

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene gitt ved

a) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

b) $g(x) = 5\ln(x^3 - x)$

c) $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Polynomet P er gitt ved

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x + k$$

- Vis at P er delelig med $(x-2)$ hvis og bare hvis $k = -8$.
- Sett $k = -8$ og faktoreriser P ved hjelp av lineære faktorer.
- Løs ulikheten $P(x) \leq 0$.

Oppgave 3 (7 poeng)

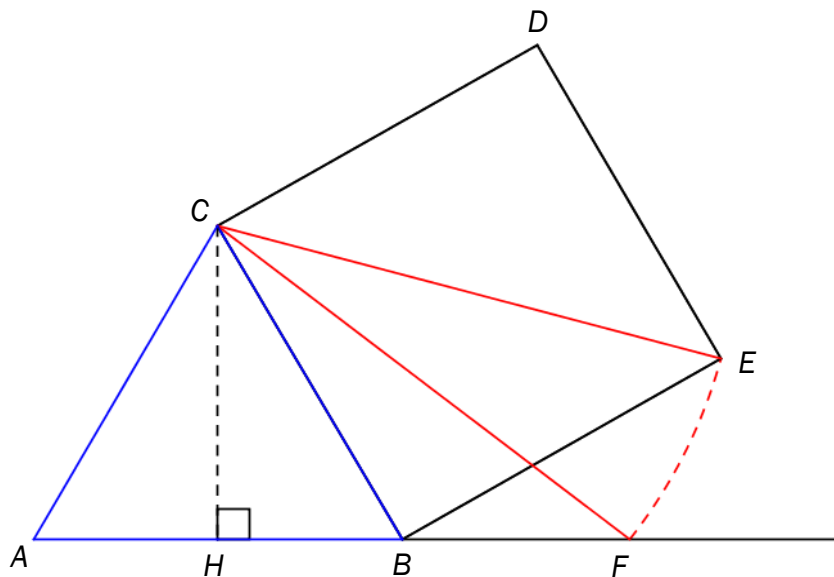
Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 e^{1-x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

- Vis at $f'(x) = 2x(1-x^2)e^{1-x^2}$.
- Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f .
- Lag en skisse av grafen til f , når du får vite at $f(x) \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \pm\infty$.
- Bruk skissen til å avgjøre hvor mange vendepunkt grafen til f har. Marker vendepunktene på skissen.

Oppgave 4 (4 poeng)

En likesidet $\triangle ABC$ har side lik 6 cm. Høyden fra C treffer AB i H . $\square BEDC$ er et kvadrat. En sirkelbue med sentrum i C og radius CE treffer forlengelsen av AB i punktet F . Se figuren nedenfor.



- Bestem lengdene av linjestykkene CH , CF og HF .
- Vis at forholdet $\frac{AF}{AB}$ er lik «det gyldne snitt» $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oppgave 5 (6 poeng)

Punktene $A(1, 1)$, $B(5, 2)$ og $C(3, 5)$ er gitt.

- a) Bruk vektorregning til å avgjøre om punktene ligger på en rett linje.

Punktet D er gitt ved $D(0, t)$.

- b) Bestem eventuelle verdier av t slik at $\angle CDA = 90^\circ$.
- c) Bestem eventuelle verdier av t slik at $\square ABCD$ blir et trapes.

Oppgave 6 (4 poeng)

Elevene på Vg1 må velge fag for Vg2. Camilla vil ha realfag som sitt programområde og må derfor velge minst to realfag. Skolen tilbyr fem realfag og åtte fag fra andre programområder.

- a) Hvor mange fagkombinasjoner er mulig dersom hun skal ha to realfag og to andre fag?
- b) Camilla skal velge fire fag. Hvor mange fagkombinasjoner er mulig dersom minst to av fagene skal være realfag?

Oppgave 7 (5 poeng)

En funksjon f er gitt på formen

$$f(x) = x^2 + px + q$$

Vi kan finne eventuelle nullpunkt til f ved hjelp av en geometrisk konstruksjon. Framgangsmåten er gitt i boksen nedenfor.

- 1) Sett av punktene $A(0, 1)$ og $B(-p, q)$ i et koordinatsystem.
- 2) Konstruer sirkelen som har AB som diameter.
- 3) Skjæringspunktene mellom sirkelen og x -aksen er nullpunktene til f

a) Bruk framgangsmåten til å konstruere sirkelen når

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

Hva er nullpunktene til f , ifølge konstruksjonen?

Vi vil nå se på det generelle tilfellet

$$f(x) = x^2 + px + q$$

b) Vis at sentrum S og radien r til sirkelen er gitt ved

$$S\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right) \quad \text{og} \quad r = \sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}$$

c) Bestem likningen for sirkelen uttrykt ved p og q . Vis at sirkelen skjærer x -aksen i nullpunktene til funksjonen f .

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Vi har to bunker med kort. I bunke A er det 5 røde og 3 svarte kort. I bunke B er det 3 røde og 4 svarte kort.

Vi velger tilfeldig én av bunkene og trekker tilfeldig 2 kort fra denne bunken.

Vi definerer følgende hendelser:

F : Vi velger bunke A

R : Vi trekker 2 røde kort

- Bestem $P(F)$, $P(\bar{F})$, $P(R|F)$ og $P(R|\bar{F})$.
- Bestem $P(R)$.
- Bruk Bayes' setning til å bestemme $P(F|R)$.

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 5e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f .

Rektangelet $OABC$ er gitt ved punktene $O(0, 0)$, $A(x, 0)$, $B(x, f(x))$ og $C(0, f(x))$.

b) Forklar at arealet til rektangelet er gitt ved

$$T(x) = 5xe^{-\frac{x}{2}}$$

c) Bestem det største arealet rektangelet kan få. Bestem den tilhørende verdien for x .

Oppgave 3 (8 poeng)

Gitt tre punkt $A(1, 3)$, $B(4, 0)$ og $C(5, 5)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ gjennom B og C .

b) Et punkt P ligger på linjen ℓ . Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AP} = [3+t, -3+5t]$ for en $t \in \mathbb{R}$.

c) Bruk blant annet skalarprodukt til å finne koordinatene til P slik at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$.

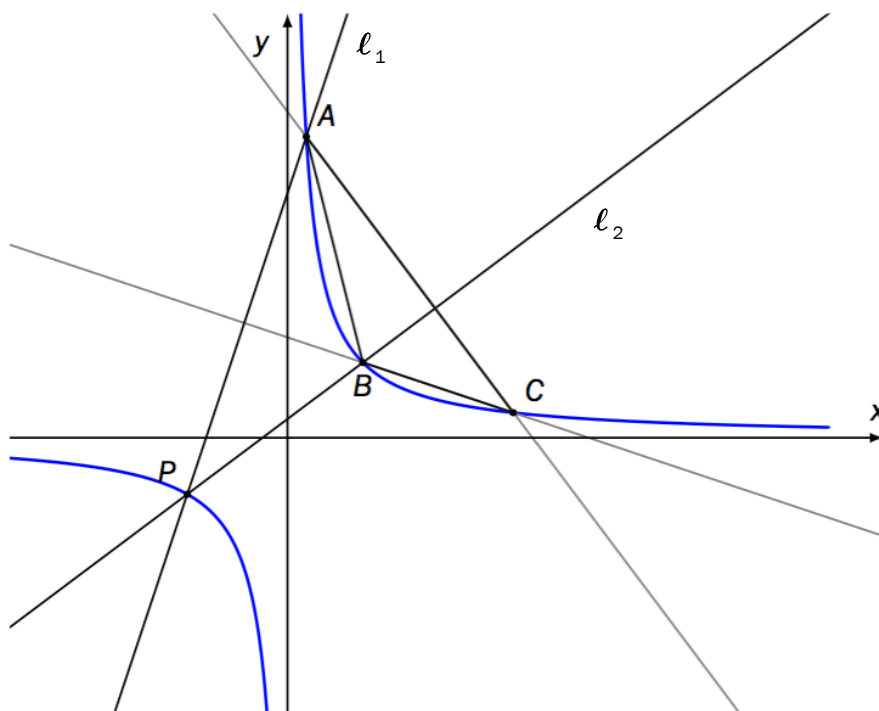
d) Bruk CAS til å bestemme hvilke koordinater P kan ha når $\angle BAP = 45^\circ$.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$\triangle ABC$ har hjørnene $A(r, f(r))$, $B(s, f(s))$ og $C(t, f(t))$ på grafen til f , der $r, s, t \in \mathbb{R}$ er tre parametere.



- a) Vis at linjen l_1 gjennom A som står normalt på linjen gjennom B og C , er gitt ved

$$y = st(x-r) + \frac{1}{r}$$

På samme måte kan vi vise at linjen l_2 gjennom B som står normalt på linjen gjennom A og C , er gitt ved

$$y = rt(x-s) + \frac{1}{s}$$

- b) Linjene l_1 og l_2 skjærer hverandre i et punkt P . Bruk CAS til å vise at P alltid vil ligge på grafen til f .