Eksamen

17.11.2025

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel blir delte ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 3 timar. Etter 3 timar kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Du kan bruke vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Du kan bruke alle hjelpemiddel, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. Du kan ikkje bruke kunstig intelligens til å generere innhald i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 8 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi låg/noka utteljing. Bruk av digitale verktøy som rekneark, programmering, grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Poeng er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du • viser rekneferdigheiter og matematisk forståing • gjennomfører logiske resonnement • ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar • kan bruke formålstenlege hjelpemiddel • forklarer framgangsmåtar og grunngir svar • skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar • vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar	Kjelder for bilete, teikningar og grafiske framstillingar: https://pixabay.com/ Utdanningsdirektoratet.

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 **(2 poeng)**

Bestem integralet

$$\int 4x \cdot \cos x \, dx$$

Oppgåve 2 **(2 poeng)**

Funksjonen f er gitt ved

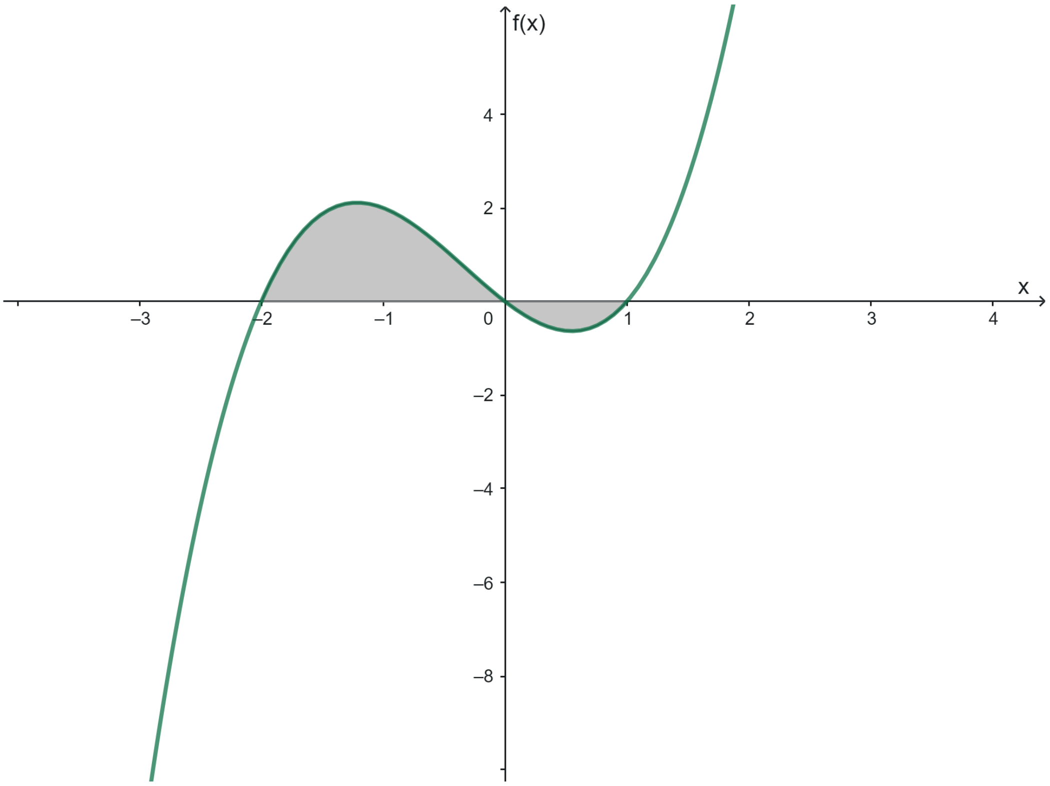
$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad D_f = [0, 10]$$

Innsida av ein kopp har same form som vi får når vi dreier grafen til f 360° om førsteaksen i eit koordinatsystem der eininga langs aksane er cm.

Kor mykje kakao er det plass til i koppen dersom han blir fylt heilt opp?

Oppgåve 3 (5 poeng)

Nedanfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



a) Kva for eitt av uttrykka nedanfor gir arealet av det markerte området på figuren?
Hugs å grunngi svaret ditt.

1. $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

2. $\int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

3. $\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

4. $\int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

b) Rekn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønskjer å finne ein verdi $a < 0$, som er slik at $\int_{a}^{1} f(x)\,dx = 0$.

Han bruker ein kalkulator og finn at $a \approx -0{,}6$.

Unni påstår at likninga til Kristian har to løysingar.

c) Forklar kvifor påstanden til Unni er rett, og bruk figuren til å anslå omtrent kva verdi den andre løysinga kan ha.

Oppgåve 4 (4 poeng)

a) Løys likninga

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \quad , \quad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

Ta utgangspunkt i likninga

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - a\right) = 0 \ , \ x \in \left[0, 2\pi\right\rangle \text{ og } a \in \mathbb{R}$$

b) For kva verdiar av a har likninga høvesvis to, tre og fire løysingar?

Oppgåve 5 (2 poeng)

Avgjer om kvar av påstandane nedanfor er sann eller usann.
Hugs å grunngi svara dine.

Påstand 1

Vi kan tolke arealet under ein fartsgraf som akselerasjon.

Påstand 2

Ein vinkel på 36° er det same som ein vinkel på $\frac{\pi}{5}$ radianar.

Oppgåve 6 (6 poeng)

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekkja

$$-3 + 0 + 3 + \ldots + 69$$

a) Bestem summen av rekkja.

Ta utgangspunkt i den uendelege geometriske rekkja

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \ldots$$

b) Bestem konvergensområdet til rekkja.

Ein ball fell frå 2 meters høgd. Kvar gong ballen treffer bakken, sprett han opp til ei høgd som er $75\ \%$ av høgda han fall frå.

c) Kor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

Oppgåve 7 **(6 poeng)**

Ei likning for ei kuleflate S er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4$$

a) Bestem sentrum og radius til kuleflata S.

Ei anna kuleflate K har sentrum i $(1, -1, 3)$ og radius 2.

Eit plan α tangerer kuleflata K i punktet $P(3, -1, 3)$.

b) Bestem ei likning for plan α.

Eit anna plan β er gitt ved

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

c) Avgjer om plan β vil skjere gjennom kuleflata K.

Oppgåve 8 **(3 poeng)**

Vis ved induksjon at

$$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \quad \text{for } n \geq 0$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Ein miniubåt passerer 250 meter under ei bøye som ligg på havoverflata.
I eit koordinatsystem der x-aksen og y-aksen ligg parallelt med havoverflata, z-aksen står normalt på havoverflata, og eininga langs aksane er meter, er posisjonen til miniubåten t sekund etter passeringa gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[6t,\ 7t,\ -250 - 5t + 0{,}1t^2\right] \quad \text{der} \quad t \in [0,\ 60]$$

a) Bestem farten til miniubåten etter 2 sekund.

b) Kor langt under havoverflata er miniubåten på det djupaste?

Posisjonen til ein fiskestim i området t sekund etter at miniubåten passerte under bøya, er gitt ved

$$\vec{s}(t) = \left[40 + 2t,\ 60 + 2t,\ -250\right] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

Fiskestimen har ei tilnærma kuleform med radius på 15 meter. Miniubåten er 4 meter brei, 5 meter høg og 8 meter lang.

c) Gjer berekningar og vurder om miniubåten kjem til å kollidere med fiskestimen.

Oppgåve 2 (6 poeng)

Tabellen nedanfor viser elektrisk spenning målt i ein stikkontakt i Noreg.

Sekund etter at målingane starta (t)	0,0020	0,0050	0,0070	0,0100	0,0130	0,0150	0,0180	0,0200
Målt spenning (U)	189	323	259	–2,12	–261	–327	–189	3,52

a) Bestem ein modell U for spenninga $U(t)$ volt (V) i stikkontakten t sekund etter at målingane starta.

b) På kva tidspunkt i løpet av dei første 0,0200 sekunda er spenninga 230 V ifølgje modellen?

Nettspenninga i Noreg (den elektriske spenninga i vanlege stikkontaktar) er 230 V.

Truls lurer på om målingane som er gjorde, kan vere rette. Han finn ut at spenninga i kontakten er ei vekselspenning. Det betyr at spenninga varierer periodisk med tida. Når spenninga blir oppgitt å vere 230 V, er dette noko som kallast effektivverdien til spenninga og er gitt ved

$$U_{effektiv} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (U(t))^2 \, dt}$$

der T er perioden til funksjonen U.

c) Bruk modellen frå oppgåve a og formelen ovanfor til å hjelpe Truls med å avgjere om målingane kan vere rette.

Oppgåve 3 **(4 poeng)**

Karbontetraklorid (CCl_4) er eit skadeleg stoff som blir brote sakte ned i kroppen og delvis lagra i feittvev. Så lenge konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen er under 10 einingar, klarer levra å skilje ut stoffet som normalt. Når konsentrasjonen overstig 10 einingar, begynner ammoniakk å hope seg opp i blodet, og det blir potensielt farleg.

Sofie skal bu nær eit gammalt industriområde der det har gått føre seg ulovleg dumping av kjemikaliar. Kvar natt kjem ho til å puste inn CCl_4 som fordampar frå grunnen og kjem inn på soverommet hennar gjennom ventilasjon og sprekkar i kjellaren.

Sofie blir utsett for 2 einingar CCl_4 per natt. Vi reknar med at kroppen hennar klarer å skilje ut $18\ \%$ av total mengd i kroppen i løpet av ein dag.

Anta at Sofie berre skil ut CCl_4 når ho ikkje blir utsett for stoffet, og at ho berre blir utsett for CCl_4 om natta.

a) Rekn ut kor mange netter Sofie kan sove på soverommet sitt før konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen hennar kjem opp på eit potensielt farleg nivå.

Sofie les ein artikkel om CCl_4 der det blir påstått at ein voksen person aldri vil ha meir enn 10 einingar av stoffet i kroppen dersom personen blir utsett for 2 einingar CCl_4 per natt.

b) Rekn ut kor mange prosent av mengda CCl_4 artikkelen antek at ein voksen person skil ut frå kroppen per dag.

Oppgåve 4 **(4 poeng)**

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3^{2x}$$

Programmet nedanfor bereknar arealet avgrensa av grafen til f, x- aksen og linjene $x = 0$ og $x = 2$ ved hjelp av to ulike metodar.

```python
start = 0
slutt = 2
n = 100

dx = (slutt-start)/n

def f(x):
    return 3**(2*x)

def areal_til_hogre():
    areal = 0
    for i in range(n):
        x = start + i*dx
        areal = areal + f(x)*dx
    return areal

def areal_til_venstre():
    areal = 0
    for i in range(1, n+1):
        x = start + i*dx
        areal = areal + f(x)*dx
    return areal

print(areal_til_hogre())
print(areal_til_venstre())
```

a) Forklar kvifor den eine metoden vil gi ein litt for høg verdi for arealet, og den andre metoden ein litt for låg verdi.

b) Lag eit program som bereknar arealet meir nøyaktig utan å dele det opp i fleire delar. Ta utgangspunkt i koden nedanfor, og skriv ferdig funksjonen «betre_metode()».
Om du programmerer i eit anna programmeringsspråk enn Python, må du først skrive ein kode som samsvarer med koden nedanfor i språket du bruker.

Hugs å leggje ved skjermbilete av programmet du lagar, og resultatet du får når du køyrer programmet.

```
start = 0
slutt = 2
n = 100

dx = (slutt-start)/n

def f(x):
    return 3**(2*x)

def betre_metode():
    areal = 0

    #skriv ny kode her

    return areal

print(betre_metode())
```

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler blir delt ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 3 timer. Etter 3 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Du kan bruke vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Du kan bruke alle hjelpemidler, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Du kan ikke bruke kunstig intelligens til å generere innhold i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 8 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som regneark, programmering, graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Poeng er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du • viser regneferdigheter og matematisk forståelse • gjennomfører logiske resonnementer • ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner • kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler • forklarer framgangsmåter og begrunner svar • skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger • vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Kilder for bilder, tegninger og grafiske framstillinger: https://pixabay.com/ Utdanningsdirektoratet.

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Bestem integralet

$$\int 4x \cdot \cos x \, dx$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

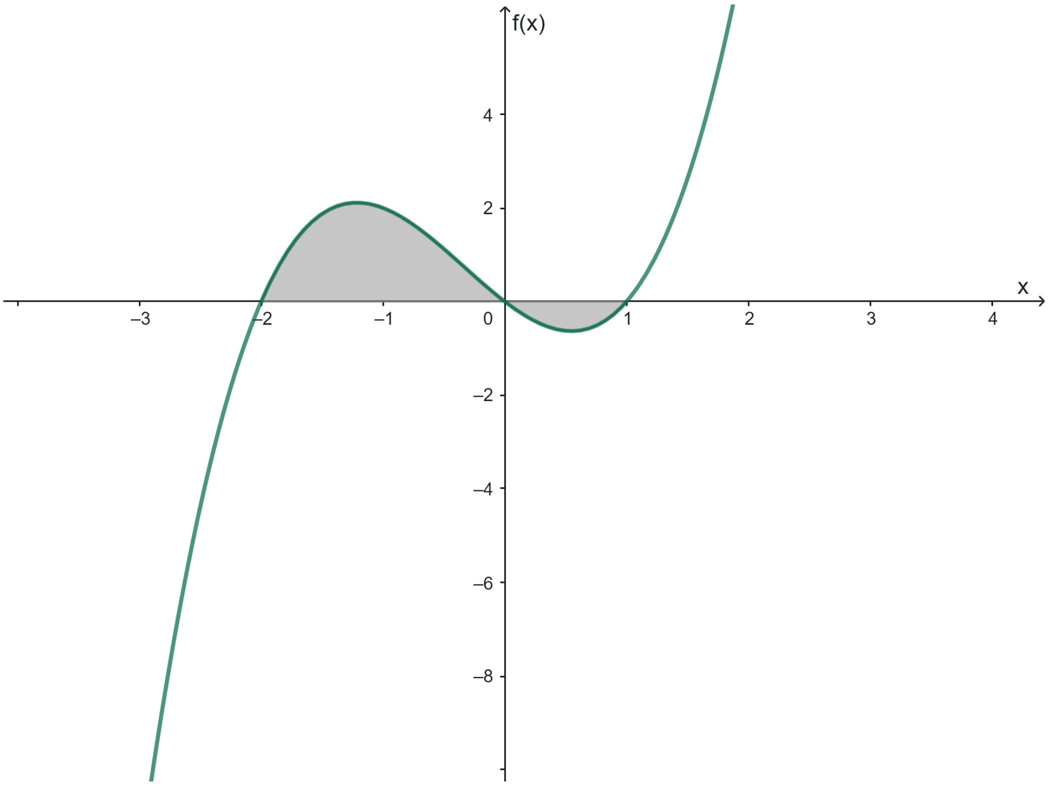
$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad D_f = [0, 10]$$

Innsiden av en kopp har samme form som vi får når vi dreier grafen til f 360° om førsteaksen i et koordinatsystem der enheten langs aksene er cm.

Hvor mye kakao er det plass til i koppen dersom den fylles helt opp?

Oppgave 3 (5 poeng)

Nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



a) Hvilket av uttrykkene nedenfor gir arealet av det markerte området på figuren?
Husk å begrunne svaret ditt.

2. $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

2. $\int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

3. $\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$

4. $\int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$

b) Regn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønsker å finne en verdi $a < 0$, som er slik at $\int_{a}^{1} f(x)\,dx = 0$.

Han bruker en kalkulator og finner at $a \approx -0{,}6$.

Unni påstår at likningen til Kristian har to løsninger.

c) Forklar hvorfor påstanden til Unni er riktig, og bruk figuren til å anslå omtrent hvilken verdi den andre løsningen kan ha.

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Løs likningen

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \quad , \quad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

Ta utgangspunkt i likningen

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - a\right) = 0 \ , \ x \in \left[0, 2\pi\right\rangle \text{ og } a \in \mathbb{R}$$

b) For hvilke verdier av a har likningen henholdsvis to, tre og fire løsninger?

Oppgave 5 (2 poeng)

Avgjør om hver av påstandene nedenfor er sann eller usann.
Husk å begrunne svarene dine.

Påstand 1

Vi kan tolke arealet under en fartsgraf som akselerasjon.

Påstand 2

En vinkel på 36° er det samme som en vinkel på $\frac{\pi}{5}$ radianer.

Oppgave 6 **(6 poeng)**

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekken

$$-3 + 0 + 3 + \dots + 69$$

a) Bestem summen av rekken.

Ta utgangspunkt i den uendelige geometriske rekken

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \dots$$

b) Bestem konvergensområdet til rekken.

En ball faller fra 2 meters høyde. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den opp til en høyde som er $75\ \%$ av høyden den falt fra.

c) Hvor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

Oppgave 7 (6 poeng)

En likning for en kuleflate S er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4$$

a) Bestem sentrum og radius til kuleflaten S.

En annen kuleflate K har sentrum i $(1, -1, 3)$ og radius 2.

Et plan α tangerer kuleflaten K i punktet $P(3, -1, 3)$.

b) Bestem en likning for plan α.

Et annet plan β er gitt ved

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

c) Avgjør om plan β vil skjære gjennom kuleflaten K.

Oppgave 8 (3 poeng)

Vis ved induksjon at

$$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \quad \text{for } n \geq 0$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

En miniubåt passerer 250 meter under en bøye som ligger på havoverflaten.
I et koordinatsystem der x-aksen og y-aksen ligger parallelt med havoverflaten, z-aksen står normalt på havoverflaten, og enheten langs aksene er meter, er posisjonen til miniubåten t sekunder etter passeringen gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[6t,\ 7t,\ -250 - 5t + 0{,}1t^2\right] \quad \text{der} \quad t \in [0,\ 60]$$

a) Bestem farten til miniubåten etter 2 sekunder.

b) Hvor langt under havoverflaten er miniubåten på det dypeste?

Posisjonen til en fiskestim i området t sekunder etter at miniubåten passerte under bøyen, er gitt ved

$$\vec{s}(t) = \left[40 + 2t,\ 60 + 2t,\ -250\right] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

Fiskestimen har en tilnærmet kuleform med radius på 15 meter. Miniubåten er 4 meter bred, 5 meter høy og 8 meter lang.

c) Gjør beregninger og vurder om miniubåten kommer til å kollidere med fiskestimen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser elektrisk spenning målt i en stikkontakt i Norge.

Sekunder etter at målingene startet (t)	0,0020	0,0050	0,0070	0,0100	0,0130	0,0150	0,0180	0,0200
Målt spenning (U)	189	323	259	–2,12	–261	–327	–189	3,52

a) Bestem en modell U for spenningen $U(t)$ volt (V) i stikkontakten t sekunder etter at målingene startet.

b) På hvilke tidspunkter i løpet av de første $0{,}0200$ sekundene er spenningen 230 V ifølge modellen?

Nettspenningen i Norge (den elektriske spenningen i vanlige stikkontakter) er 230 V.

Truls lurer på om målingene som er gjort, kan være riktige. Han finner ut at spenningen i kontakten er en vekselspenning. Det betyr at spenningen varierer periodisk med tiden. Når spenningen oppgis å være 230 V, er dette noe som kalles effektivverdien til spenningen og er gitt ved

$$U_{effektiv} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (U(t))^2 \, dt}$$

der T er perioden til funksjonen U.

c) Bruk modellen fra oppgave a og formelen ovenfor til å hjelpe Truls med å avgjøre om målingene kan være riktige.

Oppgave 3 **(4 poeng)**

Karbontetraklorid (CCl_4) er et skadelig stoff som brytes sakte ned i kroppen og delvis lagres i fettvev. Så lenge konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen er under 10 enheter, klarer leveren å skille ut stoffet som normalt. Når konsentrasjonen overstiger 10 enheter, begynner ammoniakk å hope seg opp i blodet, og det blir potensielt farlig.

Sofie skal bo nær et gammelt industriområde der det har foregått ulovlig dumping av kjemikalier. Hver natt kommer hun til å puste inn CCl_4 som fordamper fra grunnen og kommer inn på soverommet hennes gjennom ventilasjon og sprekker i kjelleren.

Sofie utsettes for 2 enheter CCl_4 per natt. Vi regner med at kroppen hennes klarer å skille ut $18\ \%$ av total mengde i kroppen i løpet av en dag.

Anta at Sofie kun skiller ut CCl_4 når hun ikke blir utsatt for stoffet, og at hun bare blir utsatt for CCl_4 om natten.

a) Regn ut hvor mange netter Sofie kan sove på soverommet sitt før konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen hennes kommer opp på et potensielt farlig nivå.

Sofie leser en artikkel om CCl_4 der det blir påstått at en voksen person aldri vil ha mer enn 10 enheter av stoffet i kroppen dersom personen utsettes for 2 enheter CCl_4 per natt.

b) Regn ut hvor mange prosent av mengden CCl_4 artikkelen antar at en voksen person skiller ut fra kroppen per dag.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3^{2x}$$

Programmet nedenfor beregner arealet avgrenset av grafen til f, x- aksen og linjene $x = 0$ og $x = 2$ ved hjelp av to ulike metoder.

```
start = 0
slutt = 2
n = 100

dx = (slutt-start)/n

def f(x):
    return 3**(2*x)

def areal_til_hoyre():
    areal = 0
    for i in range(n):
        x = start + i*dx
        areal = areal + f(x)*dx
    return areal

def areal_til_venstre():
    areal = 0
    for i in range(1, n+1):
        x = start + i*dx
        areal = areal + f(x)*dx
    return areal

print(areal_til_hoyre())
print(areal_til_venstre())
```

a) Forklar hvorfor den ene metoden vil gi en litt for høy verdi for arealet, og den andre metoden en litt for lav verdi.

b) Lag et program som beregner arealet mer nøyaktig uten å dele det opp i flere deler. Ta utgangspunkt i koden nedenfor, og skriv ferdig funksjonen «bedre_metode()».
Hvis du programmerer i et annet programmeringsspråk enn Python, må du først skrive en kode som samsvarer med koden nedenfor i språket du bruker.

Husk å legge ved skjermbilde av programmet du lager, og resultatet du får når du kjører programmet.

```
start = 0
slutt = 2
n = 100

dx = (slutt-start)/n

def f(x):
    return 3**(2*x)

def bedre_metode():
    areal = 0

    #Skriv ny kode her

    return areal

print(bedre_metode())
```

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgåva:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgaven:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!