

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\ln(x+2)$

b) $g(x) = x \cdot \ln(3x)$

Oppgave 2 (2 poeng)

Forklar hvordan vi kan avgjøre om brøken nedenfor kan forkortes, uten å utføre forkorting.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x - 3}$$

Forkort brøken.

Oppgave 3 (3 poeng)

a) Bestem et uttrykk for summen $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{a}{2^{n-1}}$

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \dots$

b) Begrunn hvorfor rekken konvergerer.

c) Bestem a slik at summen av rekken blir 10.

Oppgave 4 (5 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

- Bestem ved regning nullpunktene til f .
- Bestem ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
- Bestem ved regning vendepunktet på grafen til f .
- Lag en skisse av grafen til f .

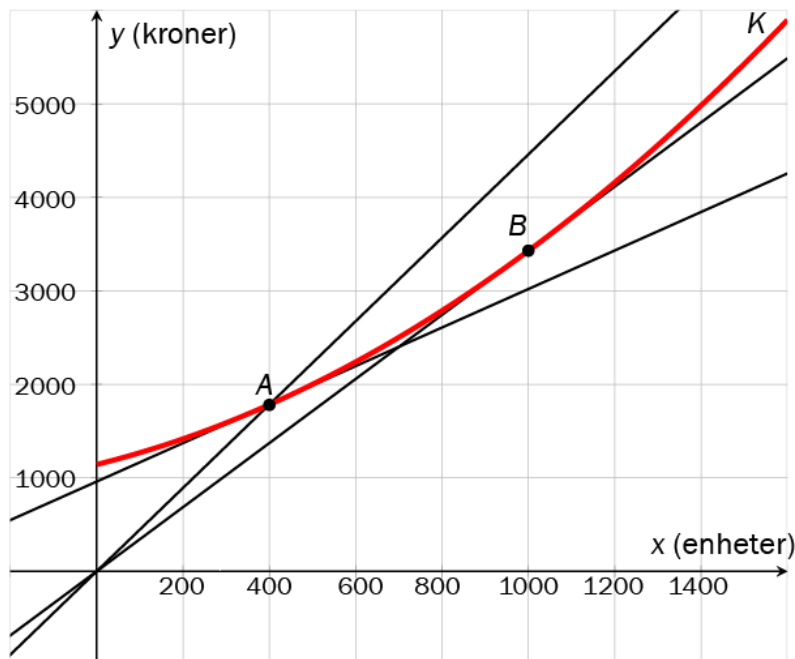
Oppgave 5 (5 poeng)

I koordinatsystemet nedenfor ser du grafen til en kostnadsfunksjon K , markert med rødt på figuren. Det er også tegnet inn tre rette linjer. Disse har likningene

$$y = 4,46x, \quad y = 3,43x \quad \text{og} \quad y = 2,06x + 960$$

To av linjene tangerer grafen til funksjonen $y = K(x)$ i henholdsvis A og B .

Enhetskostnaden ved produksjon av x enheter er $\frac{K(x)}{x}$.



- Bestem enhetskostnaden ved produksjon av 400 enheter.
- Forklar at grensekostnaden ved produksjon av 400 enheter er 2,06 kroner per enhet.
- Bestem den minste enhetskostnaden.

Oppgave 6 (4 poeng)

En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	-1	0	1
$P(X = x)$	a	b	c

Vi får oppgitt at forventningsverdien er $E(X) = \frac{1}{2}$ og at variansen er $\text{Var}(X) = \frac{7}{12}$.

a) Vis at disse opplysningene gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ -a + c &= \frac{1}{2} \\ 27a + 3b + 3c &= 7 \end{aligned}$$

b) Bestem verdien av a , b og c .

Oppgave 7 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bestem hvilke punkter på grafen til f som har tangent med stigningstall lik 2.

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

La x være antall produserte og solgte enheter for en bedrift. Sammenhengen mellom x og prisen per enhet er

$$p(x) = 500 - 0,1x$$

- a) Bestem et uttrykk for inntekten $I(x)$.

Tabellen nedenfor viser kostnaden ved produksjon av x enheter for en del verdier for x .

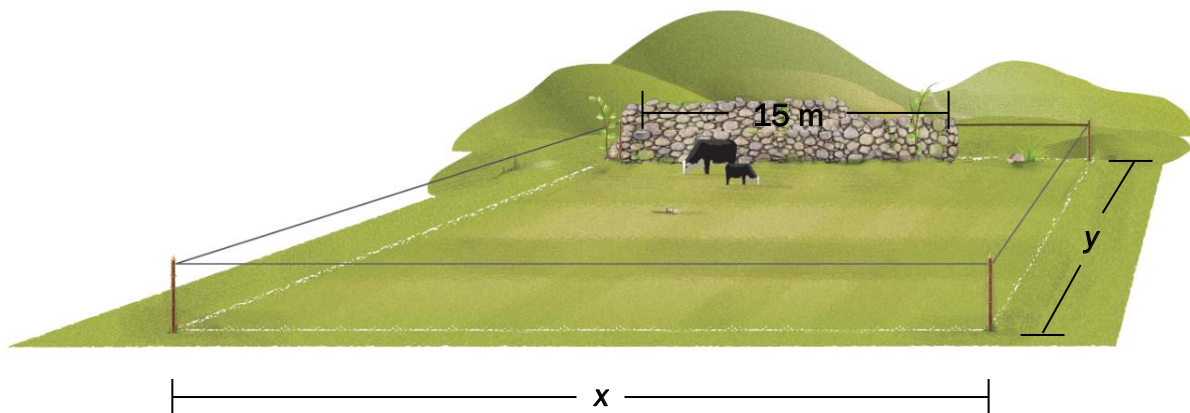
x	500	1000	1500	2000	2500
$K(x)$	92 300	195 000	310 000	461 000	641 000

- b) Bruk tabellen til å lage en modell for kostnadsfunksjonen K .
- c) Bestem et uttrykk for overskuddet $O(x)$. Bruk $O'(x)$ til å bestemme den produksjonsmengden som gir størst overskudd.
- d) Forklar hvorfor løsningen av likningen $K'(x) = I'(x)$ gir samme resultat som i oppgave c).

Oppgave 2 (5 poeng)

En bonde skal gjerde inn kuene sine på et rektangelformet område. Området skal være på 625 m^2 . Bonden skal bruke en 15 m lang steinmur som en del av inngjerdingen.

Se skissen nedenfor.



- a) Vis at en funksjon G som beskriver lengden av gjerdet kan skrives som

$$G(x) = \frac{2x^2 - 15x + 1250}{x} \quad \text{når } x > 15$$

- b) Bestem hvor langt gjerde bonden må bruke dersom han skal bruke kortest mulig gjerde. Hvilken form har da området til bonden?

Oppgave 3 (4 poeng)

Katrine satte inn 20 000 kroner på konto hvert år, første gang 1. januar 2007 og siste gang 1. januar 2010. Innskuddsrenten var hele tiden 3,5 % per år. Alle innskuddene sto urørt.

- a) Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen i banken 31. desember 2010?

1. januar 2011 ble innskuddsrenten satt ned til 3,0 % per år.

- b) Katrine satte ikke flere penger i banken, men tok i stedet ut 8000 kroner hvert år, første gang 1. januar 2011 og siste gang 1. januar 2014.

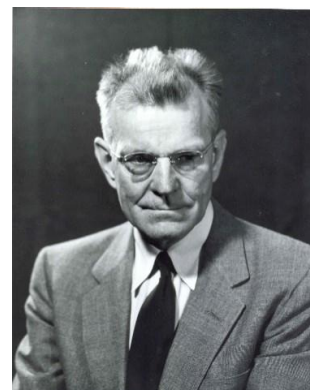
Hvor mye hadde Katrine på sparekontoen 31. desember 2014?

Oppgave 4 (6 poeng)

Den amerikanske geofysikeren Marion King Hubbert lanserte i 1956 følgende modell for verdens årlige oljeproduksjon:

$$V(t) = \frac{3400 \cdot e^{-0.051 \cdot t}}{(1 + 56 \cdot e^{-0.051 \cdot t})^2}$$

Her er $V(t)$ antall milliarder fat olje som produseres i år t etter 1930. For eksempel er $V(5)$ antall milliarder fat som ble produsert i 1935.

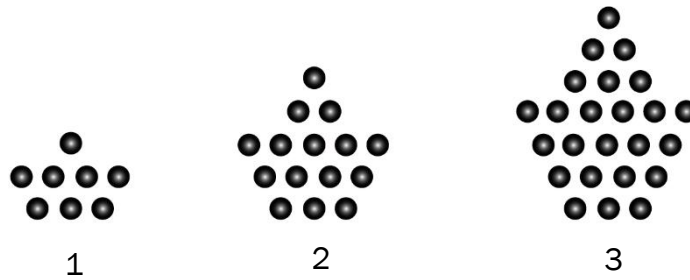


M.K. Hubbert
(1903 - 1989)

- Tegn grafen til V .
- Når vil produksjonen være 10 milliarder fat per år ifølge modellen?
- Hvilket år vil produksjonen være størst?
- Hva vil den totale produksjonen av olje være i årene fra og med 1930 til og med 2014?

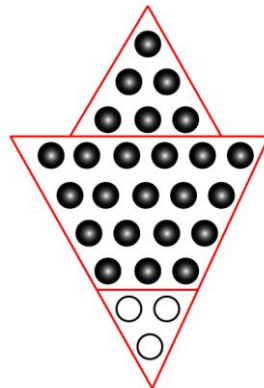
Oppgave 5 (6 poeng)

Båttallene B_n er antall prikker i figurene nedenfor. Vi ser at $B_1 = 8$ og $B_2 = 15$.



a) Bestem B_4 .

Mathias ser at han kan dele hver figur i to biter slik at han får en trekant og en del av en større trekant.



Ut fra dette ser han at $B_n = T_n + T_{n+3} - 3$, der $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

b) Bruk dette til å bestemme B_5 .

c) Bestem en formel for B_n uttrykt ved n .

Oppgave 6 (8 poeng)

En fabrikk produserer juice i kartonger. Hver kartong skal inneholde ca. 0,33 L juice. I denne oppgaven tenker vi at innholdet i boksene er normalfordelt med forventningsverdi 0,33 L og standardavvik på 0,03 L.

- a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kartong inneholder mer enn 0,36 L?
- b) Hvor mange prosent av kartongene vil inneholde mellom 0,32 L og 0,34 L?

I en kvalitetskontroll inneholdt 25 tilfeldige kartonger gjennomsnittlig 0,292 L juice.

- c) Sett opp hypoteser og vurder om bedriften i snitt taper for lite juice på kartongene. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Bedriften synes det er uheldig at så mange kunder får for lite juice i kartongene. De kan ikke gjøre noe med standardavviket, siden det er bestemt av produksjonsutstyret. Likevel ønsker de at ca. 90 % av alle kartongene skal inneholde mer enn 0,32 L juice. Dette kan de få til ved å i snitt tappe mer juice på hver kartong.

- d) Hva må forventningsverdien være for å få dette til?