovenfor.



a) Sorter grafene i par.

- De to grafene i hvert par skal være grafen til en funksjon og grafen til den dobbeltderiverte av funksjonen.
- Det må komme tydelig fram hvilken graf som er grafen til funksjonen, og hvilken som er grafen til den dobbeltderiverte.

Husk å begrunne svarene.

b) Hvilke av de åtte grafene ovenfor er grafer til funksjoner som har en omvendt funksjon?

Blank side

Blank side

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgåva:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgaven:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!